Der Große Baum

John Andersen

In diesem Kapitel werden Methoden der analytischen Geometrie verwendet um ein Objekt in der Welt außerhalb des Klassenzimmers zu lokalisieren. Der Großteil des mathematischen Hintergrunds ist im zweiten Abschnitt zusammengefasst. Dabei wird nur ein Teil des Curriculums der zweiten Unterstufenklasse des Gymnasiums benötigt. Was diese Aufgabe jedoch anspruchsvoll macht, ist die Verschiebung des Szenariums vom Klassenzimmer in die Umgebung der Stadt Aarhus. Daher muss man sich wirklich für die Aufgabe engagieren um fokussiert zu bleiben.

Die verwendeten Werkzeuge sind unter anderem ein GPS System, Google Earth, die dynamische Geometrie Software GeoGebra, und eine digital Kamera, um die wichtigsten zu nennen.

1 Das Hauptproblem: Den großen Baum lokalisieren

Von vielen Plätzen in und in der Umgebung von Aarhus, DK, kann man einen hohen Baum in dem Wald im Süden der Stadt sehen der die anderen Bäume sichtlich überragt. Aber wenn man durch den Wald wandert kann man diesen Baum nicht entdecken, da die herausragende Baumkrone durch den Rest des Waldes verdeckt wird.

Ein Freund hat eines Tages im Frühling als wir bei einer Tasse Kaffee in einem Café bei der Marselisborg Marina saßen meine Aufmerksamkeit auf den Baum gelenkt. Er hat mir erzählt, dass er mit einigen SchülerInnen einen Wettbewerb veranstaltet hat den Baum zu finden. Über die Details der Suche haben wir uns nicht näher unterhalten.

Nachdem ich die Geschichte etwas reflektiert hatte, stieg meine Neugier es selbst auszuprobieren um die mathematischen Möglichkeiten die mit dieser Aufgabe verbunden sind zu erkunden.

Abb. 1 Die Sicht Richtung Süden vom Hafendamm bei Marselisborg Marina, Aarhus, DK.

Ein vergrößerter Ausschnitt des Bildes, das den Baum zeigt, ist eingefügt.

Zu dieser Zeit unterrichtete ich am LehrerInnenbildung Institut in Aarhus meine StudentInnen in analytischer Geometrie. Vielleicht ist das der Grund warum meine Gedanken in Richtung

Schnittgeraden und Koordinatensystem gelenkt wurden. Ich wollte einen Weg wählen die Aufgabe anzugehen, welche meinen zukünftigen Unterricht inspirieren könnte.

Im Anschluss werde ich eine Beschreibung einiger verschiedener Möglichkeiten ein klassisches Problem der analytischen Geometrie auf einem Level des Curriculums der Unter- und Oberstufe des Gymnasiums zu bearbeiten.

2 Eine klassische Aufgabenstellung der analytischen Geometrie

Das Problem

Die Punkte A, B, C und D sind durch die kartesischen Koordinaten A(1,3), B(5,2), C(2,7) und D(4,6) vorgegeben. Die Geraden l und m sind durch AB bzw. CD festgelegt. Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden.

2.1 Die traditionelle Papier und Stift Lösung

Man zeichnet zwei Achsen auf ein Blatt kariertes Papier und zeichnet die Punkte A, B, C und D ein. Zeichne die Geraden l und m ein. Dann stoppst du. Oh nein! – Der Schnittpunkt liegt außerhalb des Papiers.

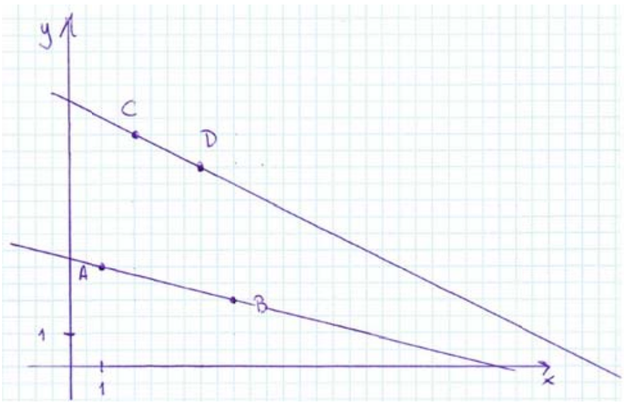

Abb. 2 Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden l und m.

Erster Versuch: Misserfolg durch schlechte Zeichnung.

Einige SchülerInnen könnten denken, dass Mathematik ein blödes Fach ist da solche Dinge immer wieder passieren. Aber das ist Teil des Spiels. Man muss einige Dinge versuchen, wieder rückgängig machen und wieder versuchen. Es gibt keinen Ausweg zu lernen und Mathematik auszuüben. Ein neuer Versuch muss unternommen werden unter Anbetracht des ersten Versuchs. Du drehst ein neues Blatt Papier um 90° gegen den Uhrzeigersinn und versuchst es erneut.

Wie wir in Abschnitt 2.3 sehen werden, hilft uns Technologie die unangenehmen Seiten des Wiederholens, wenn wir mit Mathematik experimentieren, zu umgehen.

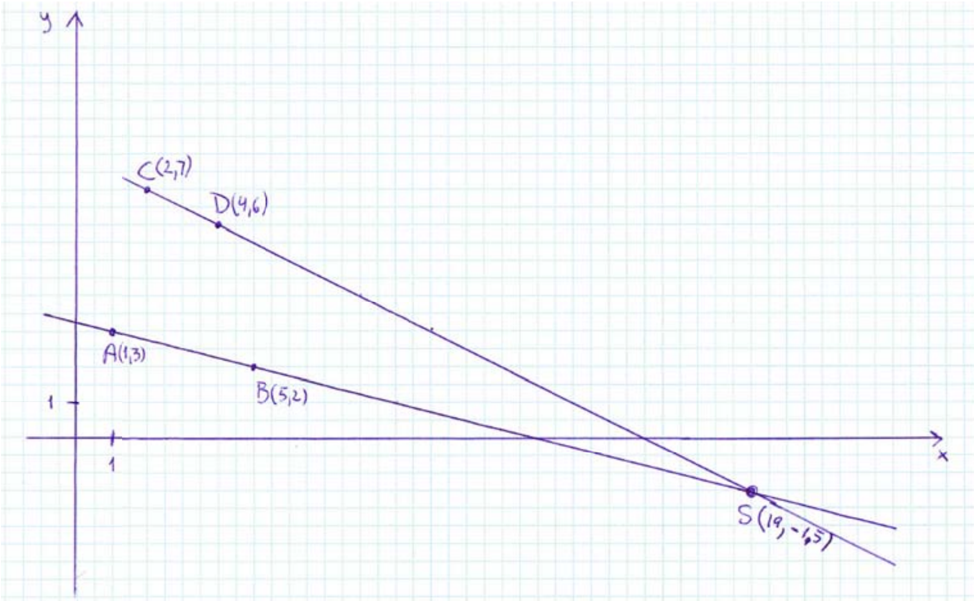

Abb. 3 Bestimmung des Schnittpunktes.

Das erneute Zeichnen des Koordinatensystems auf einem neuen Blatt Papier bringt den Erfolg.

Dieses Mal bist du erfolgreich. An den Koordinaten kann man den Schnittpunkt S(19,-1.5) ablesen. Zumindest wenn du auf den nächsten Gitterpunkt rundest- und wenn du schöne Zahlungen bei Aufgaben gewohnt bist, dann ist das wahrscheinlich das, was du tun wirst ☺.

2.2 Klassische Lösung durch Algebra: Lösung von Gleichungen

Auf einem etwas fortgeschrittenen Level, aber noch immer im Rahmen der Unterstufe des Gymnasiums, kannst du zwei Gleichungen für die beiden Geraden aufstellen und sie nach x und y lösen. Abb. 4 zeigt einen authentischen Entwurf diese Aufgabe zu lösen.

$A(1,3) \quad B(5,2)$

$l: \ y = \alpha_l x + q_l$

$\alpha_l = \frac{2-3}{5-1} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x + q_l$

$q_l = 2 - \left(-\frac{1}{4}\cdot 5\right) = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$

$l: \ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$

$C(2,7) \quad D(4,6)$

$m: \ y = \alpha_m \cdot x + q_m$

$\alpha_m = \frac{6-7}{4-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + q_m$

$q_m = 6 - \left(-\frac{1}{2}\cdot 4\right) = 8$

$l: \ y = -\frac{1}{2}x + 8$

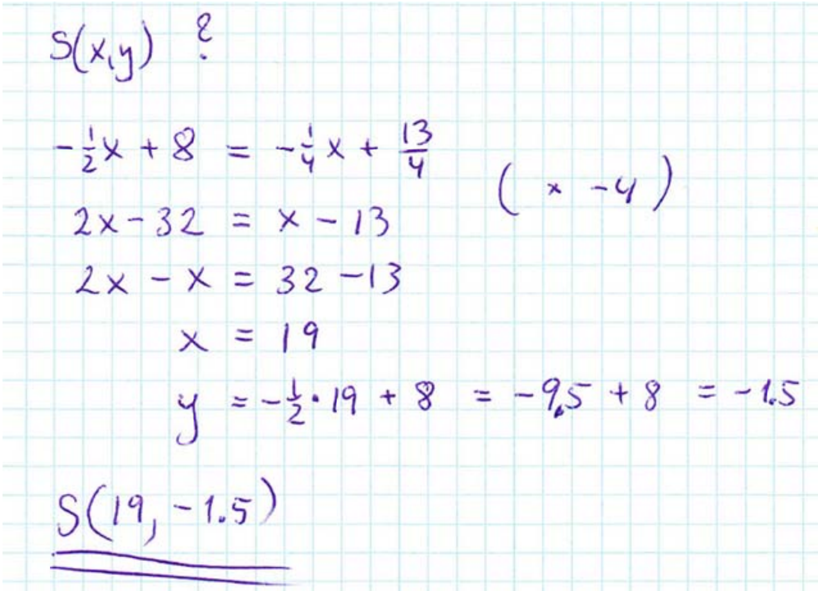

Abb. 4. Algebraische Lösung wie in den guten alten Tagen.

Aufgrund der schönen Zahlen kann diese Aufgabe ohne zu viel Aufwand gelöst werden, obwohl einige 15-jährige Kinder diese Aufgabe schon als eine kleine Herausforderung betrachten würden.

2.3 Lösung mit Hilfe dynamischer Geometrie Software

Die Verwendung einer dynamischen Geometrie Software wie etwa GeoGebra macht das Zeichnen um einiges leichter und genauer, und man erspart sich zusätzlich Probleme beim skalieren und mit dem Platz am Papier.

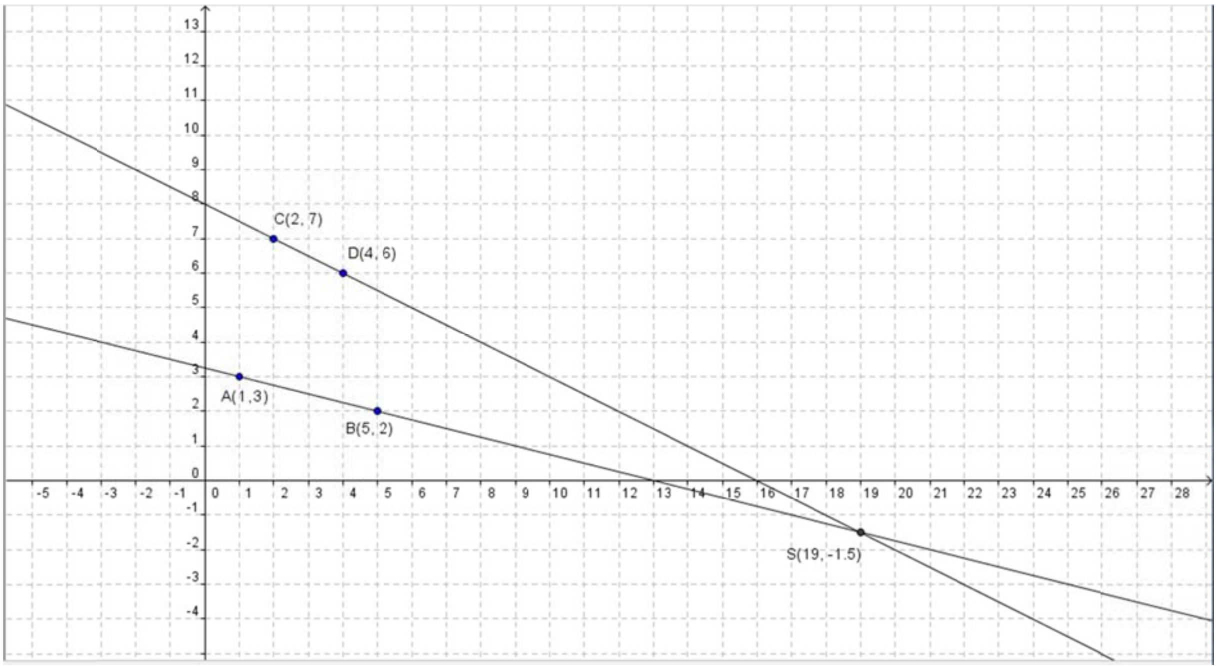

Abb. 5 Teil des Fenster, in welchem GeoGebra den Schnittpunkt der Geraden ermittelt.

Eingebaute GeoGebra Werkzeuge beziehen ihre Daten aus algebraischen Methoden Computerintern. Der Benutzer braucht nichts über Algebra zu wissen, obwohl die Präzision von Abschnitt 2.2 erhalten bleibt durch die Aktivierung der betreffenden Werkzeuge und durch Klicken des Mauszeigers. Die Details werden an dieser Stelle weggelassen, da in einem anderen Teil des Buches GeoGebra genauer behandelt wird. Das Konstruktionsprotokoll unterhalb soll eine Idee über das Prozedere vermitteln.

Construction Protocol

File View Help

No.	Name	Definition	Value
1	Point A		A = (1, 3)
2	Point B		B = (5, 2)
3	Point C		C = (2, 7)
4	Point D		D = (4, 6)
5	Line m	Line through C, D	m: y = -0.5x + 8
6	Line l	Line through A, B	l: y = -0.25x + 3.25
7	Point S	Intersection point of m, l	S = (19, -1.5)
8	Text tekst1	"A" + A	tekst1 = "A(1, 3)"
9	Text tekst2	"B" + B	tekst2 = "B(5, 2)"
10	Text tekst3	"C" + C	tekst3 = "C(2, 7)"
11	Text tekst4	"D" + D	tekst4 = "D(4, 6)"
12	Text tekst5	"S" + S	tekst5 = "S(19, -1.5)"

Abb. 6 Konstruktionsprotokoll von Abb. 5.

Versuche es selbst in GeoGebra.

2.4 Nur berechnen- zeichnen wird sekundär

Software wie GeoGebra bietet Funktionen welche es möglich machen jeglichen Input und Output in algebraischer Form vorzunehmen. Das kann von Vorteil sein, wenn die graphische Darstellung schwierig wird aufgrund z.B. hoher Zahlen.

Unten in Abb.8 sieht man, was in die Input Zeile in GeoGebra eingegeben werden muss um das Problem der Schnittgeraden zu lösen. (↵ entspricht dem drücken der Eingabe Taste).

A = (1,3)↵

B = (5,2) ↵

C = (2,7) ↵

D = (4,6) ↵

l = Line[A,B] ↵

m = Line[C,D] ↵

S = Intersect[l,m] ↵

Abb. 7 Die Eingaben die in der Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes resultieren.

Construction Protocol

File View Help

No.	Name	Definition	Value
1	Point A		A = (570900, 6225385)
2	Point B		B = (573342, 6222738)
3	Point C		C = (575805, 6222243)
4	Point D		D = (575920, 6220470)
5	Line l	Line through A, B	l: 2647x + 2442y = 167135...
6	Line m	Line through C, D	m: 1773x + 115y = 173646...
7	Point S	Intersection point of l, m	S = (575956.73, 6219903.7...

Abb. 8 Konstruktionsprotokoll das man als Resultat der Eingaben aus Abb. 8 erhält.

3 Lokalisierung des großen Baumes

Die Theorie hinter dieser Methode: Wenn ich einen passenden Punkt A finde von welchem man den Baum sehen kann und dann einen Punkt B wähle auf der Geraden von A zum Baum und dann das gleiche Verfahren für die Punkte C und D anwende, und zwei Geraden durch die Punkte A und B bzw. C und D auf der Karte ziehe, welche den Baum als Schnittpunkt der beiden Linien ermitteln sollen.

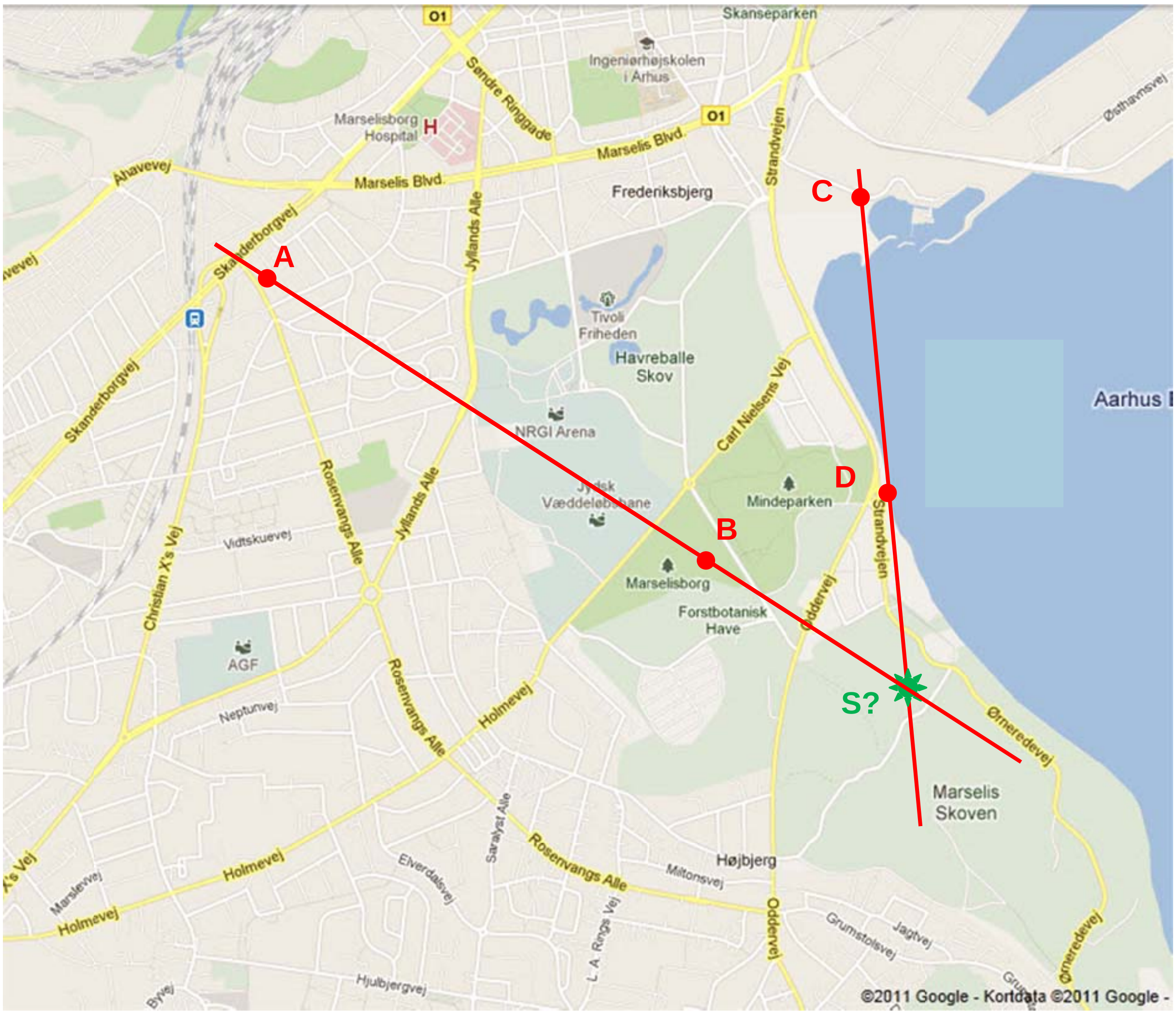

Abb. 9 Reflexionen zur Methode der Lokalisierung des Baumes – Siehe auch Abb. 3.

Ich entscheide mich für die Benutzung meines handliches GPS System um die UTM Koordinaten der Punkte zu messen. Im Anschluss kann ich den Schnittpunkt S mit Hilfe der Methode im Abschnitt 2.4. Weitere GPS Systeme sind in [1] zu finden und in [2] ist mehr über UTM Koordinaten und analytische Geometrie zu finden. Ich empfehle diese Kapitel als Vorbereitung oder als Begleitung für das Folgende.

3.1 Die Punkte A, C und ihre Koordinaten.

Im nordwestlichen Teil von Aarhus befinden sich einige Hügel mit einer wirklich guten Aussicht über die Stadt und ihre Umgebung. Die Spitze des höchsten Hügels bildet den gewählten Punkt A. Die Sicht in Richtung Südosten von diesem Punkt aus ist in Abb.11 zu sehen.

Abb. 10 Sicht in Richtung Südosten vom höchsten Hügel in Hasle Hill im Nordwestlichen Teil von Aarhus. (10 x Optischer Zoom)

Auf dem GPS System lese ich die Koordinaten 32V 570900 6225385. Gemeinsam mit A benötige ich einen Punkt B auf der Geraden in Richtung des Baumes. Es wirkt so als ob der nordöstliche Teil des hohen Gebäudes direkt in der Mitte des Bildes passt, und daher versuche ich das Gebäude zu lokalisieren und so die Koordinaten abzulesen. Mehr über diesen Teil in Abschnitt 3.2.

Für meinen Punkt C wähle ich den Hafendamm in Marselisborg Marina, den Ort wo ich zum ersten Mal mit diesem Problem konfrontiert wurde. Die Aussicht ist in Abb. 1 zu sehen.

Die abgelesenen Koordinaten sind 32V 575805 6222243. Die Lokalisierung eines passenden Punktes D ist etwas schwierig. Dank eines Fernglases und dem Zoom meiner Kamera, konnte ich einige Details auf dem Strand vor dem Wald entdecken, wie in Abb. 12 zu sehen ist.

Abb. 11 Ausschnitt von Abb. 1 mit 10 x Optischen Zoom. Wenn man genau hinsieht entdeckt man Hafendämme entlang des Strandes. Wenn notwendig hilft das Zoomwerkzeug im Reader.

Auf der rechten Seite des Bildes ist ein TV Sendermast zu sehen (Søsterhøj Sendermast) welcher leicht auf der Karte lokalisiert werden kann. Auf der Linie in Richtung dieses Masten findet man das Ende eines Hafendamms und durch nach nachzählen sieht man, dass der Wellenbrecher Nummer sechs links von dem vor dem Sendermast auf der Linie in Richtung des Baumes liegt. Ich habe das für meinen Punkt D gewählt.

3.2 Die Koordinaten von B und D

Der Wohnungsblock den ich für meinen Punkt B gewählt habe findet man auf Google Earth, vgl. Abb. 13.

Abb. 12 Der Wohnungsblock im Zentrum von Abb. 11 mit dem Punkt B markiert mit einer Google Earth „Stecknadel". Mit einem Rechtklick auf die „Stecknadel" mit der Auswahl Eigenschaften kann man die Koordinaten ablesen.

Die Koordinaten für B sind 32V 573342 6222738. Beachte, dass Google Earth auch auf UTM Koordinaten Modus umgestellt werden kann.

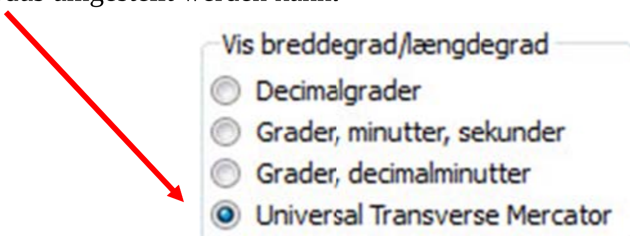

Abb. 14 Ausschnitt aus den Optionen in dem Google Earth Menü Funktionen > Einstellungen…

An diesem Punkt könnte man Fragen: Wenn man die Koordinaten für B in Google Earth ablesen kann, warum liest man dann nicht auch die Koordinaten des hohen Baumes mit derselben Methode ab und vermeidet so die ganzen Umstände? Die Antwort zu dieser Frage ist, dass in den Wäldern keine Google Street View existiert. Es gibt keine 3D Aufnahmen und alle Bäume sehen von oben gleich aus. Du kannst den Baum nicht finden. Daher müssen wir um Google Earth benutzen zu können uns an Punkte halten die Eigenschaften aufweisen sodass wir sie auf der Karte erkennen können.

Als nächsten Schritt gilt es den Hafendamm aus Abb.12 auf der Karte zu lokalisieren. Danach zieht man eine Linie auf der Google Earth Karte von dem TV Sendemast zum Punkt C in Marselisborg Marina. Das kann durch in Google Earth integrierte Werkzeuge gemacht werden.

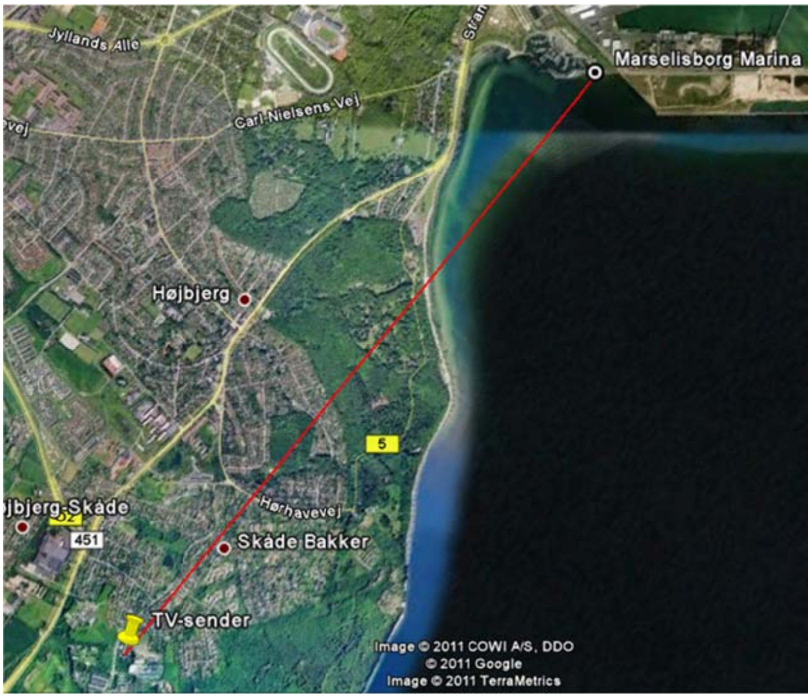

Abb. 15 Hilfslinie für das Lokalisieren des Hafendamms Nr. 6 in Abb. 12.

Schritt Nr. 2 ist es einen Zoom am Strand zu machen wie gezeigt in Abb. 16.

Abb. 16 Zoom auf den wichtigen Ausschnitt in Abb. 15 und Markierung des Punktes D bei Hafendamm Nr. 6 mit einer Google Earth „Stecknadel“. Ein Rahmen mit den Koordinaten wird eingefügt.

Die Koordinaten des Hafendamms sind 32 V 575920 6220470.

3.3 Berechnung des Schnittpunktes S der Geraden

Neben dem ersten Versuch den Baum durch Wandern durch den Wald zu finden, scheint das Finden der Koordinaten der Punkte A, B, C und D der schwierigste Teil zu sein. Nun können wir die Methode von Abschnitt 2.4 verwenden um die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden zu berechnen.

A = (570900 6225385)↵

B = (573342 6222738) ↵

C = (575805 6222243) ↵

D = (575920,6220470) ↵

l = Line[A,B] ↵

m = Line[C,D] ↵

S = Intersect [l,m] ↵

Abb. 17 Der Schnittpunkt der Linien nach der Methode in Abb. 8

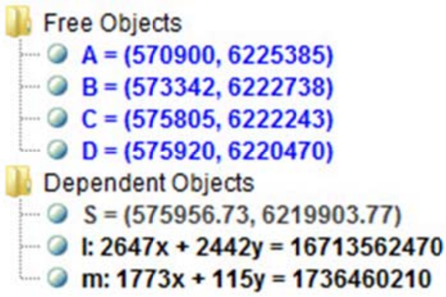

Abb. 18 Ausschnitt des Algebra Fensters in GeoGebra.

Die Berechnung der Koordinaten für S liefert (575957, 6219904).

Abb. 19 Die Geraden durch AB und CD und der Schnittpunkt S in der Google Earth Karte.

4 Ab in den Wald

Nun muss das Resultat in der Realität überprüft werden. Die Koordinaten ins GPS System eingegeben steige ich auf mein Fahrrad lasse mir durch das GPS Gerät den Weg weisen. Die folgende Collage zeigt den letzten Teil meiner Reise.

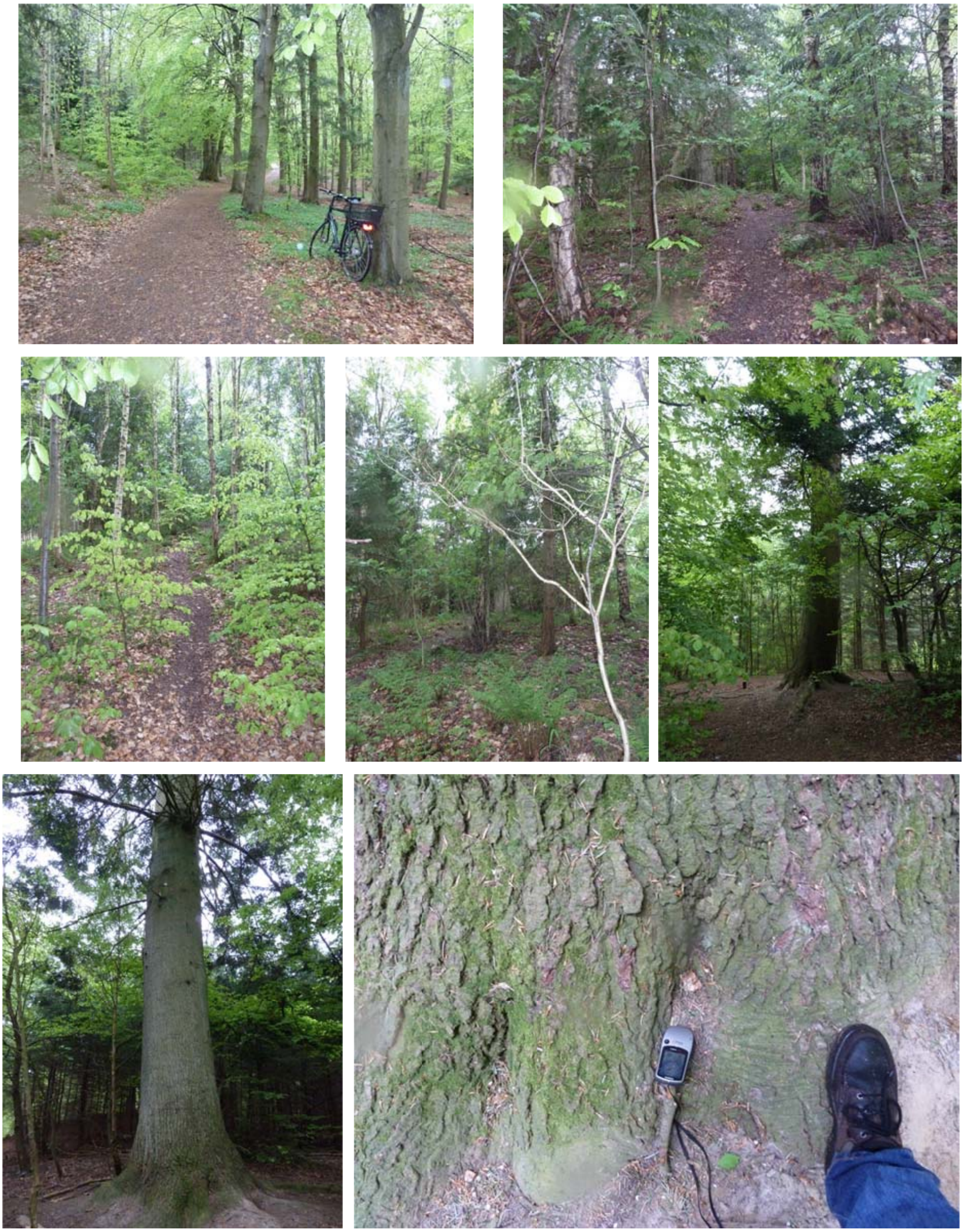

Abb. 20 Der letzte Teil meiner Reise zum großen Baum.

Das letzte Bild zeigt meine Ankunft am Fuß des Baumes.

Abb. 21 Das GPS System zeigt eine Distanz von 16m vom Fuß des großen Baumes zum errechneten Schnittpunkt S.

Abb. 22 Selbst wenn man direkt unter dem Baum steht ist es nicht zu erkennen um wie viel der Baum die benachbarten Bäume überragt. Nur aus der Entfernung kann man die wahren Unterschied zwischen dem hohen Baum und den Rest des Waldes sehen. – Siehe Abb. 1 and Abb. 11

Die Koordinaten des hohen Baumes sind 32V 575954 6219919. Die Eingabe dieser Koordinaten in GeoGebra macht es möglich die Distanz zwischen S und dem Baum T zu berechnen.

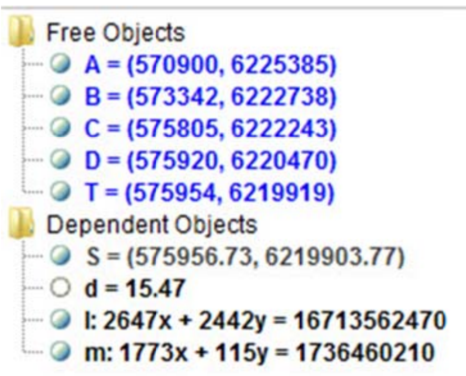

Abb. 23 Berechnung der Distanz |ST| zwischen dem Schnittpunkt S und dem hohen Baum T mit den abgelesenen Koordinaten des GPS Systems am Fuß des Baumes.

Ergebnis des Berechnung der Distanz d = 15,5 m wie in Abb. 21.

Literatur

[1] Ulovec, A.: Geocaching - how to find something using satellites (Link to DynaMAT homepage has to be supplied)

[2] Andersen, J.: GPS-geometry in the landscape (Link to DynaMAT homepage has to be supplied)

[3] http://www.google.com/earth/index.html (November 2011)

[4] http://www.garmin.com/garmin/cms/cache/offonce/us/maps/tripplanningsoftware/mapsource (November 2011)