

Динамична симулация на стохастични явления с помощта на Excel

Джон Андерсен

Да се *почувстват* и разберат някои понятия от вероятностите и статистиката, както и връзката между тези две области, е доста сериозно предизвикателство.

Тук ще демонстрираме как с помощта на електронни таблици можем да симулираме ситуации, с които опитът в този контекст може да се обогати и така да доведе до по-задълбочено разбиране на нещата.

Хвърляне на монета

Това може би е един от най-типичните стохастични експерименти, макар хората (с изключение на математиците) обикновено да не мислят за него като за експеримент. За повечето хора е естествено да определят шансът да се падне *лице* (*ези*) или *герб* (*тура*) като 50 на 50. Но какво означава твърдението: „Вероятността да се падне *лице* е 50% или 0.5”? Дали означава, че винаги когато хвърляме монета два пъти последователно, ще се падне *лице* и *герб*? Разбира се, че не, както може веднага да се убедите, ако опитате. С помощта на малко статистика можем да поизясним нещата.

Последователното хвърляне на монета с отбелязване на всеки случай, когато се е паднало *лице*, може да се окаже доста поучителен експеримент (ако не сте го правили, може да му посветите следващия половин час).

По-надолу ще използваме Excel, за да симулираме хвърляне на монета. По-точно, ще използваме функцията `RANDBETWEEN`, с която можем да симулираме хвърляне на монета и много други стохастични експерименти посредством генератор за случайни числа.

Да видим как работи тя и какво можем да направим с нея.

| | A |
|---|-------------------|
| 1 | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 2 | |

Фиг. 1 Формула за симулация на хвърляне на монета.

Думата `SLUMPMELEEM` на датски език отговаря на английското наименование `RANDBETWEEN`. В случая `HEAD = 1`. `TAIL = 0` (т.е. *лице* се кодира с 1, а *герб* – с 0).

Ако зададете `RANDBETWEEN(a;b)`, ще получите случайно избрано число измежду целите числа $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. Да отбележим, че в различните версии се използват различни разделители, обикновено ";" или ",". Ако поставите функцията `RANDBETWEEN(0;1)` в клетка, ще получите случайно избрано число— 0 или 1, всеки път, когато изпълните пресмятането с електронната таблица, например като натиснете функционалния клавиш `F9`.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | |
| 2 | | |

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 2 | | |

Фиг.. 2 Два възможни резултата при натискане на `F9`

Може да симулирате 100 хвърляния на една монета (едно хвърляне на 100 монети, или 10 хвърляния на 10 монети):

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Фиг. 3 Симулирани хвърляния на монета

Това може да стане по следния начин – копирате функцията RANDBETWEEN в съответните клетки. Копията действат независимо едно от друго.

| | A | B | C | D | E |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 2 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 3 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 4 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 5 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 6 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 7 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 8 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 9 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 10 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) | =SLUMPMELEEM(0;1) |
| 11 | | | | | |

Фиг. 4. Независими копия на функцията SLUMPMELEEM = RANDBETWEEN

След това може да броите колко пъти се е паднало *лице* и *герб* с помощта на функцията COUNTIF.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------------------|------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | No. of heads (1) | No. of tails (0) |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 45 | 55 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | |

Фиг. 5 С помощта на COUNTIF е преброено колко пъти се е паднало *лице* и колко – *герб* и съответните резултати са в клетките L2 и M2.

| L | M |
|-----------------------------|-----------------------------|
| No. of heads (1) | No. of tails (0) |
| =TÆL.HVIS(\$A\$1:\$J\$10;1) | =TÆL.HVIS(\$A\$1:\$J\$10;0) |

Фиг. 6 Формулите, съответстващи на Фиг. 5. Функцията COUNTIF на датски е TÆL.HVIS.

| L | M | L | M |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| No. of heads (1) | No. of tails (0) | No. of heads (1) | No. of tails (0) |
| 56 | 44 | 50 | 50 |

Фиг. 7 Натискането на F9 симулира ново хвърляне на монета.

Може да получите равен брой *лице* и *герб*, но обикновено това не се случва. Пробвайте и вижте колко често се случва, да речем при 50 серии от по 100 хвърляния.

Вероятно ще ви е интересно да симулирате дълга серия от хвърляния, като следите как се променя отношението на случаите, в които се е паднало *лице*, към общия брой хвърляния, когато този общ брой расте. Например показаното на Фиг. 8 представлява интерес за изследване.

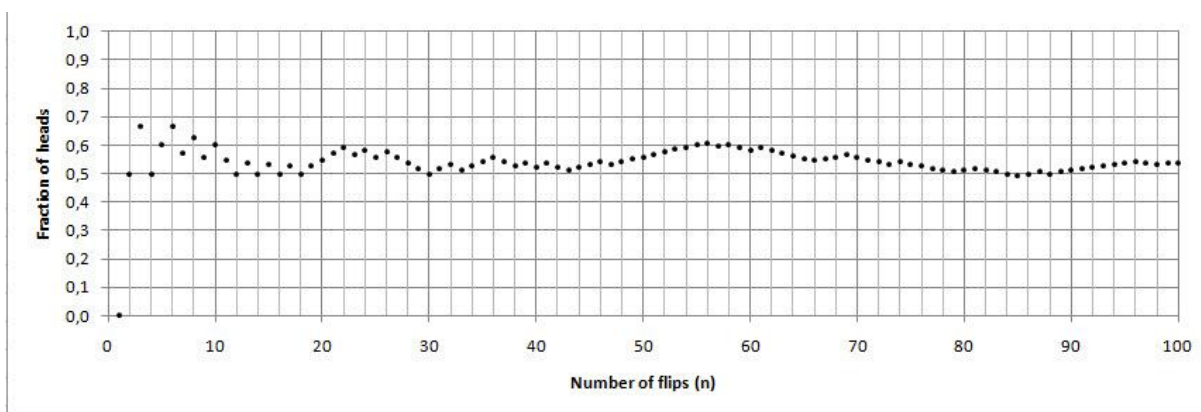
| | A | B | C | D |
|----|------------|---------|------------------------|------------------------------------|
| | Flip no. n | Face up | Heads up to flip no. n | Fraction of heads up to flip no. n |
| 1 | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1,000000 |
| 3 | 2 | 0 | 1 | 0,500000 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 0,666667 |
| 5 | 4 | 1 | 3 | 0,750000 |
| 6 | 5 | 1 | 4 | 0,800000 |
| 7 | 6 | 1 | 5 | 0,833333 |
| 8 | 7 | 1 | 6 | 0,857143 |
| 9 | 8 | 0 | 6 | 0,750000 |
| 10 | 9 | 0 | 6 | 0,666667 |
| 11 | 10 | 1 | 7 | 0,700000 |
| 12 | 11 | 1 | 8 | 0,727273 |
| 13 | 12 | 0 | 8 | 0,666667 |

Фиг. 8 Може да се симулират дълги серии от хвърляне на монета с копиране в следващи редове. За формулите вижте Фиг. 9

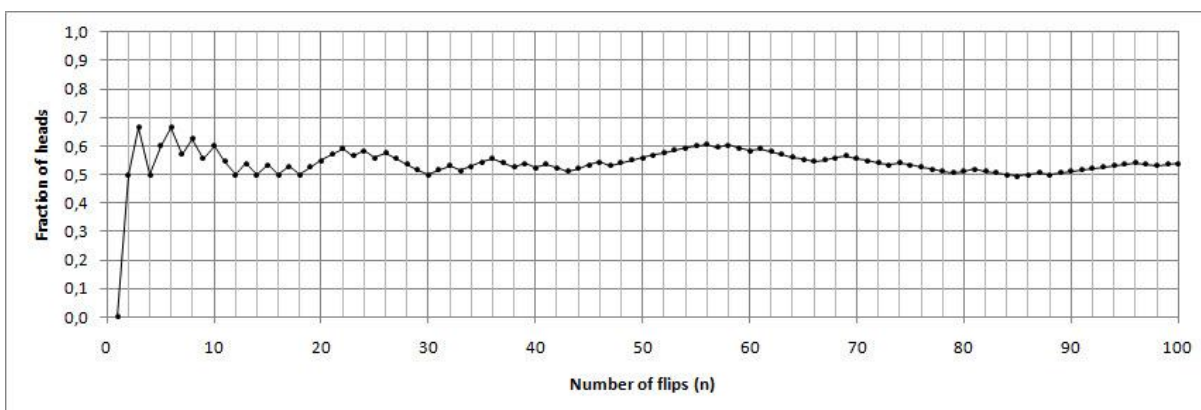
| | A | B | C | D |
|----|------------|-------------------|-------------------------|------------------------------------|
| 1 | Flip no. n | Face up | Heads up to flip no. n | Fraction of heads up to flip no. n |
| 2 | 1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B2;1) | =C2/A2 |
| 3 | =A2+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B3;1) | =C3/A3 |
| 4 | =A3+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B4;1) | =C4/A4 |
| 5 | =A4+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B5;1) | =C5/A5 |
| 6 | =A5+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B6;1) | =C6/A6 |
| 7 | =A6+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B7;1) | =C7/A7 |
| 8 | =A7+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B8;1) | =C8/A8 |
| 9 | =A8+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B9;1) | =C9/A9 |
| 10 | =A9+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B10;1) | =C10/A10 |
| 11 | =A10+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B11;1) | =C11/A11 |
| 12 | =A11+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B12;1) | =C12/A12 |
| 13 | =A12+1 | =SLUMPMELEEM(0;1) | =TÆL.HVIS(\$B\$2:B13;1) | =C13/A13 |

Фиг. 9 Формулите, които съответстват на Фиг. 8

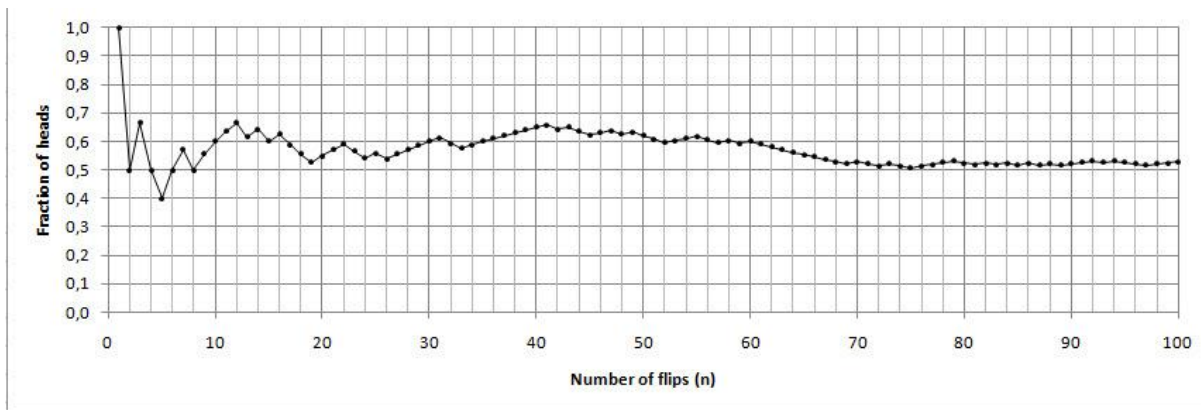
Процесът може да се визуализира, като се представи графично отношението между броя на случаите, в които се е паднало *лице*, към общия брой (n) хвърляния на монета като функция на n .



Фиг. 10 Отношението на случаите, в които се е паднало *лице*, към общия брой хвърляния като функция на n

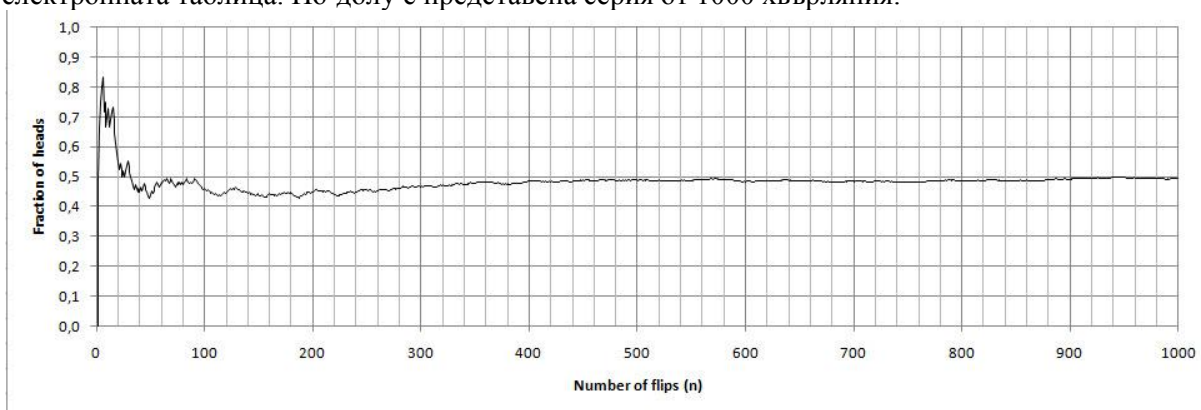


Фиг. 11 Свързване на точките с начупена линия за по-добро онагледяване.



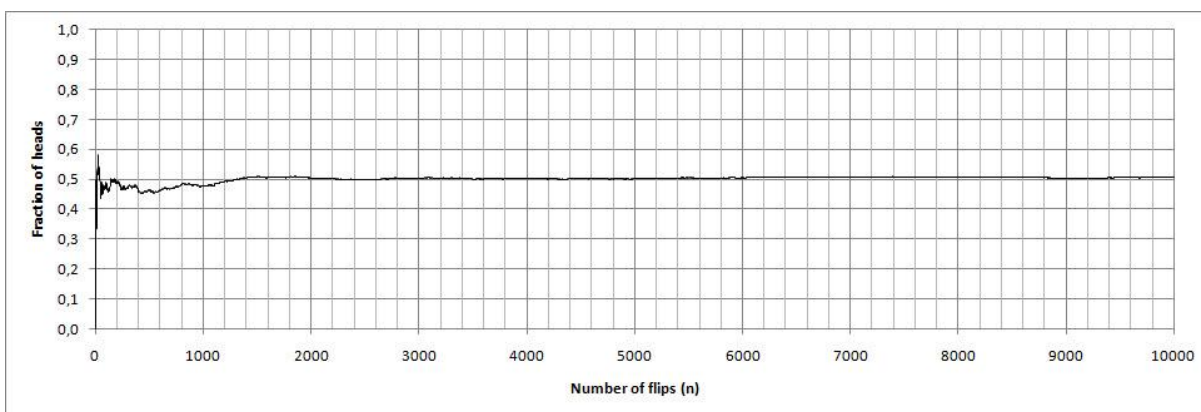
Фиг. 12 С помощта на F9 може да се симулира нова серия от 100 хвърляния.

Може да се симулира много по-дълга серия от хвърляния. Както е показано във Фиг. 8 и Фиг.9, може да се копира в следващите редове. В използваната тук версия на Excel има 2^{20} реда, така че по-скоро ще запълните паметта на компютъра, отколкото да изчерпите редовете на електронната таблица. По-долу е представена серия от 1000 хвърляния.



Фиг. 13 Относителната честота като функция на n при симулация на 1000 хвърляния на монета.

Ако искате да симулирате 10000 хвърляния, няма проблем – копирате надолу и получавате желаното.



Фиг. 14 Относителната честота като функция на n при симулация на 10000 хвърляния на монета.

Горните експерименти навеждат на мисълта, че т.нар. *относителни честоти* – отношението на броя на случаите, в които се е паднало *лице*, към общия брой хвърляния, клонят към вероятността. Това твърдение е свързано с т. нар. *закон за големите числа*. В по-нататъшните си изследвания ще разглеждаме хвърляне на пет зарчета.

Хвърляне на пет зарчета



Фиг. 15 Пет зарчета

Хвърляте пет зарчета и броите на колко от тях се е паднала шестица. Този брой може да е всяко число от 0 до 5.

Ако продължавате да хвърляте пет зарчета, като броите всеки път колко шестици са се паднали, например след 50 хвърляния може да стигнете до таблица от вида на Фиг. 16:

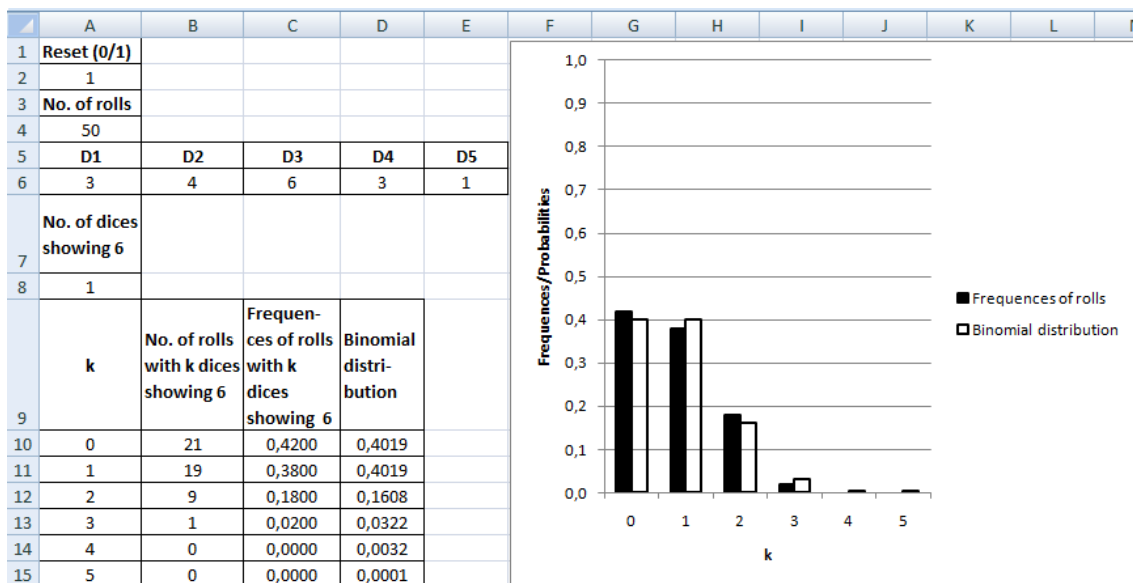
| k | No. of rolls with k dices showing 6 | Frequencies of rolls with k dices showing 6 |
|----------|--|--|
| 0 | 21 | 0,4200 |
| 1 | 19 | 0,3800 |
| 2 | 9 | 0,1800 |
| 3 | 1 | 0,0200 |
| 4 | 0 | 0,0000 |
| 5 | 0 | 0,0000 |

Фиг. 16 Статистика от 50 хвърляния на 5 зарчета. Във втората колона е даден броят **k** на зарчетата, показващи **6**, а в третата – относителната честота на събитието **k** (от 5) зарчета да показват **6** (при серия от 50 хвърляния).

Таблицата на Фиг. 16 показва, че от 50 хвърляния в 21 случая не се е паднала шестица.

Като разделим 21 на 50, получаваме *относителната честота* (0,42) на това събитие.

Таблицата е част от електронна таблица, предназначена за динамично проследяване на процеса, при който броят на хвърлянията расте с единица.

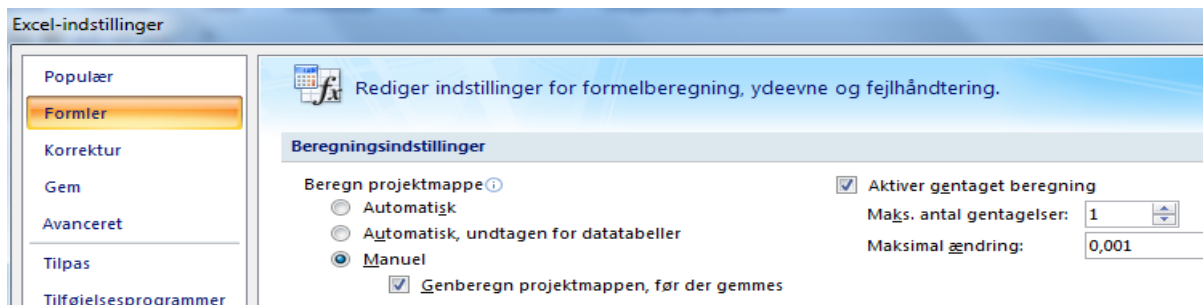


Фиг. 17 Динамична симулация на хвърляне на пет зарчета. С помощта на F9 се симулира ново хвърляне и данните се натрупват при всяко ново натискане на клавиша.

| | A | B | C | D | E |
|----|----------------------------------|--|---|---------------------------------|-------------------|
| 1 | Reset (0/1) | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | No. of rolls | | | | |
| 4 | =HVIS(A2=1;A4+1;0) | | | | |
| 5 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 |
| 6 | =SLUMPMELEEM(1;6) | =SLUMPMELEEM(1;6) | =SLUMPMELEEM(1;6) | =SLUMPMELEEM(1;6) | =SLUMPMELEEM(1;6) |
| 7 | No. of dices showing 6 | | | | |
| 8 | =HVIS(A2=1;TÆL.HVIS(A6:E6;6);"") | | | | |
| 9 | k | No. of rolls with k dices showing 6 | Frequencies of rolls with k dices showing 6 | Binomial distribution | |
| 10 | 0 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A10;B10+1;B10);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B10/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A10;5;1/6;0) | |
| 11 | 1 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A11;B11+1;B11);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B11/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A11;5;1/6;0) | |
| 12 | 2 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A12;B12+1;B12);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B12/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A12;5;1/6;0) | |
| 13 | 3 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A13;B13+1;B13);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B13/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A13;5;1/6;0) | |
| 14 | 4 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A14;B14+1;B14);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B14/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A14;5;1/6;0) | |
| 15 | 5 | =HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A15;B15+1;B15);0) | =HVIS(\$A\$4>0;B15/\$A\$4;0) | =BINOMIALFORDELING(A15;5;1/6;0) | |

Фиг. 18 Формулите, които съответстват на електронната таблица от Фиг. 17. Може да увеличите мащаба, за да видите детайлите. Названието HVIS е датското съответствие на IF.

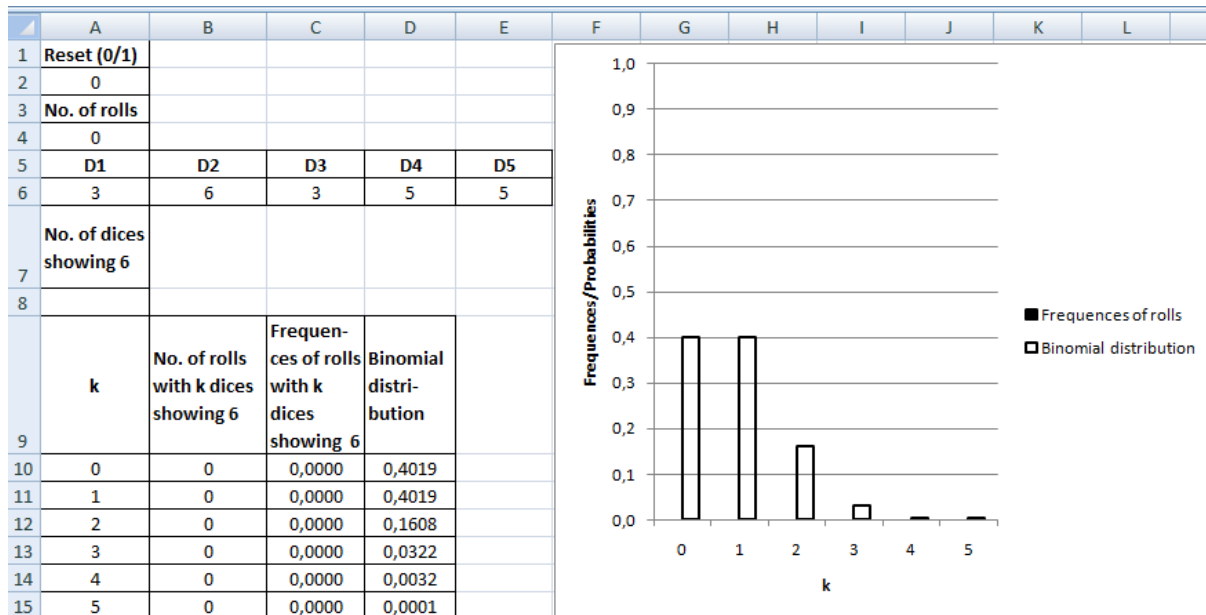
Тъй като в таблицата се използват циклични зависимости, препоръчително е вместо автоматичен да зададете ръчен режим на изчисление, както е показано на Фиг. 18.



Фиг. 19. Настройки на свойствата на таблицата за ръчно изчисление на формулата с едно повторение

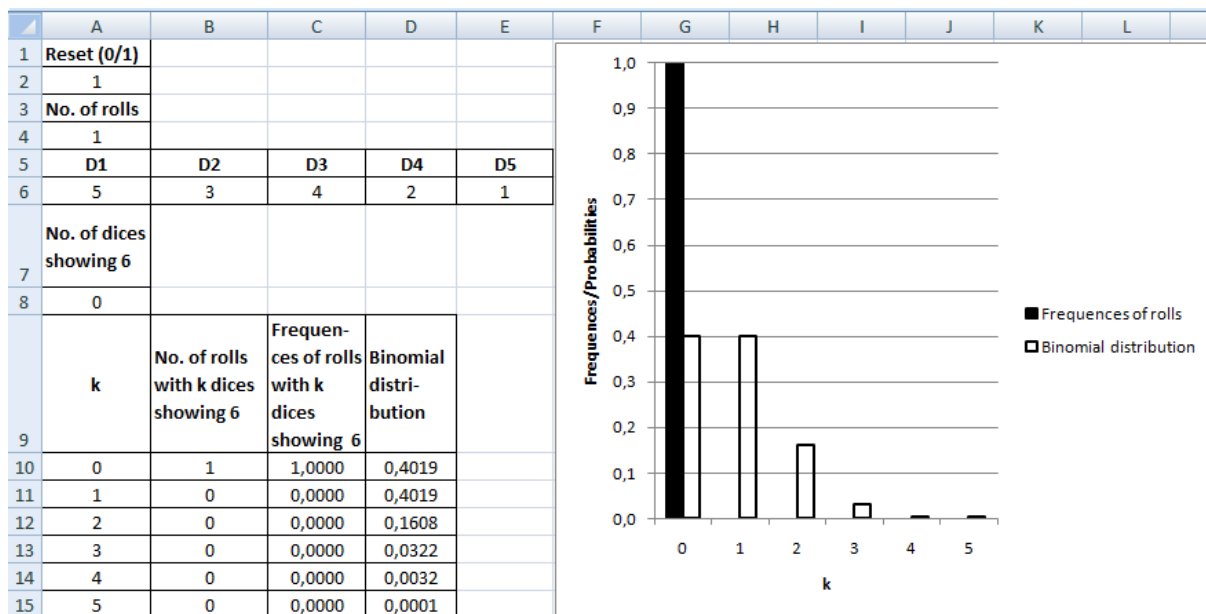
Справочник за таблиците на Фиг 17 и Фиг. 18.

Можете да рестартирате изчисленията, като въведете 0 в клетка A2 и натиснете F9. За повече детайли вижте секция 4.3.2 в [1].



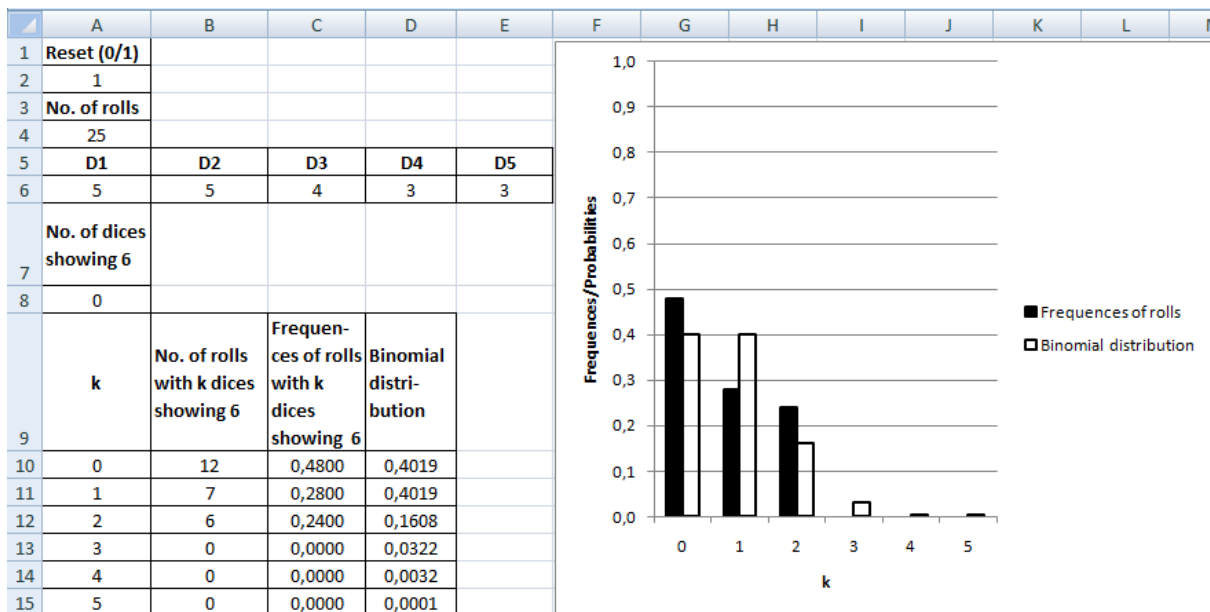
Фиг. 20 Резултат от рестартиране на изчисленията.

След това може да въведете 1 в клетка A2, да натиснете F9 и ще разполагате със симулация на първото хвърляне на зарчетата



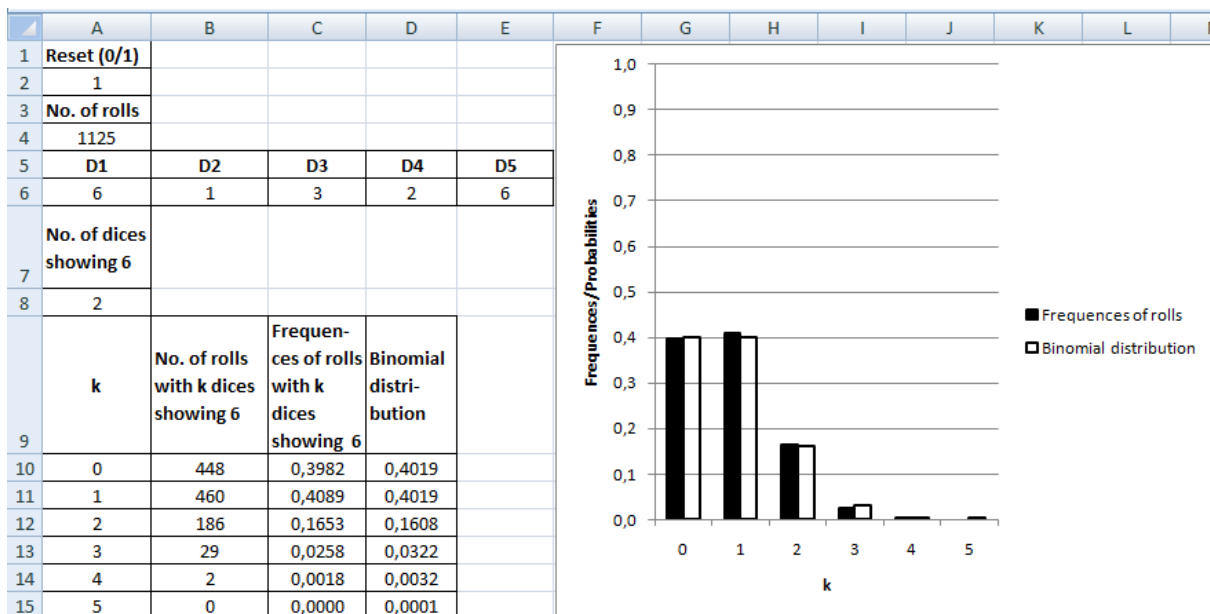
Фиг. 21 Резултат след първо хвърляне

С всяко натискане на F9 ще симулирате следващо хвърляне. Статистиката и графиката се актуализират динамично след всяко хвърляне на зарчетата. След 25-тото хвърляне ще разполагате с нещо подобно на това на Фиг. 22,



Фиг. 22 Резултат след 25 хвърляния.

Относителната честота се стабилизира с увеличаване на броя на хвърлянията. След 1125 хвърляния графиката вече ще изглежда като на Фиг. 23



Фиг. 23 Резултат след 1125 хвърляния

Черните стълбове показват относителните честоти, а белите – вероятностите, пресметнати с помощта на т. нар. *биномно разпределение*, което е теоретичният модел на изследваната от нас ситуация. Както и при хвърлянето на монета, вие възприемате вероятностите като гранични стойности на относителните честоти, когато броят на хвърлянията клони към безкрайност.

Статично графично представяне на дълга серия от хвърляния

В този последен раздел ще действаме със зарчетата така, както направихме при хвърлянето на монета.

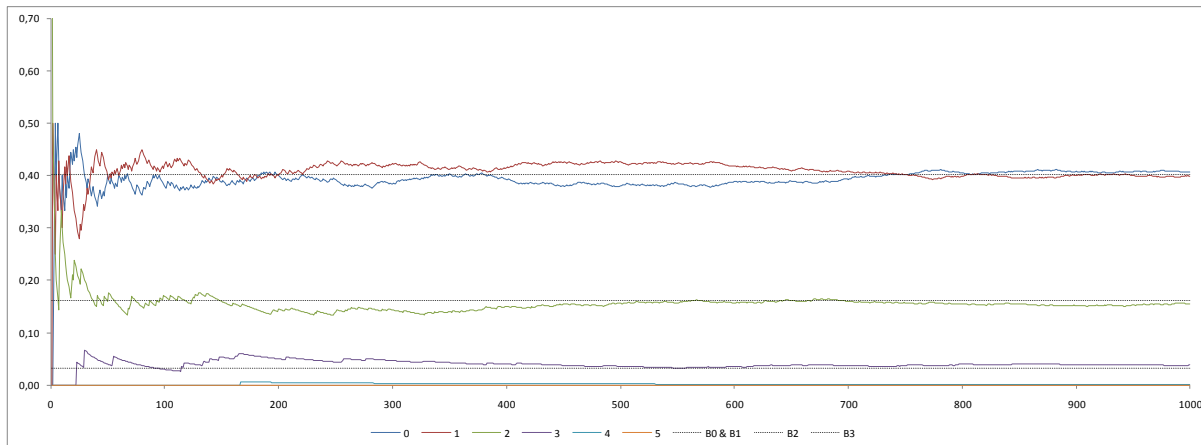
Цената ще бъде необходимостта да запълваме много повече клетки, защото всяко хвърляне ще бъде представено с отделен ред и ще искаме да запазим в електронната таблица всички хвърляния.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|----------|-------|----|----|----|----|-------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | Roll no. | Dices | | | | | Number of 6 | (Number of X = k up to n)/n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 | | | | | |
| 2 | n | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | X | 0,0000 | 1,0000 | 2,0000 | 3,0000 | 4,0000 | 5,0000 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 2 | 4 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 3 | 6 | 6 | 3 | 6 | 2 | 3 | 0,6667 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3333 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 4 | 6 | 2 | 2 | 5 | 2 | 1 | 0,5000 | 0,2500 | 0,0000 | 0,2500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 5 | 5 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 0,4000 | 0,2000 | 0,2000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 6 | 5 | 2 | 6 | 6 | 6 | 3 | 0,3333 | 0,1667 | 0,1667 | 0,3333 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 7 | 5 | 5 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0,2857 | 0,2857 | 0,1429 | 0,2857 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 8 | 4 | 3 | 5 | 2 | 6 | 1 | 0,2500 | 0,3750 | 0,1250 | 0,2500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 9 | 6 | 6 | 1 | 6 | 4 | 3 | 0,2222 | 0,3333 | 0,1111 | 0,3333 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 10 | 5 | 5 | 3 | 5 | 6 | 1 | 0,2000 | 0,4000 | 0,1000 | 0,3000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 11 | 1 | 3 | 3 | 2 | 5 | 0 | 0,2727 | 0,3636 | 0,0909 | 0,2727 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 12 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 0 | 0,3333 | 0,3333 | 0,0833 | 0,2500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 15 | 13 | 5 | 2 | 4 | 4 | 6 | 1 | 0,3077 | 0,3846 | 0,0769 | 0,2308 | 0,0000 | 0,0000 |
| 16 | 14 | 2 | 6 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0,2857 | 0,4286 | 0,0714 | 0,2143 | 0,0000 | 0,0000 |

Фиг. 24 Първите 16 реда на таблицата за симулиране на хвърляне на 5 зарчета

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | |
|----|----------|-----------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|---|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| 1 | Roll no. | Dices | | | | | Number of 6 | (Number of X = k up to n)/n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 | | | | |
| 2 | n | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | X | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| 3 | 1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B3:F3;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A3 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A3 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A3 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A3 | |
| 4 | =A3+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B4:F4;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A4 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A4 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A4 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A4 | |
| 5 | =A4+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B5:F5;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A5 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A5 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A5 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A5 | |
| 6 | =A5+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B6:F6;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A6 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A6 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A6 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A6 | |
| 7 | =A6+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B7:F7;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A7 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A7 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A7 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A7 | |
| 8 | =A7+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B8:F8;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A8 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A8 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A8 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A8 | |
| 9 | =A8+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B9:F9;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A9 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A9 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A9 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A9 | |
| 10 | =A9+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B10:F10;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A10 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A10 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A10 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A10 | |
| 11 | =A10+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B11:F11;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A11 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A11 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A11 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A11 | |
| 12 | =A11+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B12:F12;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A12 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A12 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A12 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A12 | |
| 13 | =A12+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B13:F13;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A13 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A13 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A13 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A13 | |
| 14 | =A13+1 | =SLUMPMELE(1;6) | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =SLUM | =TÆL.HVIS(B14:F14;6) | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;H\$2)/\$A14 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;I\$2)/\$A14 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;J\$2)/\$A14 | =TÆL.HVIS(\$G\$3:\$G\$3;K\$2)/\$A14 | |

Фиг. 25 Формули, отговарящи на Фиг. 24. Увеличете мащаба за детайли..



Фиг. 26 Графика на относителната честота на броя шестици при хвърляне на 5 зарчета като функция на броя на хвърлянията.

На Фиг. 26 се вижда още един пример, който е илюстрация на закона за големите числа.

Литература

[1] http://www.math2earth.oriw.eu/publications/13_Animation.pdf (November, 2011)