Um setningu Napóleons

Vladimir Georgiev
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson og Freyja Hreinsdóttir

1 Setning Napóleons: smá saga

Þekkt er að Napóleon var áhugamaður um stærðfræði, meðal vina hans var Ítalski stærðfræðingurinn Lorenzo Mascheroni sem kynnti til sögunnar takmarkanir þess að nota einungis hringfara (enga réttskeið) við gerð rúmfræðiteikninga. Eitt af viðfangsefnum Napóleons fólst í því að staðsetja miðju gefins hrings með því að nota einungis hringfara. Þetta verkefni (sem ekki hefur augljósa lausn), er ekki megintilgangur umræðu okkar í þessum kafla heldur nefnum við það því svona verkefni tengdust lausn hagnýtra verkefna á endurreisnartímabilinu (1300 - 1600). Uppfinningar og uppgötvanir endurreisnartímabilsins eru meðal annars:

- Vélræn klukka;
- Stórskotaliðstækni, eldflaugar kynntar af verkfræðingnum William Congreve;
- Prentsmiðjan, vélin var fundin upp árið 1440 af Johann Gutenberg frá Þýskalandi;
- Áttaviti, fyrst notaður af kínverska sæfaranum Zheng He (1371-1435);
- Smásjá, Hans Janssen þróaði fyrstu samsettu smásjána árið 1590;
- Veggfóður, fyrsta pappírsmyllan var byggð í Englandi árið 1496;
- Kafbátur, hönnun kafbáts var búin til af Leonardo Da Vinci. Afturámóti var það Cornelius van Drebbel sem uppgötvaði kafbátinn árið 1624;
- Eldspýtan, uppgötvun gerð árið 1680 af Robert Boyle;
- Gleraugu, Ítalski uppfinningamaðurinn Salvino D'Amate þróaði elsta form gleraugna árið 1284.

Mikilvægi þessara uppgötvana og þeirrar staðreyndar að þær gjörbreyttu lífi fólks útskýrir hvers vegna sum mikilvæg stærðfræðiverkefni þessa tíma tengjast hagnýtum atriðum.

Annað dæmi frá þessu tímabili: P. Fermat (1601 - 1665) skoraði á Evangelista Torricelli (1608 - 1647), manninn sem uppgötvaði loftvogina, að svara eftirfarandi spurningu:

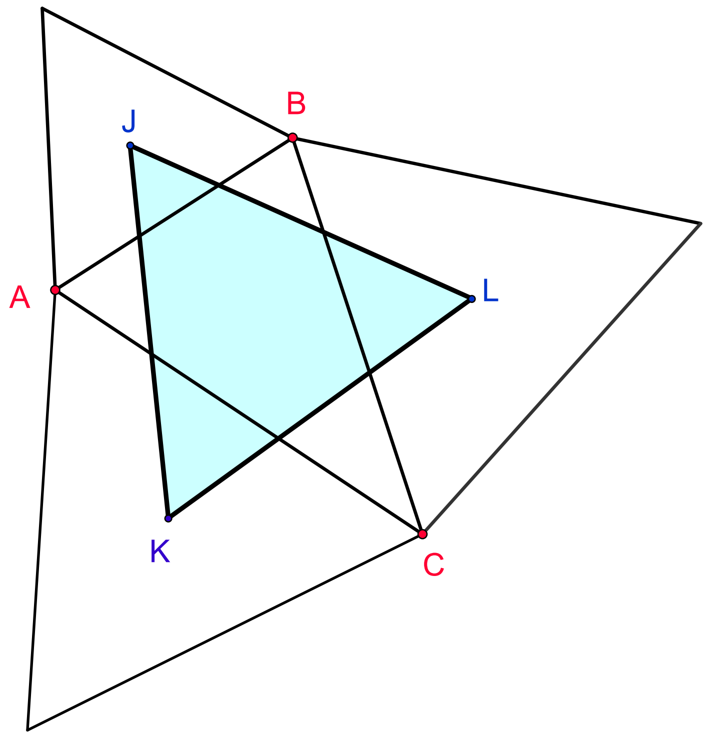
- Finndu punkt í planinu þannig að summa fjarlægða hans frá hornpunktum þríhyrnings sé í lágmarki.

Torricelli setti fram nokkrar lausnir á þessu verkefni. Í einni þeirra tók hann eftir því að ef jafnhliða þríhyrningar eru teiknaðir á allar hliðar þríhyrnings þá skerast umritaðir hringir þessara þríhyrninga í einum punkti (nú þekktur sem „punktur Fermats”).

Merkilegar stærðfræðisetningar hafa verið eignaðar Napóleon Bónaparte (1769 - 1821) þó tengsl hans við sannanirnar og lausnir verkefnanna séu dregin í efa í flestum tiltækum heimildum. Þrátt fyrir það blómstraði stærðfræðin í Frakklandi eftir byltinguna og var í hávegum höfð í nýja keisaradæminu. Laplace var innanríkisráðherra í stjórn Napóleons.

Eftirfarandi yrðing (þekkt sem setning Napóleons) er nátengd dæmi Fermats (sjá [12]), sem kynnt var hér að ofan.

Aðalsetning 1. *(Setning Napóleons) Á hverja hlið í gefnum þríhyrningi er búin til jafnhliða þríhyrning. Miðjur þessara jafnhliða þríhyrninga mynda hornpunkta í jafnhliða þríhyrningi.*



Mynd 1: Setning Napóleons

Það er svo sannarlega mjög óvænt að lögun þríhyrningsins sem myndast er ekki háð lögun upprunalega þríhyrningsins. Aftur á móti virðist þetta vera háð lögun viðbættu þríhyrninganna: hann er jafnhliða þegar þeir síðarnefndu eru jafnhliða.

Þetta er upphafspunktur okkar. Aðalmarkmið okkar er að þróa kennsluefni sem ásamt notkun GeoGebru nýtist:

- í námskeiðum fyrir verðandi og starfandi kennara
- við kennslu

Við höfum áhuga á að rannsaka setningu Napóleons meðal annars vegna þess að hún er ekki mjög vinsæl meðal ítalskra stærðfræðikennara og hvorki þeir né verðandi kennarar og stærðfræðinemar hafa hugmynd um tilvist hennar.

2 GeoGebra notuð til að skoða setningu Napóleons

Við notum GeoGebru því það er einfalt að búa til mynd þannig að hægt sé að hreyfa punktana A, B og C (sem eru hornpunktar í almennum þríhyrningi).

GeoGebruskráin var búin til í samvinnu við nemandann Sara Leal Venegas meðan vinna stóð yfir í stærðfræðistofunni „Verkefnamyndun" sem haldin var vorið 2011 í Pisa.

Sem fyrsta dæmi um spurningar sem spyrja má með því að nota kvika forritið er eftirfarandi:

- Má búast við því að hlutfall flatarmála þríhyrninganna $\triangle JKL$ og $\triangle ABC$ sé fasti?

Það má auðveldlega kanna þessa „tilgátu" með GeoGebru forritinu. Með því að færa punktinn A þannig að það stefni í að punktarnir A, B, C séu á sömu línu, getur maður auðveldlega séð að festa má flatarmál $\triangle JKL$ meðan flatarmál $\triangle ABC$ stefnir á 0. Niðurstaðan er því að tilgátan sé ekki sönn.

Önnur spurning sem má tengja við þá að ofan er:

- Hvernig er hægt að finna flatarmál þríhyrnings $\triangle JKL$ eða sem jafngild spurning, hvernig er hægt að finna lengd hliðar á jafnhliða þríhyrningum $\triangle JKL$?

Þetta sýnidæmi sýnir hvernig maður getur „hoppað" úr GeoGebru forritinu í verkefni sem er meira óhlutbundið og þarfnast hreinnar stærðfræðilegrar rökhugsunar og reikninga án upplýsingatækni til að leysa.

Í vinnustofunni komu einnig upp eftirfarandi viðfangsefni sem tengjast setningu Napóleons:

- Getur maður skipt út smíði jafnhliða þríhyrninganna með svipaðri smíði ferninga?
- Getur maður búist við alhæfingu af setningu Napóleons með því að skipta út upphaflega þríhyrningnum fyrir ótiltekinn ferhyrning?

Svarið við fyrstu spurningunni fékkst mjög fljótt með því að nota GeoGebru, sjá mynd 2.

Með því að láta punktinn B nálgast punktinn A fæst að þríhyrningurinn $\triangle KLJ$ (sjá mynd 3) nálgast rétthyrndan þríhyrning sem er þá ekki jafnhliða.

Með því að nota sama GeoGebruskjal sést að miðjur þríhyrninganna ABC og JKL virðast falla saman. Þetta má sýna fram á með því að nota tvinntölur sem svara til hornpunkta þríhyrninganna, sjá dæmi 5 í Viðauka um tvinntölur og rúmfræði.

$$l = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) b + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) c, \quad k = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) c + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) a, \tag{1}$$

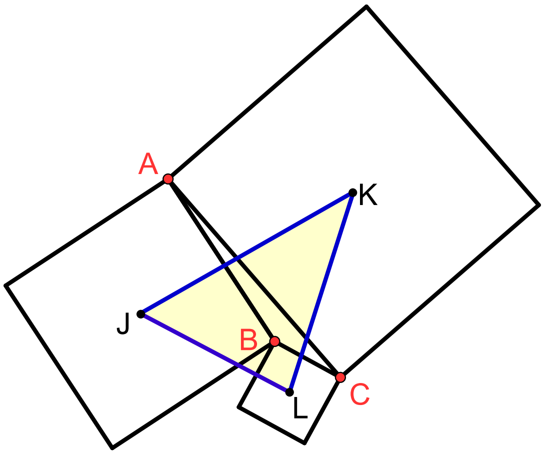
$$j = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) a + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) b. \tag{2}$$

Nú er auðvelt að sjá að

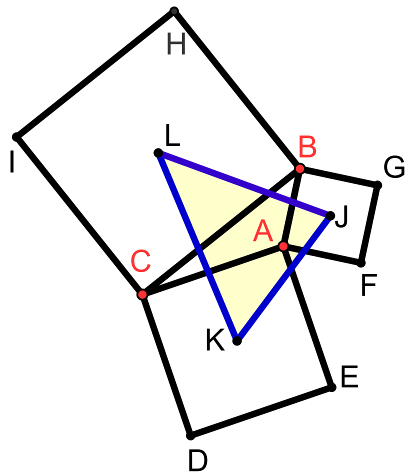
$$l + k + j = a + b + c$$

svo þungamiðjur þríhyrninganna $\triangle ABC$ og $\triangle LKJ$ falla saman.

Þar sem allir þríhyrningarnir $\triangle BCL$, $\triangle CAK$ og $\triangle ABJ$ eru rétthyrndir jafnarma þríhyrningar, þ.e. armarnir tveir (og samsvarandi horn þeirra) eru jöfn er eðlilegt að varpa fram með eftirfarandi „ströngu" spurningu:



Mynd 2: Mynd úr Geogebru þar sem þríhyrningunum hefur verið skipt út fyrir ferninga í setningu Napóleons



Mynd 3: Mótdæmi fyrir alhæfingu á setningu Napóleons

- Er hægt að finna þrjá punkta A, B, C með $A \neq B \neq C \neq A$ þannig að A, B, C eru ekki punktar á sömu línunni og þannig að $\triangle LKG$ sé rétthyrndur jafnarma þríhyrningur?

Nákvæma svarið (gefið til kynna af GeoGebru hermuninni hér á undan) er eftirfarandi.

Hjálparsetning 1. *Ef A, B, C eru þrír punktar á plani þ.a. $A \neq B \neq C \neq A$ og þeir eru ekki punktar á sömu línu, þá er $\triangle\, LKG$ ekki rétthyrndur jafnarma þríhyrningur.*

Sönnun. Ef við gerum ráð fyrir að $\triangle\, JKL$ sé rétthyrndur jafnarma þríhyrningur, þá höfum við venslin

$$j = \frac{1 \mp i}{2} l + \frac{1 \pm i}{2} k.$$

Með því að stinga inn (1) og (2) í þessa jöfnu fáum við

$$\frac{i}{2}(a - b) = 0$$

sem leiðir til mótsagnar. □

Önnur spurning sem varpa má fram er

- Er hægt að finna þrjá punkta A, B, C með $A \neq B \neq C \neq A$ þ.a. A, B, C eru ekki punktar á línu og þannig að $\triangle\, LKJ$ sé jafnhliða þríhyrningur?

Hægt er að nota hjálparsetningu 2 og leysa eftirfarandi.

Dæmi 1. *Ef A, B, C eru þrír mismunandi punktar sem liggja ekki á línu, þá er $\triangle\, LKJ$ er jafnhliða ef og aðeins ef $\triangle\, ABC$ er jafnhliða.*

Áhugaverðara verkefni er að finna öll tilvik þegar eina forsendan um $\triangle\, LKJ$ er að hann sé rétthyrndur. Við getum sett fram eftirfarandi tilgátu sem hefur verið prófuð með GeoGebru hermun.

Setning 1. *Ef A, B, C eru þrír punktar mismunandi punktar sem liggja ekki á línu, þá er $\sphericalangle LJK = 90^0$ ef og aðeins ef A er á hliðinni LJ og B er á hliðinni KJ .*

Sönnun. Við tökum ótiltekinn þríhyrning $\triangle\, ABC$ sem er réttsælis áttaður, til dæmis (sjá mynd 4). Við gerum þá ráð fyrir að punktarnir L, K, J (þungamiðjur ferninganna) séu þannig að $\triangle\, BCL$, $\triangle\, CAK$ og $\triangle\, ABJ$ séu réttsælis áttaðir. Við getum þá beitt dæmi 7 og ályktað að eftirfarandi jöfnur gildi:

$$l = \frac{1 - i}{2} c + \frac{1 + i}{2} b,$$
$$k = \frac{1 - i}{2} a + \frac{1 + i}{2} c,$$
$$j = \frac{1 - i}{2} b + \frac{1 + i}{2} a.$$

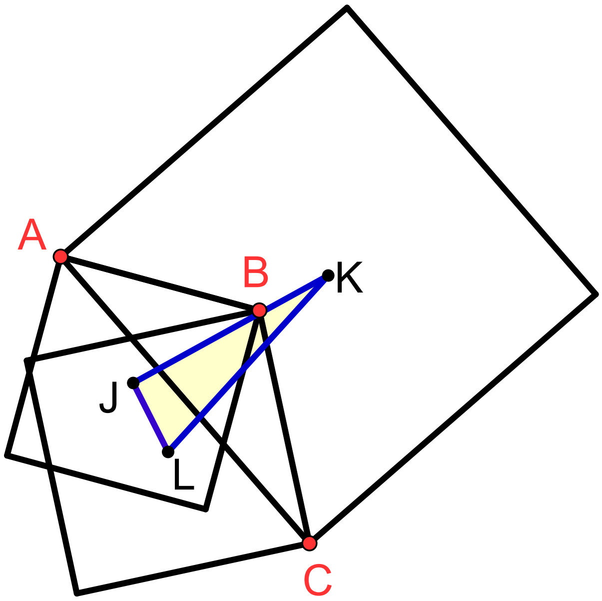
Skilyrðið $\sphericalangle LJK = 90^0$ þýðir að (sjá dæmi 6)

$$j = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2} l + \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2} k$$

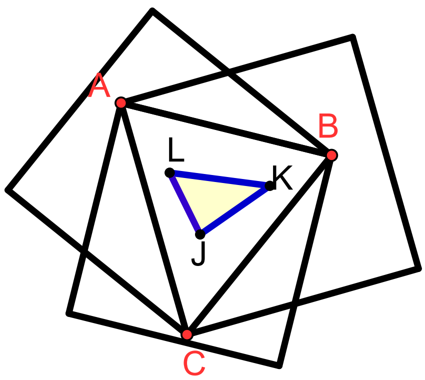
þar sem $\lambda > 0$ í tilfelli rangsælisáttunar $\triangle\, LKJ$ (mynd 4) og $\lambda < 0$ í tilfelli réttsælisáttunar $\triangle\, LKJ$ (mynd 5). Þá má sameina öll venslin og fá

$$a - l = \lambda(j - l)$$

svo að A er á línunni JL. Á svipaðan hátt má sýna að B er á línunni JK. □



Mynd 4: Rétthyrndir þríhyrningar með rangsælis áttaðan $\triangle LKJ$



Mynd 5: Rétthyrndir þríhyrningar með réttsælis áttun $\triangle LKJ$.

3 Hvernig hægt er að sanna setningu Napóleons með tvinntölum

Nú getum við lokið við sönnuninna á setningu Napóleons. Með því að skoða mynd 1 og beita hjálparsetningu 3 sjáum við að

$$l = w_1 b + w_2 c, \ k = w_1 c + w_2 a, \quad h = w_1 a + w_2 b, \tag{3}$$

þar sem

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}.$$

Þessi einföldu vensl tryggja að þungamiðjur $\triangle\, ABC$ og $\triangle\, IGH$ falla saman, þar sem

$$l + j + k = a + b + c$$

í ljósi (**??**) og (3). Við getum gert ráð fyrir að

$$a + b + c = 0, \tag{4}$$

svo

$$l + j + k = 0.$$

Við verðum nú að sýna að

$$l = z_1 j + z_2 k. \tag{5}$$

Hjálparsetning 2 (tillit tekið til áttunar) tryggir að $\triangle\, LKJ$ er jafnhliða eins og tekið er fram í setningunni. Hinsvegar, innsetning l, k, j úr (3) í (5) leiðir til venslanna

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2)a + (w_1 - z_1 w_2)b + (w_2 - z_2 w_1)c = 0. \tag{6}$$

Með því að bera saman þessi vensl við (4) sjáum við að skilyrðið

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2) = (w_1 - z_1 w_2) = (w_2 - z_2 w_1)$$

tryggir að (6) er sjálfkrafa uppfyllt. Þar sem

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}, z_1 + z_2 = 1,$$

sjáum við að staðfesta þarf eftirfarandi skilyrði

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 1 - z_1 z_2 = 1 - z_1 z_2. \tag{7}$$

Nú getum við notað (9) og sjáum að

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = z_2 + z_1 - 1 = 0, \ 1 - z_1 z_2 = 1 - 1 = 0$$

svo (7) er augljóslega uppfyllt og setning Napóleons er þar með sönnuð.

4 Alhæfingar á setningu Napóleons

Velþekkt alhæfing á setningu Napóleons er eftirfarandi (sjá [10]):

Fyrir almennan þríhyrning $\triangle\ ABC$, látum við A_1, B_1, C_1 vera þrjá ytri punkta þannig að

$$\triangle\ ABC_1 \sim \triangle\ BCA_1 \sim CAB_1.$$

Þá eru þungamiðjur þessara þríhyrninga hornpunktar þríhyrnings sem er einslaga þeim.

það er reyndar ekki nauðsynlegt að skoða þungamiðjur. Ef við skoðum, fyrir almennan þríhyrning $\triangle\ ABC$, þrjá ytri punkta A_1, B_1, C_1 þannig að

$$\sphericalangle AC_1B + \sphericalangle BA_1C + \sphericalangle CB_1A = 360^0.$$

Þá er $\triangle\ A_1B_1C_1$ einslaga þríhyrningi með hornin

$$\sphericalangle C_1AB + \sphericalangle B_1AC,\ \sphericalangle C_1BA + \sphericalangle A_1BC,\ \sphericalangle A_1CB + \sphericalangle B_1CA.$$

Fyrir sönnun á þessu sjá ([10], pp. 178 – 181) og [4].

Önnur alhæfing var sett fram af Steve Gray [4]. Þá er byrjað með almennan n-hyrning og skoðaður n-hyrningur sem fæst úr þungamiðjum reglulegra n-hyrninga sem búnir eru til á hliðum upphaflega hyrningsins. Sýnt er í [4] að með því að endurtaka þessa smíð $n-2$ sinnum fæst reglulegur n-hyrningur.

Í ljósi ofangreindrar niðurstöðu Gray má spyrja sig hvort mögulegt sé að fá reglulegan n-hyrning í færri skrefum en $n-2$? Ef við skoðum t.d. $n = 4$ og notum GeoGebru fæst að almennt er þetta ómögulegt. Það er því eðlilegt að spyrja fyrir hvaða n-hyrninga það fáist reglulegur n-hyrningur eftir fyrsta skrefið. Við þekkjum ekki svarið við þessu fyrir almennt n en í næsta dæmi er þetta skoðað fyrir $n = 4$.

Dæmi 2. *Ferningar eru búnir til á hverri hlið ferhliðungs. Sannið að:*

(a) Miðjur ferninganna eru hornpunktar í ferhliðungi með hornréttar og jafnlangar hornalínur.

(b) Ferhliðungurinn í (a) er ferningur ef og aðeins ef upprunalegi ferhliðungurinn er samsíðungur.

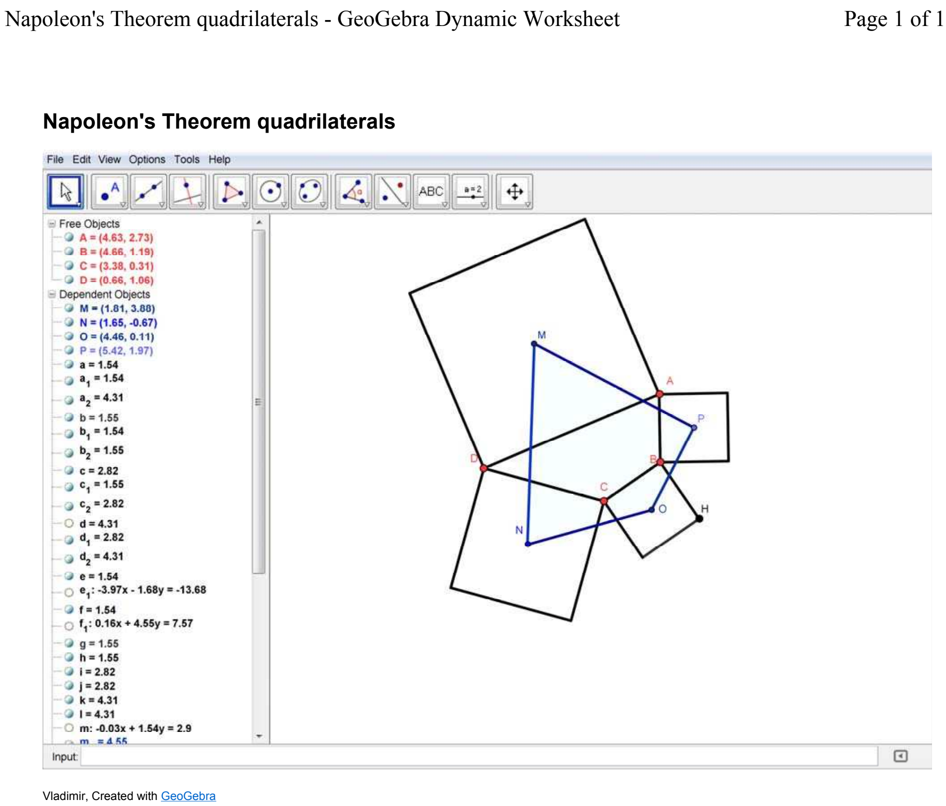
Leiðbeining. Kallið ferningana M, N, P, Q. Látið a, b, c, d vera tvinntölur sem svara til hornpunkta upprunalega ferhliðungsins. Táknið með þeim miðjur ferninganna m, n, p og q og sýnið því næst að $n - q = i(m - p)$. Fyrir lið (b), notið að $MP \perp NQ$, og sýnið að ferhliðungurinn $MNPQ$ er ferningur ef og aðeins ef $MN \parallel PQ$. Táknið því næst þetta skilyrði með a, b, c, d.

Með hliðsjón af dæmi 1 stingum við upp á því að lesandinn reyni að sanna eftirfarandi alhæfingu á setningu Napóleons:

Dæmi 3. *Þrír reglulegir n-hyrningar eru búnir til utan á þríhyrning sem ekki er jafnhliða. Sannið að miðjur þeirra eru hornpunktar í jafnhliða þríhyrningi þá og því aðeins að $n = 3$.*

Leiðbeining. Notið þá staðreynd (sannið hana) að tvinntölurnar a, b, c eru hornpunktar jafnhliða þríhyrnings ef og aðeins ef

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$



Mynd 6: GeoGebra: Ferhliðungar og setning Napóleons

5 Viðauki: Tvinntölur og rúmfræði

Eitt af því erfiðasta fyrir fyrsta árs nema við háskóla er að sjálfsögðu stærðfræðinámskeiðið (námskeiðin) og þá sér í lagi skortur á þjálfun í notkun hornafalla og tvinntalna. Beiting reikninga með tvinntölum er ekki notuð á árangursríkan máta við undirbúning verðandi kennara. Almennt álit er að um sé að ræða algebrulega reikningsaðferð sem sé óljós en verði að virka með því að beita einungis formlegum útreikningum.

Hér fyrir neðan eru gefnar nokkrar grundvallarstaðreyndir sem notaðar eru í fyrri undirköflum.

Tökum fyrst eftir því að sérhvern punkt í planinu (segjum t.d. A) má auðkenna með tvinntölu (táknað með a). Ef $a \in \mathbb{C}$ er margfaldað með $\lambda > 0$ þá getum við túlkað vörpunina

$$a \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda a \in \mathbb{C}$$

sem stríkkun. Margföldun með $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ fyrir rauntölu φ er vel skilgreind vörpun

$$a \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{i\varphi} a \in \mathbb{C}$$

hefur eðlilegu túlkunina sem snúningur með miðju í 0 um hornið φ.

Hvaða þríhyrning $\triangle ABC$ sem er má tengja við vensl af gerðinni

$$a = z_1 b + z_2 c, \quad z_1 + z_2 = 1, \tag{8}$$

þar sem $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ljóst er að stökin z_1, z_2 eru ótvíræð að því gefnu að $B \neq C$. Höfum

$$z_1 b + z_2 c = \widetilde{z_1} b + \widetilde{z_2} c$$

og

$$z_1 + z_2 = \widetilde{z_1} + \widetilde{z_2} = 1$$

svo

$$(z_1 - \widetilde{z_1}) b = (\widetilde{z_2} - z_2) c.$$

Þar sem $b \neq c$ og $z_1 - \widetilde{z_1} = \widetilde{z_2} - z_2$ fáum við

$$z_1 = \widetilde{z_1}, \; z_2 = \widetilde{z_2}.$$

Við höfum eftirfarandi

Hjálparsetning 2. *$\triangle ABC$ er jafnhliða ef og aðeins ef (8) er uppfyllt með*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Sönnun. Við getum gert ráð fyrir að tvinntalan

$$m = \frac{b+c}{2}$$

sem svarar til miðpunkts línustriksins BC sé 0. Þá er

$$a = \pm i \tan(\pi/3) b = \pm i \sqrt{3} b,$$

þar sem fá má A út með snúningi um $\pi/2$ (þ.e. með margföldun með $\pm i$) og stríkkun (þ.e. margföldun) um $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. □

Athugasemd 1. *Tölurnar z_1, z_2 eru rætur jöfnunnar $z^3 = 1$ og ennfremur þá er*

$$z_1 + z_2 = 1, z_1 z_2 = 1, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1. \tag{9}$$

Athugasemd 2. *Venslin í (8) eru gagnleg og má auðveldlega yfirfæra yfir á almennari aðstæður og mögulegar breytingar á klassísku setningu Napóleons.*

Dæmi 4. *Finnið nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði (lýst sem skilyrðum á z_1, z_2 í (8)) þess að þríhyrningurinn $\triangle ABC$ sé rétthyrndur (með $\angle A = \pi/2$).*

Ábending. Þríhyrningurinn $\triangle ABC$ er rétthyrndur ef og aðeins ef

$$c - a = (b - a) i \lambda$$

fyrir einhverja rauntölu $\lambda \neq 0$. Með því að nota þessi vensl og (8) fæst

$$(z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda)(c - b) = 0$$

og þessi vensl gefa til kynna

$$z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda = 0.$$

Svar.

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}$$

fyrir rauntölu $\lambda \neq 0$.

Dæmi 5. *Finnið nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði (lýst sem skilyrði á z_1, z_2 í* (8)*) þess að $\triangle ABC$ sé rétthyrndur jafnarma þríhyrningur (með $\angle A = \pi/2$).*

Svar. Takið $\lambda = \pm 1$ í dæmi 4 og fáið

$$z_1 = \frac{1 \mp i}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Næsta skref okkar er að finna þungamiðju þríhyrningsins úr hjálparsetningu 2.

Hjálparsetning 3. *Ef $\triangle ABC$ er jafnhliða og* (8) *er uppfyllt með*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1},$$

þá er þungamiðja hans gefin með

$$\frac{a+b+c}{3} = \omega_1 b + \omega_2 c,$$

þar sem

$$\omega_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, \ \omega_2 = \frac{z_2 + 1}{3}.$$

Takið eftir að 9 hefur í för með sér að

$$\omega_1 + \omega_2 = 1.$$

Við ljúkum þessum kafla með því að gefa nákvæmnari lýsingu á vali punktanna L, K, J á mynd 1. Áttun hringsins í planinu er réttsælis eða rangsælis. Á sama hátt gildir að sérhver þrennd af punktum eða sérhver þríhyrningur hefur réttsæla eða rangsæla áttun. Á mynd 1 hefur þríhyrningurinn $\triangle\ ABC$ réttsælis áttun. Mikilvægt er að þríhyrningarnir $\triangle\ ABJ$, $\triangle\ BCL$ og $\triangle\ CAK$ hafa sömu áttun.

Við höfum eftirfarandi breytingar á hjálparsetningu 2, þar sem áttunin er tekin til greina.

Hjálparsetning 4. *$\triangle ABC$ er jafnhliða og rangsælis áttaður ef og aðeins ef* (8) *er uppfyllt með*

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Á sama hátt verða dæmi 4 og 5 að

Dæmi 6. *Nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði þess að þríhyrningurinn $\triangle ABC$ sé rétthyrndur (með $\angle A = \pi/2$) og með rangsælisáttun er*

$$a = z_1 b + z_2 c,$$

þar sem

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}$$

fyrir rauntölu $\lambda > 0$.

Athugasemd 3. *Skilyrðið*

$$a = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2} b + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2} c$$

má endurrita á forminu

$$a = \frac{1+i\mu}{1+\mu^2} b + \frac{\mu^2 - i\mu}{1+\mu^2} c$$

eftir innsetninguna

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

Dæmi 7. *Nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði þess að $\triangle ABC$ sé rétthyrndur jafnarma þríhyrningur (með $\angle A = \pi/2$) og með rangsælisáttun er*

$$a = \frac{1-i}{2} b + \frac{1+i}{2} c.$$

Heimildir

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, NY, 1961.

[2] J. Douglas, *On Linear Polygon Transformation*, Bull Amer Math Soc, **46** (1940), bls. 551 – 560

[3] R.H. Eddy and R. Fritsch, *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle.*, Math. Mag. **67**, (1994), bls. 188 – 205.

[4] S. B. Gray, *Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons*, The American Mathematical Monthly, **110(3)** (2003), p. 210 – 227.

[5] B. Grunbaum, *Metamorphosis of Polygons, in The Lighter Side of Mathematics*, R.K.Guy and R.E.Woodrow (eds), MAA, 1994.

[6] B. H. Neumann, *A Remark on Polygons*, J London Math Soc, **17** (1942), bls. 165 – 166.

[7] T. Pappas, *Napoleon's Theorem,* The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989.

[8] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[9] F. Schmidt, *200 Jahre franzosische Revolution–Problem und Satz von Napoleon*, Didaktik der Mathematik **19**, (199) bls. 15 – 29.

[10] D. Wells, *You Are a Mathematician*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[11] J.E. Wentzel, *Converses of Napoleon's Theorem,* Amer. Math. Monthly **99** (1992) bls. 339 – 351.

[12] `http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml`