Lifelong Learning Programme

DynaMAT

So viel wie möglich – Extremwertaufgaben aus Geometrie

Andreas Ulovec

1 Einführung

Die meisten Leute sind mit Extremwertaufgaben vertraut: „Was ist das flächengrößte Dreieck, das man in einen Kreis einschreiben kann?“ oder „Was ist das flächengrößte Rechteck, das man in ein rechtwinkeliges Dreieck einschreiben kann?“ und so weiter. Üblicherweise werden solche Aufgaben mit Analysis gelöst, genauer gesagt mit Ableitungen. Das liefert natürlich ein richtiges Ergebnis, sagt einem aber wenig über die dahinterstehende geometrische Situation. Wir zeigen hier einen anderen Zugang, indem wir Konstruktionen mit Dynamischer Geometriesoftware durchführen und diese dann analysieren, um eine Idee der Situation und sogar eine näherungsweise Lösung zu erhalten. Erst dann überprüfen wir diese mit Hilfe der Analysis.

2 Extremwertaufgaben

Eine Extremwertaufgabe ist das Problem, ein oder mehrere lokale oder globale Maxima oder Minima einer Funktion (oder mehrerer Funktionen) innerhalb gegebener Bereiche zu finden. Schauen wir uns eine typische Extremwertaufgabe an:

Aufgabe:

[1] Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seitenlängen a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm. Was sind die Abmessungen des flächengrößten Rechtecks, das man in das Dreieck einschreiben kann, wenn eine der Rechteckseiten auf der Seite c des Dreiecks zu liegen kommen soll?

Wäre Deine erste Vermutung „ein Quadrat“? Schauen wir uns die Sache an. Zunächst verwenden wir GeoGebra, um das Dreieck mit einem eingeschriebenen Rechteck zu konstruieren:

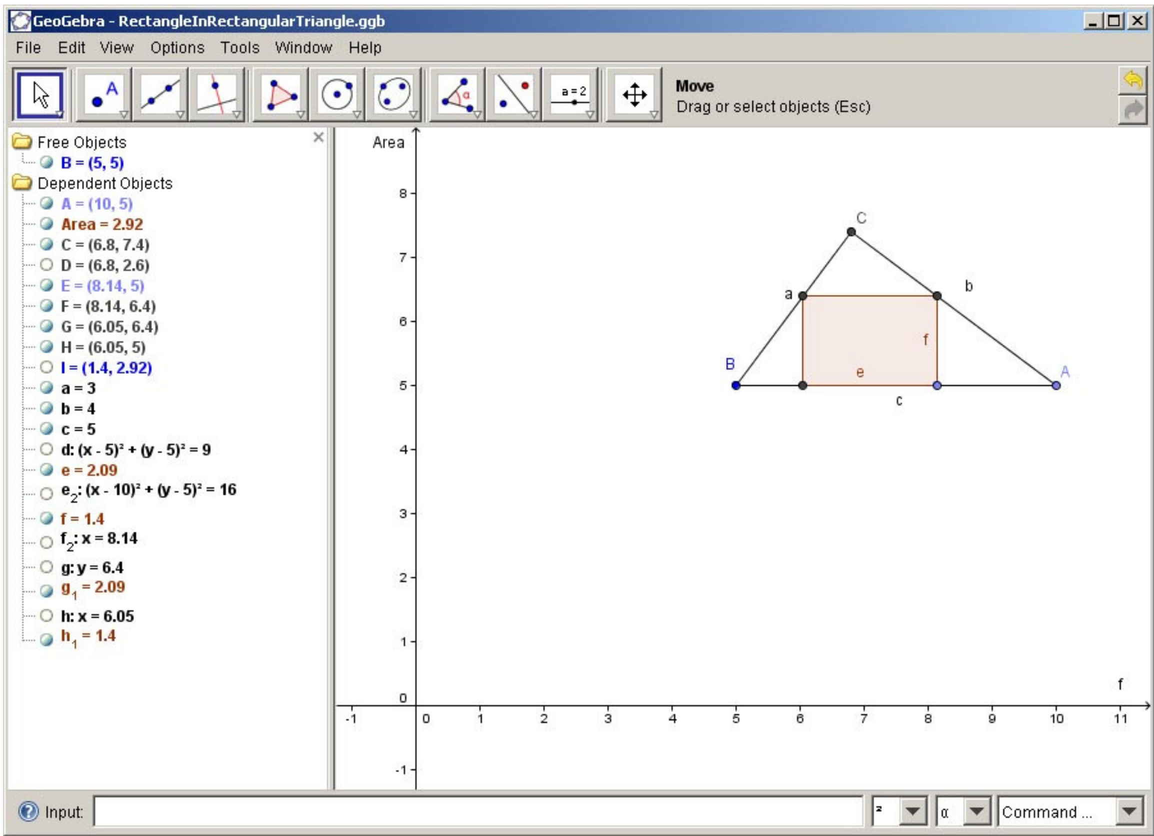


Abb.1 Konstruktion des eingeschriebenen Rechtecks im Dreieck

Ändert man die Form des Rechtecks und beobachtet man dabei den Flächeninhalt des Rechtecks (der im Algebrafenster unter dem Namen *Area* angezeigt wird), sieht man dass, wenn das Rechteck sehr schmal ist, es einen viel kleineren Flächeninhalt hat als wenn es näher an der Form eines Quadrates liegt. Gehen wir nun etwas genauer vor und betrachten wir die Funktion, welche den Flächeninhalt des Rechtecks beschreibt. Nun, das wäre natürlich $Area(e, f) = e \cdot f$. Wir haben also eine Funktion in zwei Variablen, die aber nicht unabhängig voneinander sind! Wenn wir *e* verändern, ändert sich auch der Wert von *f*. Wir können dies also auf eine Funktion $Area(f)$ zurückführen. Üblicherweise würden wir jetzt den exakten Term für die Funktion *Area* bestimmen, dann die Ableitung berechnen usw. Im Moment brauchen wir das aber gar nicht, da wir den Funktionswert von *Area* an einer beliebigen Stelle *f* im Algebrafenster ablesen können! Um das Maximum dieser Funktion zu finden (oder zumindest eine gute Annäherung an das Maximum), können wir etwa den Graphen der Funktion zeichnen. Wie können wir das aber tun, ohne den Funktionsterm zu kennen? Na ja, wie eben erwähnt, können wir den Funktionswert im Algebrafenster ablesen, d.h. für jeden gegebenen Wert *f* können wir den Punkt $P = (f, Area(f))$, also einen Punkt des Funktionsgraphen, konstruieren:

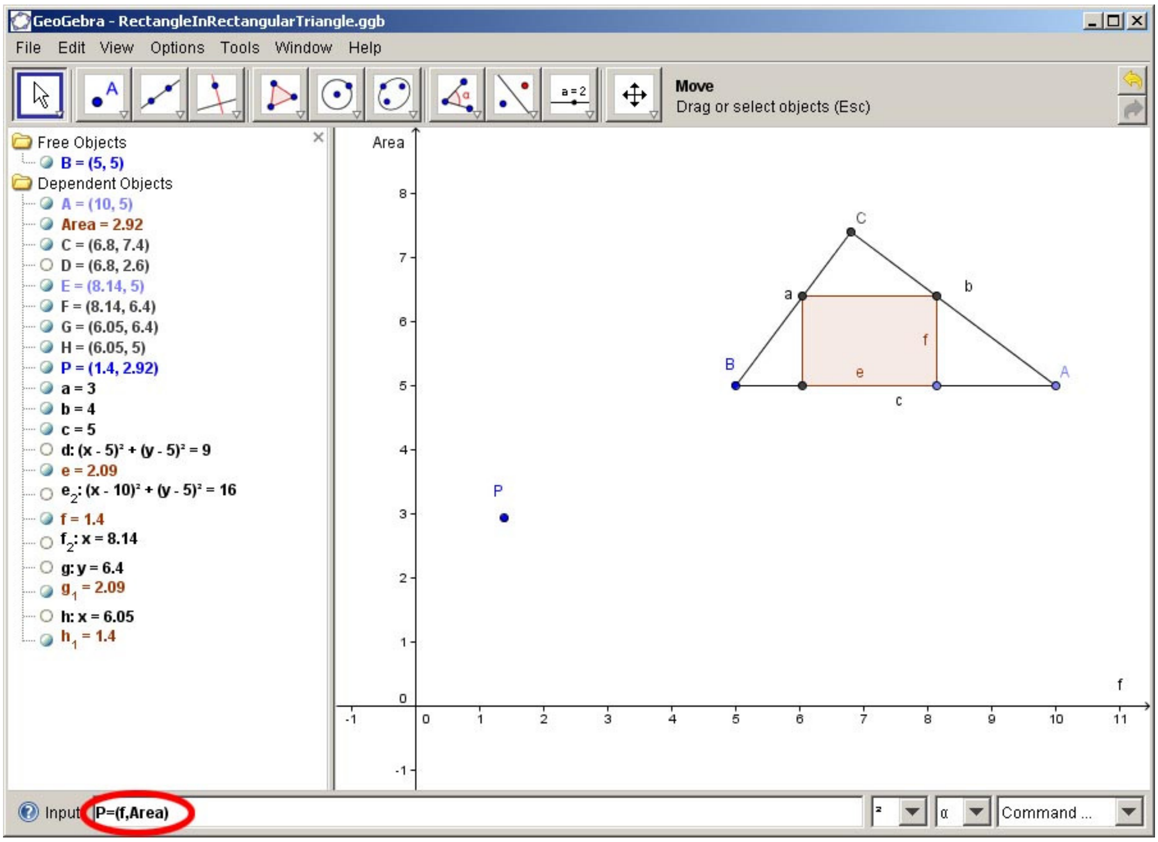


Abb.2 Ein Punkt des Funktionsgraphen ist nicht gerade viel …

Wie konstruieren wir den ganzen Graphen? Wir verwenden einfach den *Spur*-Modus von GeoGebra:

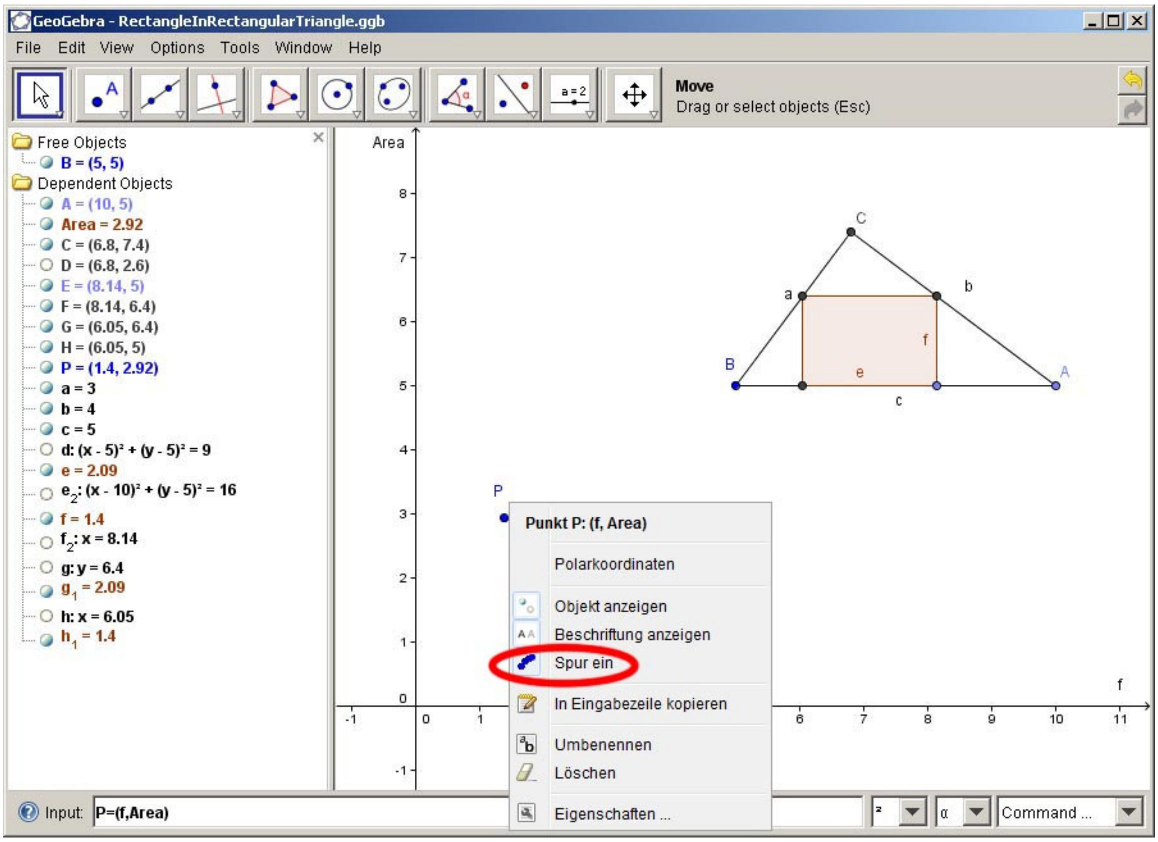


Abb.3 *Spur ein* hilft uns hier weiter …

Jetzt brauchen wir nur noch die Größe des Rechtecks ändern, indem wir wie vorher am entsprechenden Punkt ziehen:

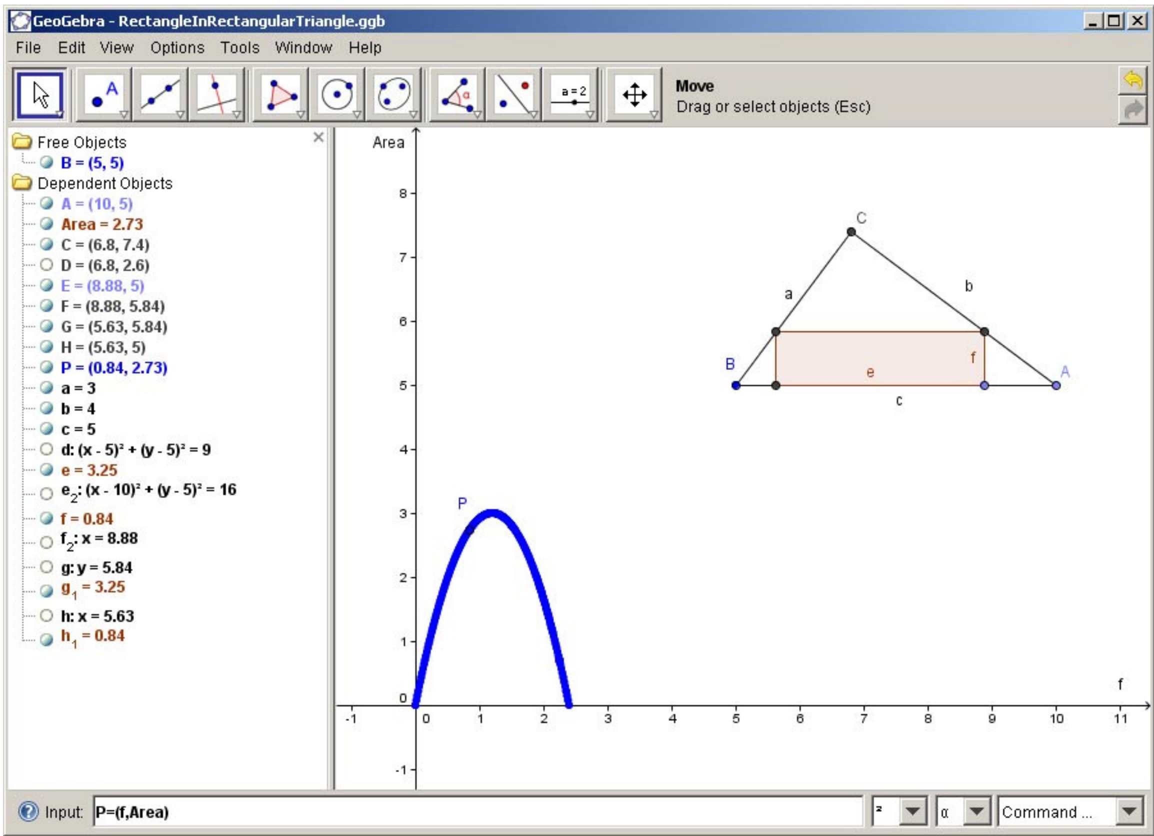


Abb.4 … und führt uns zum Graphen der Funktion

Ein Blick auf den Graphen zeigt uns, dass das Maximum bei etwa $f \approx 1$ liegt. Um das zu überprüfen, und im den genauen Wert herauszufinden, greifen wir auf unsere Analysis-Kenntnisse zurück. Zunächst müssen wir den Funktionsterm von $Area(f)$ herausfinden. Wir wissen bereits, dass $Area(f) = e \cdot f$ gilt. Nun werfen wir einen Blick auf die geometrische Konstruktion und verwenden den Strahlensatz, um die Beziehung zwischen e und f zu erhalten. Dazu benennen wir erst einmal einige der Strecken in der Konstruktion:

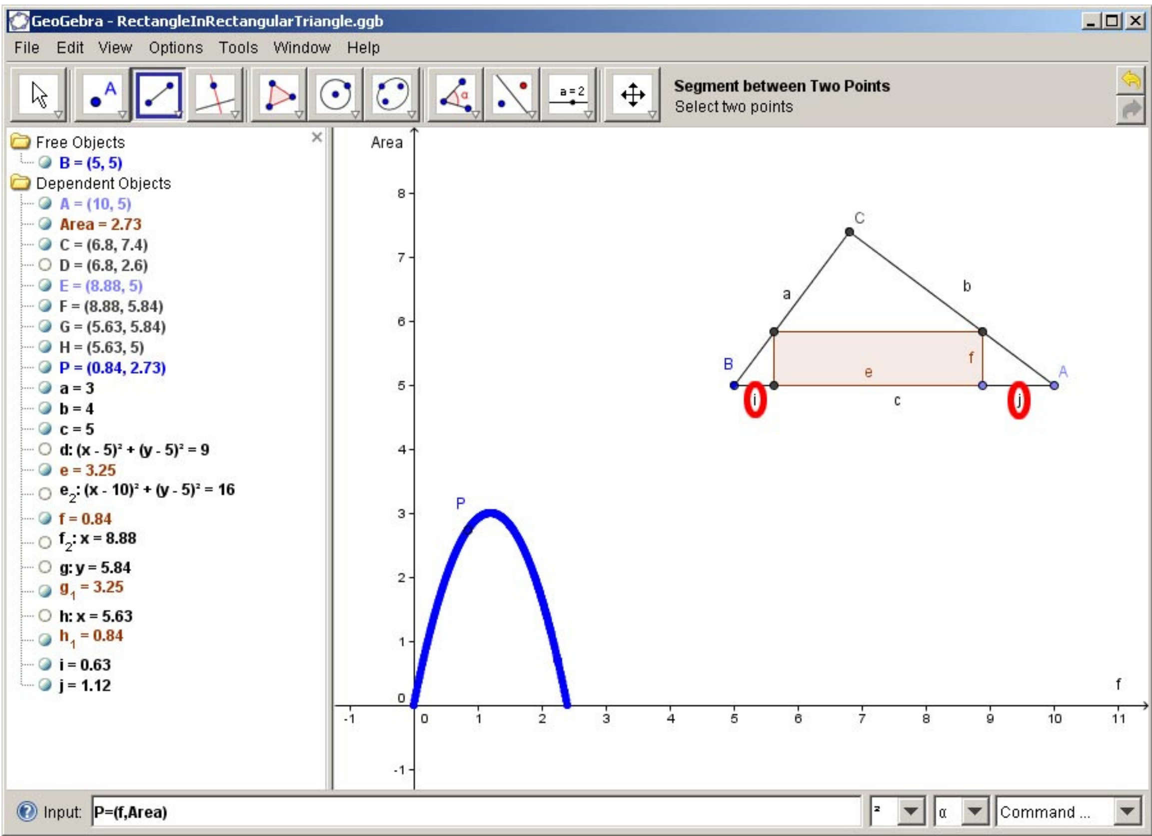


Abb.5 Strecken benennen

Jetzt können wir einfach den Strahlensatz verwenden, der uns die folgenden Verhältnisse liefert:

$$i : f = a : b, \; f : j = a : b$$

Wir kennen auch die Abmessungen des Dreiecks, d.h. wir wissen, dass

$$a = 3, b = 4, c = 5$$

Aus der Zeichnung kann man auch einfach sehen, dass

$$i + e + j = c$$

Das führt uns zu folgendem:

$$\tfrac{3}{4} f + e + \tfrac{4}{3} f = 5$$

Daraus können wir einfach eine Beziehung zwischen e und f ableiten, nämlich:

$$e = 5 - \left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{3}\right) f = 5 - \tfrac{25}{12} f$$

Nun können wir endlich den Term der Funktion *Area* anschreiben:

$$Area(f) = e \cdot f = \left(5 - \tfrac{25}{12} f\right) \cdot f = 5f - \tfrac{25}{12} f^2$$

Um das Maximum der Funktion zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Ableitung:

$$Area'(f) = 5 - 2 \cdot \tfrac{25}{12} f = 5 - \tfrac{25}{6} f$$

Jetzt setzen wir $Area'(f)=0$ und berechnen den Wert von *f*:

$$Area'(f)=0=5-\tfrac{25}{6}f \Rightarrow 5=\tfrac{25}{6}f \Rightarrow f=\tfrac{6}{5}=1.2$$

Ein Blick auf den Graphen zeigt dass die Funktion tatsächlich ein Maximum bei $f=1.2$ hat. Um dies auch analytisch zu überprüfen, berechnen wir die zweite Ableitung an der Stelle $f=1.2$:

$$Area''(f)=-\tfrac{25}{6}<0$$

Die zweite Ableitung an der Stelle $f=1.2$ ist kleiner als 0, d.h. die Funktion hat ein Maximum bei $f=1.2$. Jetzt brauchen wir nur noch den entsprechenden Wert von *e* zu berechnen, indem wir die obige Gleichung verwenden:

$$e=5-\tfrac{25}{12}f=5-\tfrac{25}{12}\cdot\tfrac{6}{5}=5-\tfrac{5}{2}=2.5$$

Die endgültige Antwort auf unsere Frage wäre also: Das flächengrößte Rechteck, welches man in ein rechtwinkeliges Dreieck mit Seitenlängen a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm einschreiben kann, hat die Abmessungen $e=2.5$ cm und $f=1.2$ cm. Auf jeden Fall ist es *kein* Quadrat!

Ein anderer Ansatz wäre gewesen, dass die Funktion *Area* mit dem oben bereits bestimmten Term

$$Area(f)=-\tfrac{25}{12}f^2+5f$$

eine Parabel beschreibt, d.h. von der Form

$$a_2x^2+a_1x+a_0$$

ist. Das Extremum einer solchen Parabel liegt bei

$$x=-\frac{a_1}{2a_2}.$$

In unserem Fall wäre $a_0=0, a_1=5, a_2=-\tfrac{25}{12}$, d.h. wir würden erhalten:

$$x=-\frac{5}{2\cdot(-\tfrac{25}{12})}=\frac{5}{\tfrac{50}{12}}=\frac{60}{50}=1.2$$

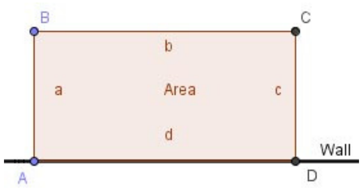
Wieder zeigt ein Blick auf den Graphen, dass es sich um ein Maximum handelt. Diese Methode hat den Vorteil, dass sie keine Ableitungen benötigt, dafür funktioniert sie nur mit bestimmten Typen von Funktionen, deren Extremstellen man kennt.

Verwende die gleichen Methoden (mit oder ohne Ableitungen), um folgende Aufgaben zu lösen!

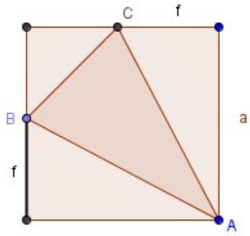
Aufgaben:

[2] Löse die obige Aufgabe mit a) einem gleichschenkeligen Dreieck mit Seitenlängen $a = b = 4$ cm, c = 5 cm, b) einem gleichseitigem Dreieck mit $a = b = c = 5$ cm, und c) einem allgemeinen Dreieck mit a = 4 cm, b = 5 cm und c = 6.5 cm. Wenn die Längen von a und b gleichbleiben und man die Länge von c vergrößert, wie wirkt sich das auf die Lösung aus?

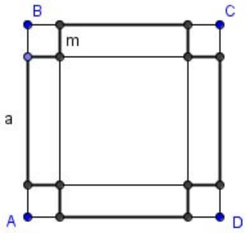
[3] Du möchtest einen rechteckigen Bereich entlang einer Mauer einzäunen. Dazu stehen 20 m Zaun zur Verfügung. Wie musst Du die Abmessungen wählen, um eine möglichst große Fläche einzäunen zu können? Wie groß ist diese Fläche? Wie groß wäre sie, wenn Du statt einem Rechteck einen Halbkreis bauen würdest?



[4] Schreibe ein gleichschenkeliges Dreieck in ein Quadrat ein, wie unten dargestellt. Wie musst Du die Länge f wählen, um ein Dreieck mit größtmöglicher Fläche zu erhalten?



[5] Konstruiere das Netz eines (oben offenen) Würfels, wie unten gezeigt (a = 3 cm). Wie musst Du die Länge m wählen, um einen Würfel mit größtmöglichem Volumen zu erhalten (beachte, dass wir nicht nach der größtmöglichen Oberfläche fragen)?



3 Ist das alles?

Viele Aufgaben aus der Praxis erfordern eine Art von Optimierung. Einige Probleme sind recht einfach zu lösen, vor allem jene mit nur einem Parameter. Andere sind schwieriger, und ziemlich oft gibt es überhaupt keine eindeutige Lösung. In vielen Fällen helfen uns dann Modellierungen und/oder Simulationen, um wenigstens eine Näherung für die optimalen Werte zu erhalten (das haben wir gerade eben mit GeoGebra gemacht).

Literatur

[1] Andersen, J et al. *Bringing Mathematics to Earth*, Provkruh Publishing House, Prague, 2011

[2] http://www.geogebra.org (14. Oktober 2011)