

Stóra Tréð

John Andersen
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

Í þessum kafla eru aðferðir úr hnitarúmfræði notaðar til þess að staðsetja hlut í raunverulegu umhverfi utan kennslustofunnar. Stærðfræðilegur bakgrunnur er að stærstum hluta tekinn saman í undirkafla 2. Þekking á námsefni neðri hluta framhaldsskólans er nægjanleg. Það sem gerir þetta verkefni krefjandi er að það er framkvæmt utan kennslustofunnar í nágrenni Árósa. Það þarf að halda vel á spöðunum ef vel á að vera.

Þau tæki og tól sem voru notuð eru GPS-tæki, Google Earth, kvika stærðfræðiforritið GeoGebra og stafræn myndavél.

1 Aðalverkefnið: Að staðsetja stóra tréð

Frá mörgum stöðum í Árósum, Danmörku, er hægt að sjá stórt tré, sem stendur upp úr hinum trjánum, í skógi sunnan borgarinnar. Ef gengið er um skóginn sést tréð hins vegar ekki því toppur þess er falinn af hinum trjánum í skóginum.

Vinur minn dró athygli mína að trénu einn vordag þegar við drukkum kaffi á kaffihúsi í Marselisborg Marina. Hann sagði mér að einu sinni hafði hann skorað á nokkra nemendur að staðsetja tréð. Við ræddum smáatriðin ekki nánar.

Seinna er ég íhugaði það sem hann sagði mér fékk ég áhuga á því að reyna það sjálfur til þess að kanna stærðfræðilegu möguleikana í tengslum við slíkt verkefni.



Mynd 1. Útsýnið í suðurátt frá hafnargarðinum í Marselisborg Marina, Árósum, Danmörku.

Stækkaður hluti myndarinnar sýnir tréð skýrar.

Á þessum tímapunkti var ég að kenna mínum nemendum hnitarúmfræði við Kennaraskólann í Árósum. Ef til vill er það ástæðan fyrir því að hugur minn leitaði í átt að hnitakerfum og skörun lína. Ég vildi finna leið til að ráðast í verkefnið sem gæti veitt mér innblástur við kennslu mína í framtíðinni.

Hér á eftir mun ég gefa lýsingu nokkrum mismunandi leiðum til þess að leysa sígilt verkefni úr hnitarúmfræði á grunn- eða framhaldsskólastigi.

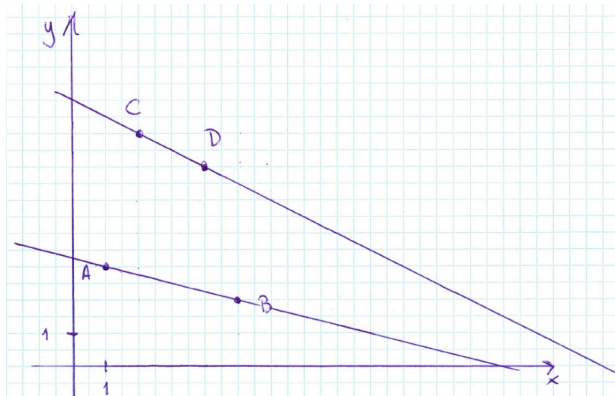
2 Sígilt verkefni úr hnitarrúmfræði

Verkefni

Punktarnir A, B, C og D hafa Kartesarhnitin A(1,3), B(5,2), C(2,7) og D(4,6). Línurnar l og m eru dregnar gegnum AB og CD. Ákvarðið skurðpunkt línanna.

2.1 Hefðbundin lausn á blaði

Þú teiknar ása hnitakerfis á blað með ferningslaga grind og merkir inn punktana A, B, C og D. Teiknaðu svo línurnar l og m. Þá stoppar þú. Úpps! - Skurðpunkturinn lendir fyrir utan blaðið.

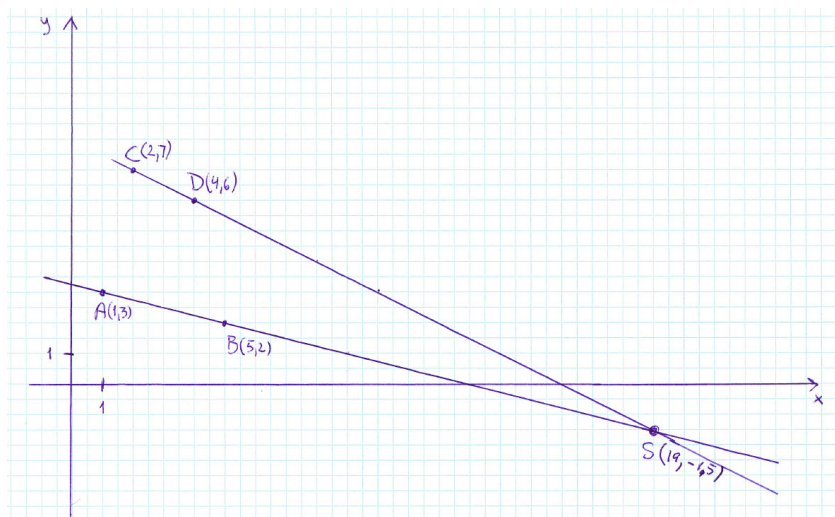


Mynd 2. Ákvörðun skurðpunkts línanna l og m.

Fyrsta tilraun: Misheppnaðist sökum lélegrar hönnunar.

Sumir nemendur gætu haldið að stærðfræði sé heimskulegt fag vegna þess að hlutir sem þessir gerast í sífellu. En það er hluti af leiknum. Þú munt þurfa að hætta við og byrja upp á nýtt aftur og aftur. Það er engin leið til að komast fram hjá því ef þú vilt læra og ná árangri í stærðfræði. Nýja tilraunin þarf að taka tillit til reynslunnar sem fékkst úr fyrstu tilrauninni. Þú snýrð nýju blaði um 90° rangsælis og reynir á ný.

Eins og við munum sjá í undirkafla 2.3 þá hjálpar tæknin okkur að komast framhjá umstanginu sem fylgir því að endurgera hlutina þegar maður prufar sig áfram með stærðfræði.



Mynd3. Ákvörðun skurðpunktsins.

Að endurteikna hnitakerfið á nýtt blað bjargar málunum.

Í þetta skiptið tókst það. Með því að lesa af hnitakerfinu fæst svarið S(19,-1.5). Í það minnsta ef námundað er að næsta grindarpunkti – og ef þið eruð von þægum tölum í verkefnum þá er það líklega það sem þið munuð gera ☺.

2.2 Sígild lausn með notkun algebru: Jöfnur beinna lína

Á efra námsstigi, en þó enn innan grunnskóla, er hægt að setja upp jöfnur fyrir línurnar tvær og leysa fyrir x og y . Mynd 4 sýnir ósvikið uppkast af þessari leið til að leysa verkefnið.

$A(1,3) \quad B(5,2)$ $l: y = \alpha_l x + q_l$ $\alpha_l = \frac{2-3}{5-1} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x + q_l$ $q_l = 2 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 5\right) = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$ $l: y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$	$C(2,7) \quad D(4,6)$ $m: y = \alpha_m x + q_m$ $\alpha_m = \frac{6-7}{4-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + q_m$ $q_m = 6 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right) = 8$ $l: y = -\frac{1}{2}x + 8$
---	---

$$S(x,y) ?$$

$$-\frac{1}{2}x + 8 = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \quad (x - 4)$$

$$2x - 32 = x - 13$$

$$2x - x = 32 - 13$$

$$x = 19$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 19 + 8 = -9,5 + 8 = -1,5$$

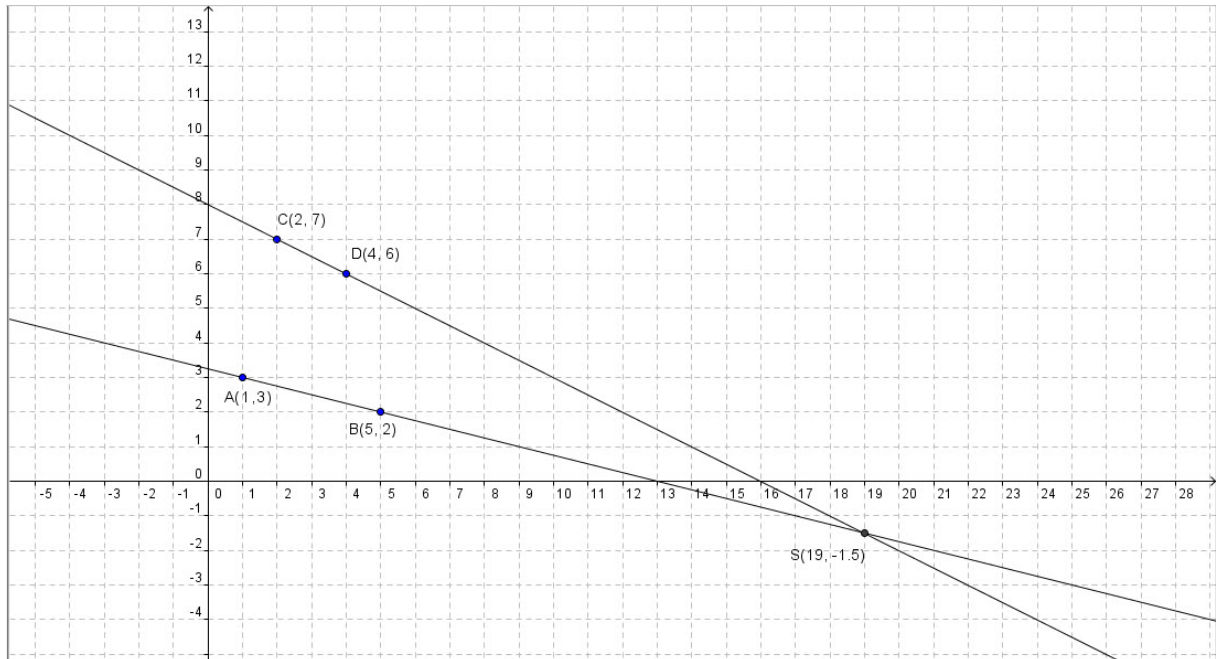
$$\underline{\underline{S(19, -1,5)}}$$

Mynd 4. Lausn fengin með algebru eins og í gamla daga.

Sökum þess hvað tölurnar eru þægilegar er hægt að leysa verkefnið án mikilla vandræða þrátt fyrir að mörgum 15 ára krökkum gæti fundist það dálítið erfitt.

2.3 Lausn fengin með kviku stærðfræðiforriti

Með því að nota kvikt stærðfræðiforrit eins og GeoGebra verður teikningin mun meðfærilegri og nákvæmari, auk þess verða öll vandamál með kvörðun úr sögunni. Þannig verður lausnin sýnileg á myndinni í stað þess að lenda utan blaðsins.



Mynd 5. Hluti af skjánum þar sem GeoGebra er notað til að ákvarða skurðpunktinn.

Innbyggð verkfæri í GeoGebra byggja á aðferðum algebrunnar. Notandinn þarf ekki að kunna algebruna í þáula, nákvæminn í undirkafla 2.2 er fengin með því að virkja víðeigandi verkfæri og smella með músarbendlinum. Smáatriðum er sleppt hér þar sem á öðrum stöðum í bókinni muntu finna mikið efni um GeoGebra. Verklýsing myndsmíðar hér að neðan gefur hugmynd um framkvæmdina.

Nr.	Nafn	Skilgreining	Gildi
1	Punktur A		A = (1, 3)
2	Punktur B		B = (5, 2)
3	Punktur C		C = (2, 7)
4	Punktur D		D = (4, 6)
5	Lína m	Lína gegnum C, D	m: $y = -0.5x + 8$
6	Lína l	Lína gegnum A, B	l: $y = -0.25x + 3.25$
7	Punktur S	Skurðpunktur l, m	S = (19, -1.5)

Mynd 6. Verklýsing fyrir myndina sem sýnd er á mynd 5.

Prófið sjálf að nota GeoGebra.

2.4 Tómir reikningar – mynd verður aukaatriði

Hugbúnaður eins og GeoGebra býður upp á innbyggð föll sem gerir manni kleift að rita öll inntök og úttök á algebruformi. Þetta getur verið kostur þegar erfitt verður að halda utan um myndefnið m.a. vegna stórra talna.

Að neðan í mynd 7 er sýnt hvað er skrifað í inntakslínu GeoGebra til að leysa verkefnið um skurðpunkt línanna. (↵ merkir að styðja á ENTER lykilinn).

$$A = (1,3)↵$$

$$B = (5,2) ↵$$

$$C = (2,7) ↵$$

$$D = (4,6) ↵$$

$$l = Lína[A,B] ↵$$

$$m = Lína[C,D] ↵$$

$$S = Skurðpunktur[l,m] ↵$$

Mynd 7. Innsláttur sem leiðir til útreiknings á hnit skurðpunktsins.

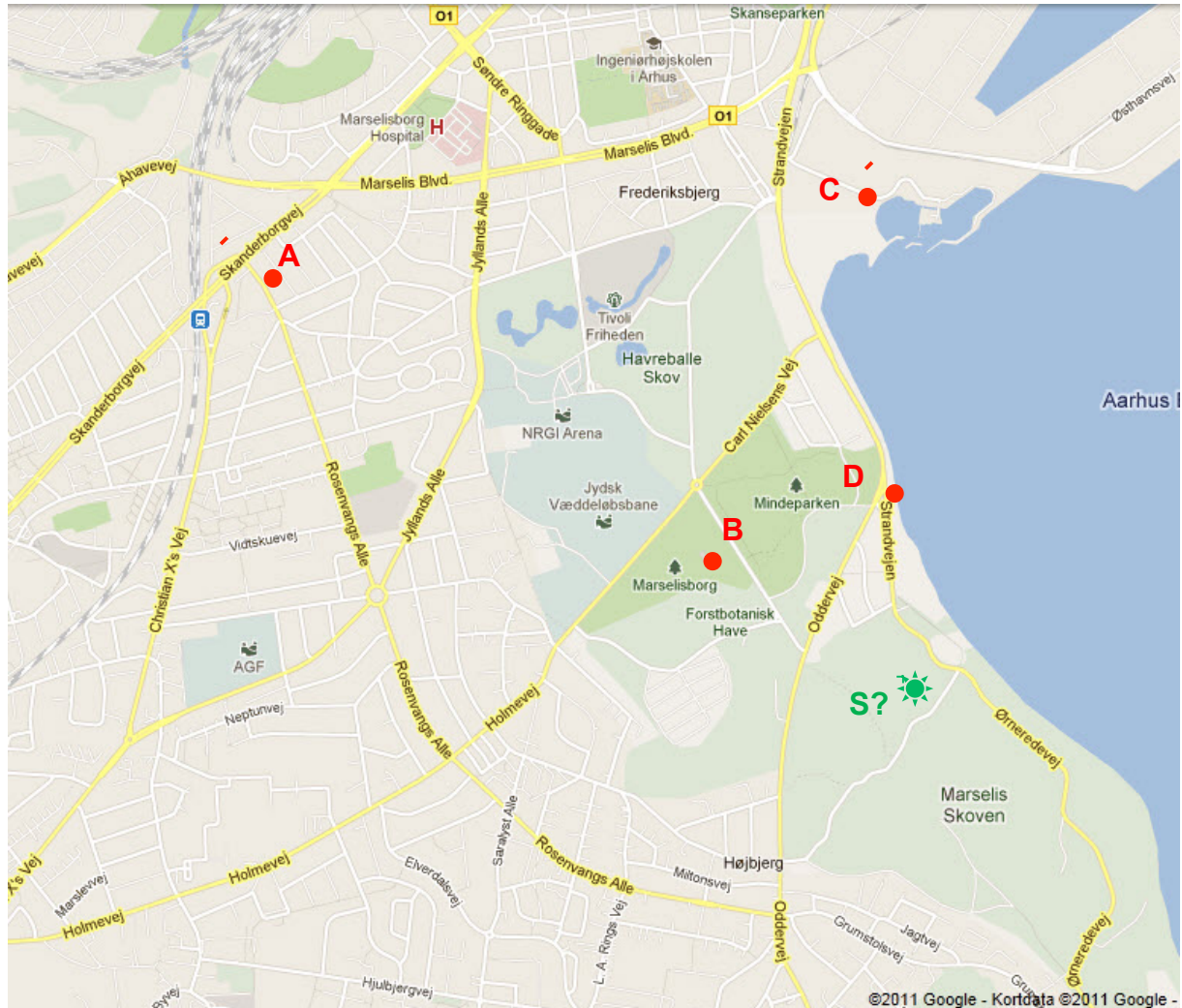


Nr.	Nafn	Skilgreining	Gildi
1	Punktur A		A = (570900, 6225385)
2	Punktur B		B = (573342, 6222738)
3	Punktur C		C = (575805, 6222243)
4	Punktur D		D = (575920, 6220470)
5	Lína l	Lína gegnum A, B	l: 2647x + 2442y = 1671356...
6	Lína m	Lína gegnum C, D	m: 1773x + 115y = 1736460...
7	Punktur S	Skurðpunktur l, m	S = (575956.73, 6219903.77)

Mynd 8. Verklýsing fyrir innslátt eins og í mynd 7.

3 Að staðsetja stóra tréð

Fræðin bakvið aðferðina: Ég staðset hentugan punkt A þar sem sést í tréð, og vel svo punkt B á línunni frá A að trénu og geri hið sama með punkta C og D. Dreg því næst línur á kortið og ætti þá að geta staðsett tréð sem skurðpunkt línanna tveggja.



Mynd 9. Hugleiðingar um aðferðina til að staðsetja tréð – sjá einnig mynd 3.

Ég ákveð að nota GPS tækið mitt til að mæla UTM-hnit punktanna. Þá get ég reiknað skurðpunktinn S með aðferðinni úr undirkafla 2.4. Þú getur fundið frekari upplýsingar um GPS-tæki í [1] og í [2] getur þú lesið meira um UTM-hnit og hnitarrúmfræði. Ég mæli með því að þessir kaflar verði lesnir sem undirbúningur eða til hliðsjónar við það sem á eftir kemur.

3.1 Punkt A, C og hnit þeirra

Í norð-vesturhluta Árósa eru hæðir með nokkuð góðu útsýni yfir borgina og umhverfi þess. Toppur hæstu hæðarinnar er valinn til að vera punktur A. Útsýnið í suðausturátt frá þessum punkti er sýnt á mynd 10.



Mynd 10. Útsýnið í suðausturátt frá hæstu hæðinni í Hasle-hæðum sem er u í norðvesturhluta Árórsar. (10 x þysjun).

Ég les af GPS-tækinu hnitin 32V 570900 6225385. Ég þarf nú punkt B í línu frá A í átt að trénu. Norðausturhluti háu blokkarinnar í miðju myndarinnar virðist duga svo ég mun reyna að finna hana til að lesa hnit þess. Meira um þann hluta í undirkafla 3.2.

Sem punkt C vel ég hafnargarðinn við Marselisborg Marina þar sem verkefnið var fyrst kynnt fyrir mér. Þú sérð útsýnið á mynd 1.

Les hnitin sem 32V 575805 622243. Punktur D er fundinn á dálítið flókinn hátt. Þökk sé sjónauka og þysjuninni á myndavélinni minni gat ég séð smáatriði á ströndinni fyrir framan skóginn sem sýndur er á mynd 11.

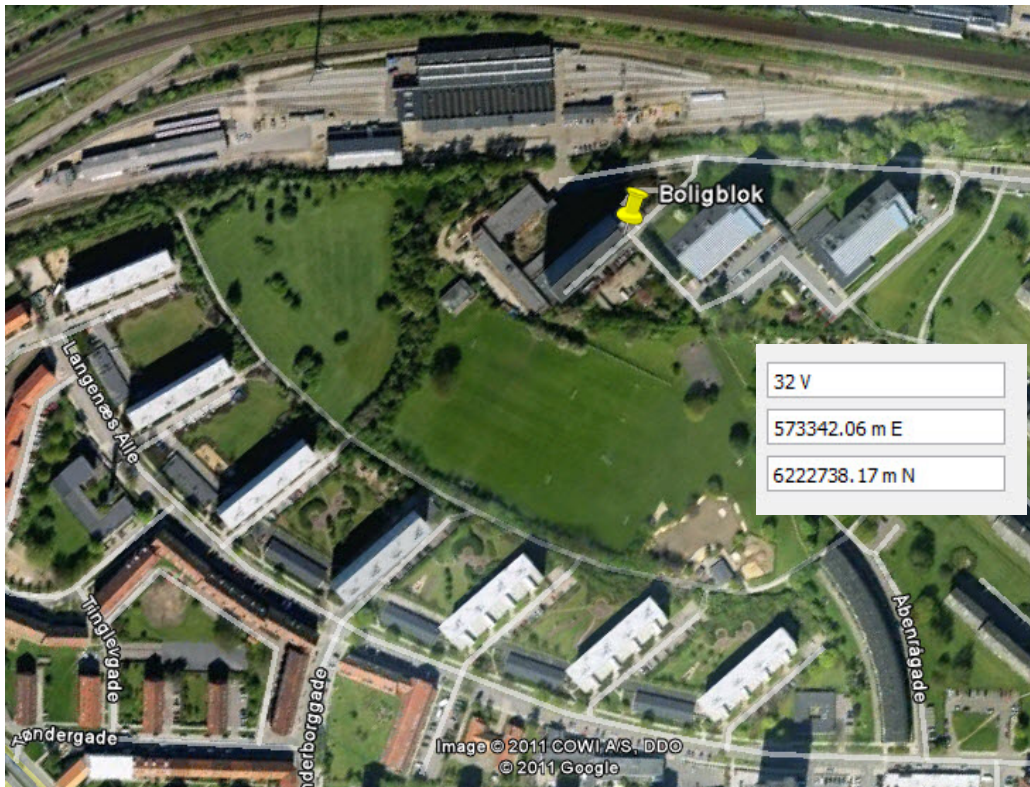


Mynd 11. Hluti af mynd 1 með 10 x þysjun. Með því að horfa vandlega sérðu öldubrjótana á ströndinni. Ef þörf krefur, getur þú þysjað inn í forritinu þínu.

Á hægri hlið myndarinnar sést í sjónvarpsmastur (Søsterhoj sendning mast) sem auðvelt er að staðsetja á korti. Á línunni í átt að turninum sést í enda öldubrjóts og talning gefur að sjötti öldubrjótur vinstra megin við þann fyrir framan turninn er staðsettur á línu að trénu. Ég vel þann stað sem punkt D.

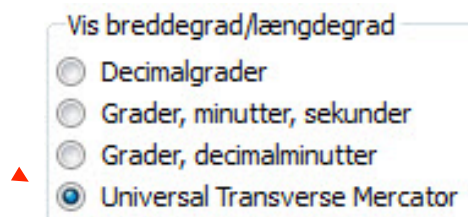
3.2 Hnit B og D

Blokkin sem ég ákvað að nota sem punkt B er fenginn með Google Earth eins og sést á mynd 12.



Mynd 12. Blokkirnar úr miðju mynd 10 með punktinn B merktann inn með Google Earth „nálinni“. Með því að hægri smella á „nálina“ og velja eiginleika (properties) getur þú lesið hnitin.

Les hnit B sem 32V 573342 6222738. Takið eftir að hægt er að stilla Google Earth þannig að það sýni UTM hnit.



Mynd 13. Hluti af valkostunum í Google Earth valmyndinni Functions > Settings....

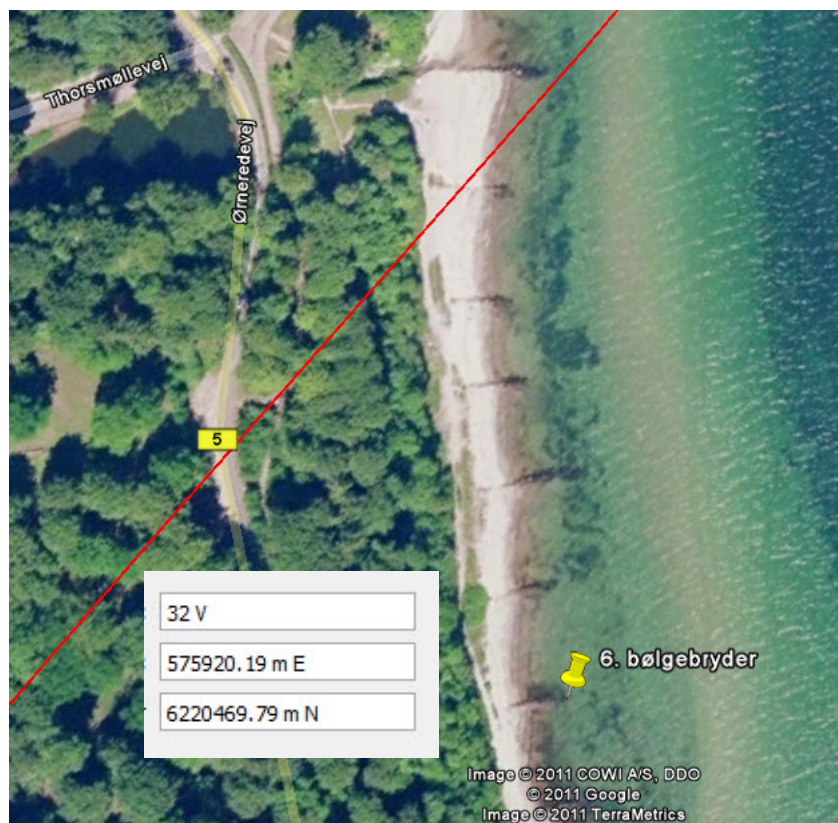
Á þessum tímamarki mun einhver spyrja: Ef þú getur fundið hnitin fyrir B í Google Earth hvers vegna finnur þú ekki hnit stóra trésins á sama hátt og sleppt öllum þessum leiðindum? Svárið við þessu er að í skóginum er ekkert Google Street View. Engar þrívíddarmyndir eru hér svo öll trén líta eins út horft ofan frá. Þú getur ekki fundið það. Þannig að með því að nota Google Earth þurfum við að halda okkur við punkta sem hafa auðkennanleg einkenni á kortunum.

Næsta skref er að finna öldubrjótinn úr mynd 11 á kortinu. Teiknaðu línu frá sjónvarpsturninum að punkti C í Marselisborg Marina. Það má gera með innbyggðum verkfærum í Google Earth.



Mynd 14. Hjálparlína til að staðsetja sjötta öldubríótinn úr mynd 11.

Skref nr. 2 er að þysja inn á ströndina eins og sést á mynd 15.



Mynd 15. Þysjað inn á mikilvægasta hluta myndar 14 og punkturinn D merktur inn við sjötta öldubríótinn með Google Earth nál. Grind með hnitum er bætt inn á.

Hnit öldubríótsins fæst sem 32V 575920 6220470

3.3 Að reikna skurðpunkt línanna, S

Fyrir utan að þurfa að klöngrast í gegnum skóginn til þess að snerta Stóra Tréð, þá var erfiðasti hluti verkefnisins að finna hnit A, B, C og D. Nú getum við notað aðferðina úr undirkafla 2.4 til þess að reikna út hnit skurðpunkts línanna, S.

$$A = (570900, 6225385) \leftarrow$$

$$B = (573342, 6222738) \leftarrow$$

$$C = (575805, 6222243) \leftarrow$$

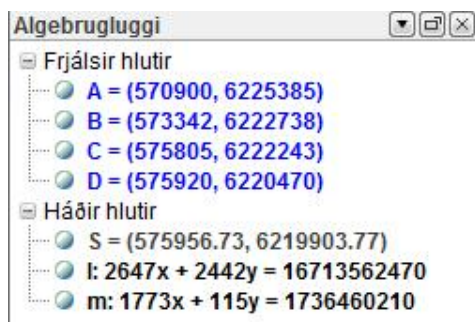
$$D = (575920, 6220470) \leftarrow$$

$$l = \text{Lína}[A,B] \leftarrow$$

$$m = \text{Lína}[C,D] \leftarrow$$

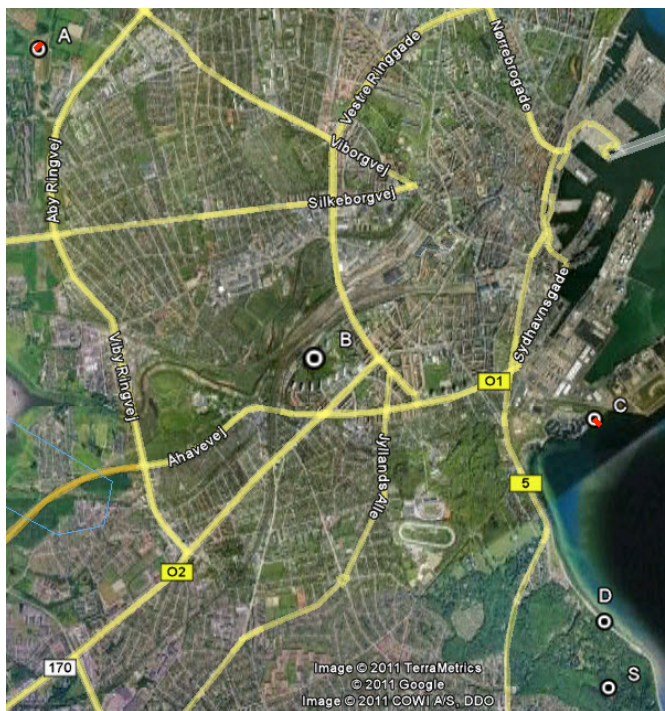
$$S = \text{Skurðpunktur}[l,m] \leftarrow$$

Mynd 16. Skurðpunktur línanna með aðferðinni úr mynd 7.



Mynd 17. Hluti af algebruglugganum úr GeoGebru.

Reikningar gefa hnit S sem (575957, 6219904)



Mynd 18. Línur gegnum AB og CD og skurðpunkturinn S á korti Google Earth.

4 Inn í skóginn

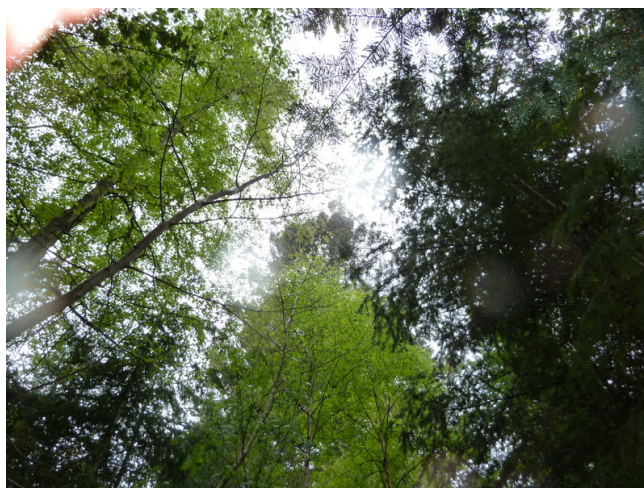
Nú er hægt að sannreyna niðurstöðuna við raunveruleikann. Hnitin er sett inn í GPS-tækið og ég legg af stað á hjólinu mínu og fylgi bendlinum á GPS-tækinu. Eftirfarandi myndasýrpa sýnir síðasta hluta ferðarinn.



Mynd 19. Síðasti hluti ferðarinnar að stóra trénu.
Síðasta myndin sýnir komuna að rótum trésins.



Mynd 20. GPS tækið sýnir að fjarlægðin frá rótum trésins að reiknaða skurðpunktinum er 16m.



Mynd 21. Meira að segja þegar þú stendur rétt undir trénu þá er ekki auðvelt að sjá hve mikið það stendur upp úr nágrannatrjám sínum. Aðeins úr fjarlægð getur þú séð raunverulegan mun á Stóra Trénu og afganginum af skóginum. – Sjá mynd 1 og mynd 11.

Les hnit Stóra Trésins sem 32V 575954 6219919. Með því að slá þessar tölur inn í GeoGebra er mögulegt að reikna fjarlægðin milli S og trésins T.



Mynd 22. Reikna fjarlægðina $d = |ST|$ milli reiknaða skurðpunktsins S og Stóra Trésins með hnitunum sem fengust af GPS tækinu við rætur trésins.

Reikningar gefa fjarlægðina $d = 15.5$ m í samræmi við mynd 21.

Tilvísanir

- [1] Ulovec, A.: GeoCaching - Hvernig skal finna eitthvað með notkun gervihnatta (Þarf að bæta við hlekk að DynaMAT síðunni)
- [2] Andersen, J.: GPS-rúmfræði í landslaginu (Þarf að bæta við hlekk að DynaMAT síðunni)
- [3] <http://www.google.com/earth/index.html> (Nóvember 2011)
- [4] <http://www.garmin.com/garmin/cms/cache/offonce/us/maps/tripplanningsoftware/mapsources> (Nóvember 2011)