# Il Teorema di Napoleone: e noto in Italia?

Vladimir Georgiev

## 1 Il Teorema di Napoleone: un po di storia

Napoleon é noto come matematico non professionale, il matematico italiano Lorenzo Mascheroni é stato tra i suoi amici. Mascheroni ha studiato il problema delle costruzioni geometriche usando solo il compasso. Uno dei probemi di Napoleone chiedeva a trovare il centro di una circonferenza usando solo il compasso. Il problema non é triviale, sicome non é l'argomento principale in questo capitolo, possiamo limitarsi con l'osservazione che é un problema interessante perché e un problema ben collegato con la vita reale del periodo del Rinascimento (1300-1600). Le principali scoperte del Rinascimento includevano per esempio

- l'orologgio meccanico;
- l'artileria, costruzione di tubi che lanciavano pesiintrodotti dal ingignere William Congreve;
- la pressa stampante, inventata in 1440 dal tedesco Johann Gutenberg;
- il compasso, usato dal cinese Zheng He (1371-1435) durante i suoi viaggi;
- il microscopio, Hans Janssen ha costruito il primo microscopio in in 1509;
- la carta stampante, introdotta in Ingilterra in 1496;
- la sottomarina, il disegno di Leonardo Da Vinci. D'altra parte, Cornelius van Drebbel ha inventato la submarina in 1624;
- The Match, invention made in 1680 by Robert Boyle;
- occhialli, sono stati inventati dal italiano Salvino D'Amate in 1284.

L'importanze di queste scoperte e il fatto che loro avevano cambiato la vita reale sono la base per caprire come mai i problemi matematici di questo periodo erano collegati con la vita reale.

Un altro esempio di questo periodo: P. Fermat (1601-1665) voleva fare una sfida a Evangelista Torricelli (1608-1647), chiedendo la domanda

- Dato un triagolo con tre vertici trovare un punto dentro il triangolo tale che la somma delle distanze di questo punto ai vertici é minimale.

Torricelli ha presentato varie soluzioni. In una delle soluzioni lui oservava che circonferenze circonscritti introno ai triangoli equilateri sui tre lati del triangolo qualsiasi hanno unico punto di intersezione (chiamato oggi il punto di Fermat).

Alcuni teoremi famosi sono stati attrbuiti á Napoleon Bonaparte (1769-1821), malgrado il fatto che il suo contributo vero non era mai stato verificato. Nonostante quello lo sviluppo della matematica in Francia dopo la Revoluzione era straordinario e la matematica ha ottenuto un riconoscimento notevole. Laplace ́stato Ministro Interno nel periodo quando Napoleon governavaa.

La seguente affermazione (nota come teorema di Napoleon) é ben collegato col problema di Fermat (vedi [12]), discusso sopra.

**Theorem 1.** *(Teorema di Napoleone) Su ogni lato del traingolo arbitrario si costruisce un triangolo equilatero. Colleghiamo i centri di questi tre triangoli equilateri. Otteniamo un triangolo equilatero.*

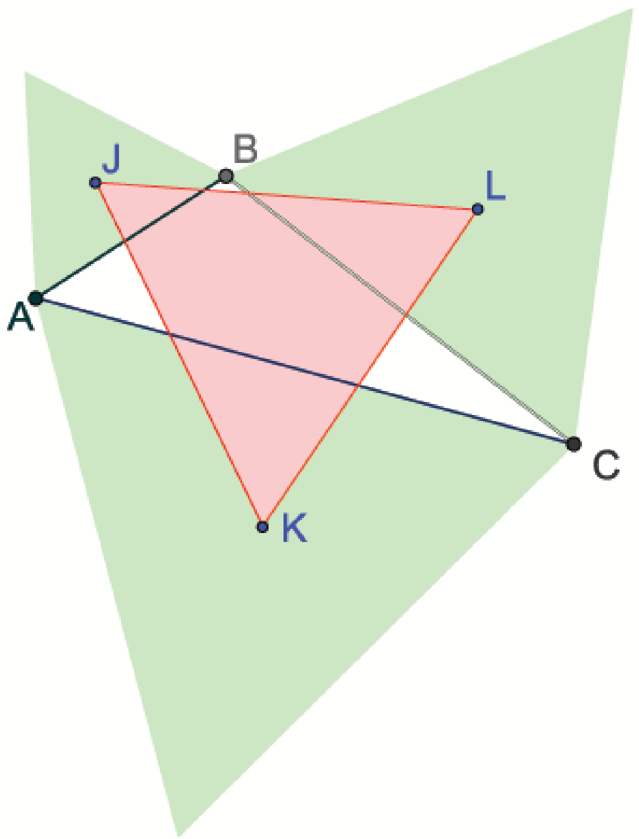



Figure 1: Teorema di Napoleone

É davvero sorprendente il fatto che il tirangolo ottenuto erede le proprieta' dei tre triangoli costruiti sui tre lati di un triangolo qualsiasi. Uno puo usare Geogebra per costruire un disegno interattivo usando il link Teorema di Napoleone.

Con Geogebra si fa il nostro primo passo. Cercheremo di costruire materiali didattici( aiutati da Geogebra files) che possano essere usati per l'argomento collegato col Teorema di Napoleone. Piu' precisamente si cerca di

- preparare i futuri insegnanti di Matematica a conoscere l'argomento;
- mostrare le possibilitá di implementare alcuni passaggi del materiale didattico nello svolgimento del programma standard nella Scuola Superiore.

Il nostro interesse di discutere l'argomento in questo capitolo (e nel proggetto Comenius) é causato del fatto che l'argomento non é ben noto tra professori di Matematica in Italia. In consequenza, si puo giá prevedere che i futuri insegnanti di Matematica non sono ben preparati per discutere questo argomento belissimo.

## 2 Come si puo usare Geogebra per il Teorema di Napoleone per avere dimostrazioni rigorose

Per questo argomento l'uso di Geogebra é consigliabile, perche il programma ha modo semplicissimo di preparare applicazioni geometriche interattivi.

Un foto momentaneo del uso di Geogebra si vede sulla Figura 2. Nella forma interattiva i punti $A, B, C$ si possano muovere col mause come vertici di un triangolo arbitrario (uno dei ipotesi del Teorema di Napoleone).

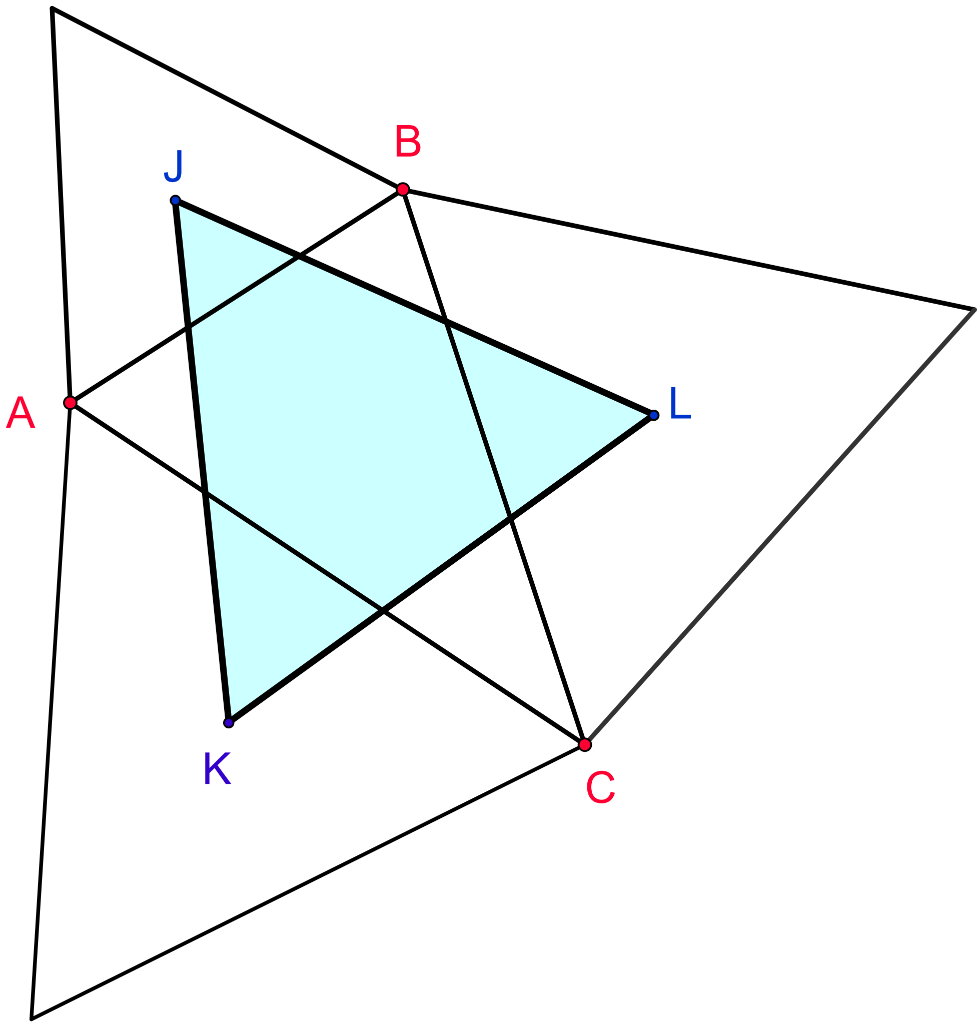



Figure 2: Geogebra applicazione per il teorema di Napoleone.

L'applicazione é preparata in collaborazione con la studentessa Sara Leal Venegas durante il lavoro del math labs a Pisa nella primavera di 2011.

Il passo succesivo era basato sulle domande proposti degli studenti utilizzando l'applicazione di

Geogebra.

- Si puo affermare che le aree dei triangoli $\triangle\ IHG$ é $\triangle\ ABC$ sono proporzionali?

La congettura si puo verificare subito con Geogebra. Movendo il punto $A$ in modo tale che (nel caso limite) i tre punti $A, B, C$ sono su una rete, uno puo vedere che l'area del $\triangle\ IHG$ si puo fissare, mentre l'area di $\triangle\ ABC$ tende á 0. Cosi, la congettura é falsa.

Un'altra domanda, collegata con la domanda precedente:

- Come si puo trovare l'area del triangolo $\triangle\ IHG$ oppure come possiamo trovare la lunghezza di un lato del triangolo $\triangle\ ABC$ equilatero?

L'esempio mostra come si salta dalla applicazione di Geogebra ad un problema un'pó piu' astratto dove é necessario applicare un raggionamento senza seftware.

Tornando al teorema di Napoleone possiamo stabilire due nuove domande che danno una altra direzione dello studio intorno del teorema di Napoleone.

- Si puo sostituire la costruzione con triangoli equilateri usando quadrati?
- Si puo generalizzare il teorema di Napoleone sostituendo il triangolo arbitrario con quadrilatero arbitrario?

La risposta alla prima domanda si puo trovare usando l'applicazione di Geogebra successiva, vedi la Figura (3).

Se si vuole usare l'applicazione Geogebra, allora si usa il link Teorema di Napoleone con quadrati.

Si vede che quando i punti $B$ and $A$ sono vicino allora il triangolo $\triangle\ KLJ$ (see Figure 4) e sempre piu' vicino ad un triangolo rettangolare.

Per procedere in modo rigoroso si possano usare i numeri complessi e si puo usare Esercizio 4 calcolando i punti $L, K, J$ della Figura 4 come segue

$$L = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) B + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) C, \quad K = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) C + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) A, \tag{1}$$

$$J = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) A + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) B. \tag{2}$$

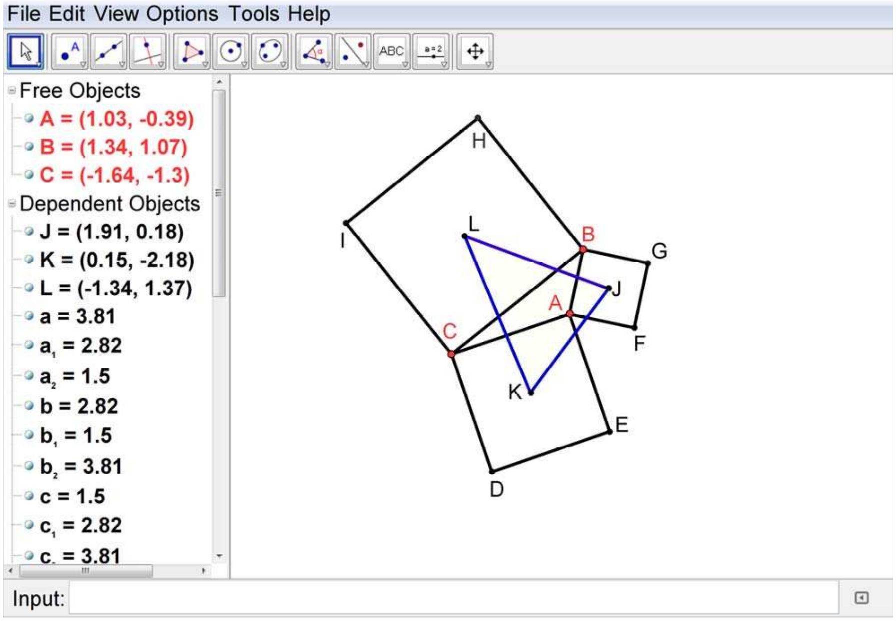
Ottrniamo

$$L + K + J = A + B + C,$$

dunque i baricentri dei triangoli $\triangle\ ABC$ e $\triangle\ LKJ$ coincidono.

Sicome ognuno dei triangoli $\triangle\ BCL$, $\triangle\ CAK$ e $\triangle\ ABJ$ é isoscele rettangolare, cioé ogni due lati laterali sono uguali si puo cercare a rispondere alla seguente domanda:

- Si possano trovare tre punti $A, B, C$ con $A \neq B \neq C \neq A$ tale che $A, B, C$ non sono su una rete e tale che $\triangle\ LKG$ é un isoscele retangolare triangolo ?




Vladimir, Created with GeoGebra

Figure 3: Geogebra sostituisce triangoli con quadrati nel teorema di Napoleone

La risposta precisa (soggerita delle applicazioni con Geogebra) é la seguente.

**Lemma 1.** *Se $A, B, C$ sono tre punti nel piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro non sono tre punti su una rete, allora $\triangle LKG$ non puo essere un triangolo isoscele e rettangolare.*

*Proof.* Suppogniamo che $\triangle IGH$ é isoscele rettangolare, allora abbiamo la relazione

$$J = \frac{1 \mp i}{2} L + \frac{1 \pm i}{2} K.$$

Sostituendo (1) e (2) in questa relazione, otteniamo

$$\frac{i}{2}(A - B) = 0$$

e questo certamente ci porta alla contradizione. $\square$

Un'altra domanda che puo essere chiesta

- Si possano trovare tre punti $A, B, C$ con $A \neq B \neq C \neq A$ tali che $A, B, C$ non sono tre punti su una rete e tale che $\triangle LKJ$ é un triangolo equilatero?

Si puo usare Lemma 2 e risolvere il seguente problema.

**Exercise 1.** *Se $A, B, C$ sono tre punti sul piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro no sono tre punti su una rete, allora il triangolo $\triangle LKJ$ é equilatero se e solo se $\triangle ABC$ é equilatero .*

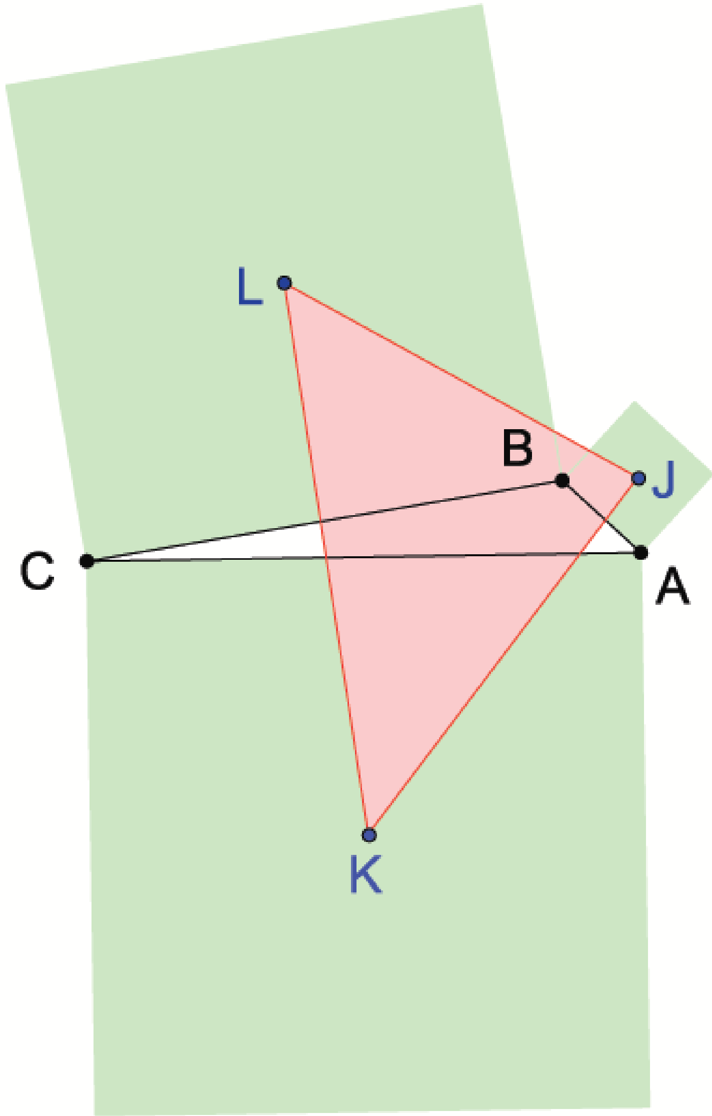



Figure 4: Geogebra countroesempio per la generalizzazione del teorema di Napoleone

Un problema piu' profondo dal punto di vista matemaatico e vedere tutti casi quando $\triangle\ IGH$ é solo rettangolare.

Possiamo fissare una congettura che é stata creata e poi' "verificata" con varie simulazioni con Geogebra.

**Exercise 2.** *Se $A, B, C$ sono tre punti nel piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro non sono tre punti su una rete, allora $\triangle\ LKJ$ é rettangolare se e solo se due dei vertici del $\nabla ABC$ sono sulle retti determinarti dei lati del $\triangle\ LKJ$.*

Possiamo fare alcune osservazioni collegati con la congettura. Possimao prendere il triangolo $\triangle\ ABC$ arbitrario con orientamento in senso orario per esempio (vedi la Figura 5). Possiamo supporre che i punti $L, K, G$ (centroidi dei quadrati) sono tali che $\triangle\ BCL$, $\triangle\ CAK$ e $\triangle\ ABJ$

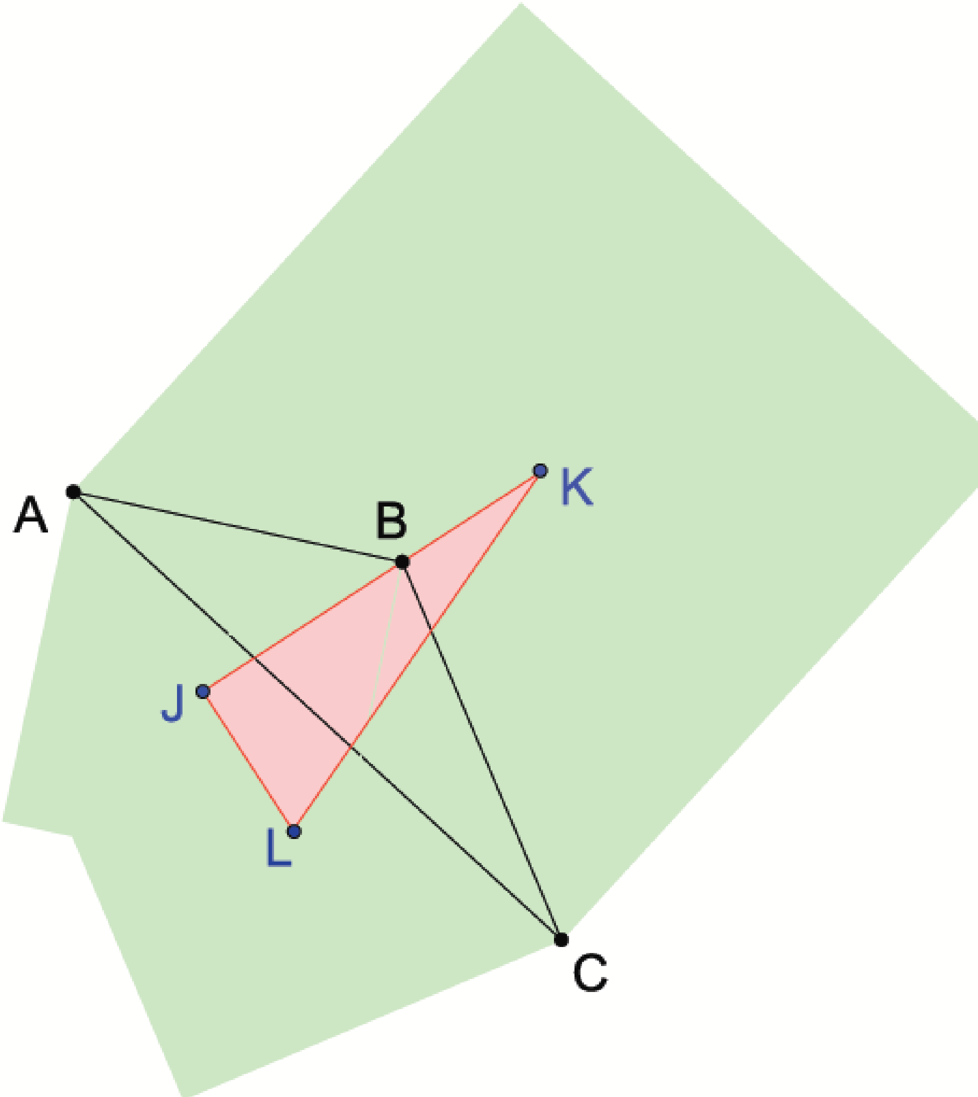



Figure 5: Triangoli rettangolari con orientamento in senso orario del $\triangle\ LKJ$ come immagine della mappa di Napoleone

sono orientati in senso orario. Possiamo applicare Esercizio 6 e dedurre

$$L = \frac{1-i}{2}C + \frac{1+i}{2}B,$$

$$K = \frac{1-i}{2}A + \frac{1+i}{2}C,$$

$$J = \frac{1-i}{2}B + \frac{1+i}{2}A.$$

La condizione $\triangle\ LKJ$ é rettangolare significa (vedi Esercizio 5)

$$J = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}L + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}K$$

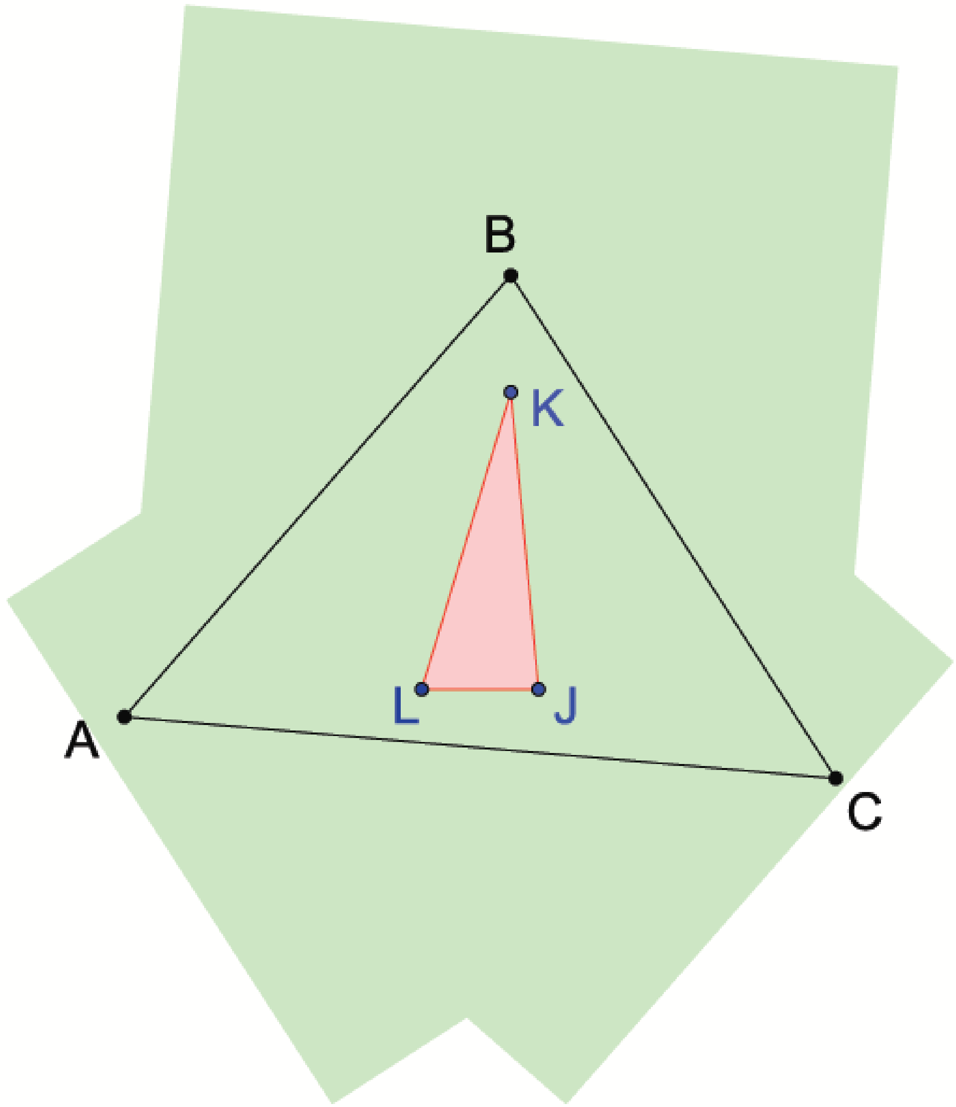



Figure 6: Triangoli rettangolari con orientamento in senso orario del $\triangle\ LKJ$ come immagine della mappa di Napoleone

dove $\lambda > 0$ nel caso di orientamento anti orario di $\triangle\ LKJ$ (Figure 5) e $\lambda < 0$ nel caso di orientamento orario del $\triangle\ LKJ$ (Figure 6) . Utilizzando le relazioni ottenuti sopra troviamo

$$A - L = \lambda(J - L)$$

dunque $A$ é sulla rete $JL$. In modo simile si vede che $B$ é un punto della rete $JK$.

## 3 Dimosttrazione del teorema di Napoleone usando numeri complessi

Adesso siamo pronti ad iniziare la dimostrazione del teorema di Napoleone usando i numeri complessi. Perche' si usano i numeri complessi, quandi si sa che il teorema di Napoleone ha tantissimi demostrazioni.

La nostra scelta é subordinata dalle seguneti osservazioni:

- la trigonometria e i numeri complessi sono tra i punti piu' difficili per studenti della scuola superiore, trovando difficolta' successivamente nell'Universita';
- noi cercavamo di trovare un approccio che funzione bene non solo per il caso del teorema di Napoleone, ma anche nei capitoli successivi dove si studiano esempi della teoria dei sistemi dinamici sul piano.

Tornando effettivamente alla dimostrazione noi possiamo dare occhiata alla Figura 1 e applicando Lemma 3 otteniamo

$$I = w_1 B + w_2 C, \; G = w_1 C + w_2 A, \quad H = w_1 A + w_2 B, \tag{3}$$

dove

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}.$$

La mappa

$$(A, B, C) \Rightarrow (I, H, G)$$

definita secondo (3) sará chiamata mappa di Napoleonep.

Questa relazione mostra che i baricentri dei triangoli $\triangle\ ANC$ e $\triangle\ IGH$ coincidono, a causa della relazione

$$I + H + G = A + B + C$$

(vedi (14) e (3)). In particulare noi non perdiamo generalitá assumendo

$$A + B + C = 0, \tag{4}$$

e questo implica

$$I + H + G = 0.$$

Il nostro scopo e verificare la relazione

$$I = z_1 H + z_2 G. \tag{5}$$

D'una parte Lemma 2 implica (tenedo conto dell'orientazione)che $\triangle\ IGH$ é equilatero come annunciato nel Teorema.

D'altra parte, la sostituzione di $I, G, H$ di (3) in (5) ci porta alla relazione

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2) A + (w_1 - z_1 w_2) B + (w_2 - z_2 w_1) C = 0. \tag{6}$$

Confrontando questa relazione con (4), otteniamo

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2) = (w_1 - z_1 w_2) = (w_2 - z_2 w_1)$$

e questo garantisce che (6) sia soddisfatta. Tenendo conto della relazione

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}, z_1 + z_2 = 1,$$

si vede che dobbiamo verificare la seguente relazione

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 1 - z_1 z_2 = 1 - z_1 z_2. \tag{7}$$

Adesso siamo in grado diusare (13) e dedurre

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = z_2 + z_1 - 1 = 0, \; 1 - z_1 z_2 = 1 - 1 = 0$$

cos'ı(7) é soddisfatta e il teorema di Napoleone é dimostrato.

## 4 Problemi collegati con il teorema di Napoleone sui quadrilateri

Seguendo i conti per la verifica di (11) per ogni quadrilatero nel piano complesso abbiamo

$$A = z_1B + z_2C + z_3D,\ C = u_1B + u_2D, z_1 + z_2 + z_3 = 1, u_1 + u_2 = 1 \tag{8}$$

dove $z_1, z_2, z_3, u_1, u_2$ sono numeri complessi.

Una generalizzazione ben noto del teorema di Nalpoleone é il segunete:

Sui lati di un triangolo arbitrario si construiscono triangoli simil tali che le seguente 2 condizioni sono soddisfatti: gli angoli apici dei tre trinagoli sono diversi, il troangolo di apice ha la stessa orientazione come i tre triangoli. Collegando i centroidi di tre triangoli otteniamo un triangolo simile ai tre triangoli.

Uno puo evitare a colegare i centri, qualsisai tre punti corrisopndenti (in senso di similaritá) dopo il collegamento diventano vertici di un triangolo simile a quelli di partenza (vedi [10], pp. 178 – 181).

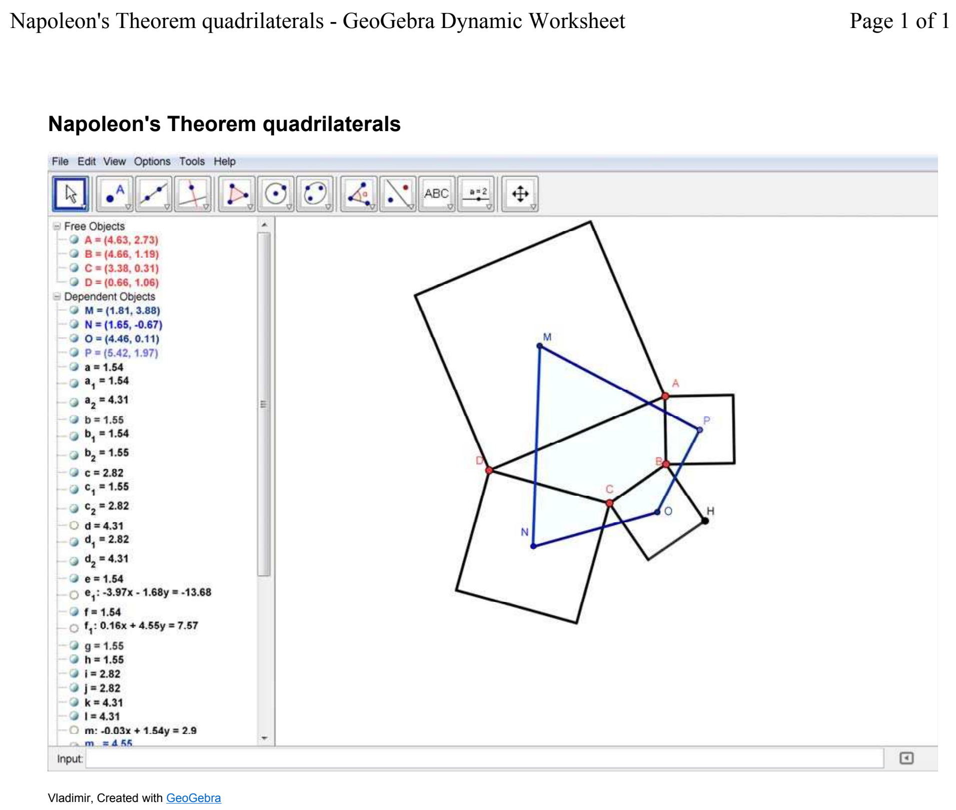



Figure 7: Geogebra application: Quadrilateri e mappa di Napoleone

Il teorema di Napoleone ha varie generalizzazioni. Una tale possibilitá é stata discussa sopra prendendo triangoli simili al posto di triangoli equilateri. Un'altra possibilitá é stata proposta da S. Gray. La costruzione inizia con qualsiasi n - gone, e procede in (n - 2) passi. Il risultato ad ogni passo é un altro n-gone, l'ultimo sara' o regolare o star-shaped. Il teorema di Napoleone é il caso particolare $n = 3$.

Passiamo alla descrizione detagliata di questa operazione.

Per ogni due numeri complessi A e B, si considera l'operazione

$$C = (1 - c)A + cB \tag{9}$$

Se $c$ é reale, il punto $C$ é sulla rete definita di $A$ e $B$. Se $c$ é un numero complesso, $A, B$ e $C$ sono vertici di un triangolo simile al triangolo con vertici $0, 1$ e $c$. L'orientazione é preservata. Se $c = \lambda + i\mu$, allora la costruzione di $C$ é la segunete: tracciare la rete attraverso il punto $(1-\lambda)A+\mu B$ ortogonale ad $AB$ e trovare il punto $C$ come l'unico punto che ha distance $|B - A|$ da $AB$.

Applicando (9) per tutti lati del poligono, si trova un nuovo poligono, $P_c$. Questa operazione é stata chiamata $TPL-$ trasformata polinomiale lineare. $TPL$ soddisfa varie proprietá. Prima di tutto, $P$ e $P_c$ sono concentrici, cioé hanno lo stesso centro.

$$\sum P_i = \sum (P_C)_i \, . \tag{10}$$

Una altra direzione di possibili generalizzazioni e partire con quadrilatero qualsiasi e costruire quadrati. La possibile generalizzazione si puo testare usando Geogebra applicazione usando il link Il teorema di Napoleone per quadrilateri. Si puo vedere che la congetttura che i centri dei quadtro quadrati non é un quadrato.

## 5 Appendice: richiami sui numeri complessi

Una delle difficoltá principali per studenti dei primi 2 anni nell'Universita' é la mancata esperienza con la trigonometria e l'utillizzo dei numeri complessi. Lo stesso aproblema afrontano anche i futuri insegnanti nella sua preparazione. L'opinione abbastanza difusa é che l'uso dei numeri complessi ci da un algoritmo algebrico che non é abbastanza chiaro ma si deve applicare e quando si applica si usano solo calcoli formali solo. For this reason we are trying to implement concrete didactic units showing how the use of this techniques can stimulate the creativity too.

É uno dei argomenti principali che ha determinato la nostra scelta di usare i numeri complessi.

Il punto di partenza é collegato col fatto che ogni punto (diciamo $A$) nel piano sará identificato col un numero complesso (useremo la stessa notazione $A$). Se $A \in \mathbb{C}$ é molteplicato per $\lambda > 0$ allora interpretiamo la mappa

$$A \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda A \in \mathbb{C}$$

come omotetia o dilazioe. La molteplicazione per $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ per ogni reale $\varphi$ é una mappa ben definita

$$A \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{i\varphi} A \in \mathbb{C}$$

rappresenta una rotazione di angolo $\varphi$.

Qualsiasi triangolo $\triangle ABC$ dato possiamo studiare la relazione del tipo

$$A = z_1 B + z_2 C, \quad z_1 + z_2 = 1, \tag{11}$$

dove $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

I coefficianti $z_1, z_2$ sono definiti in modo univuqo quando $B \neq C$. Se

$$z_1 B + z_2 C = \widetilde{z}_1 B + \widetilde{z}_2 C$$

e

$$z_1 + z_2 = \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2 = 1$$

allora abbiamo

$$z_1 = \widetilde{z_1}, z_2 = \widetilde{z_2}. \tag{12}$$

**Lemma 2.** *$\triangle ABC$ é equilatero se e solo se* (11) *é soddisfatto con*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

*Proof.* Facciamo all'inizio ipotesi che la media

$$M = \frac{B+C}{2}$$

del segmento $BC$ é 0. Possiamo scrivere le identitá

$$A = \pm i \tan(\pi/3)B = \pm i\sqrt{3}B,$$

perché $A$ puo essere costruito usando rotazione a $\pi/2$ (cioé multiplicando per $\pm i$) e omotetia (cioé multiplicazione per $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Per trattare il caso generale $M \neq 0$ si puo fare translazione per $M$, cosí otteniamo

$$A - M = \pm i\sqrt{3}(B - M),$$

e questo implica

$$A = \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) B + \left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) C.$$

L'unicitá segue da (12) e completa la dimostrazione.

$\square$

**Remark 1.** *I numeri $z_1, z_2$ sono radici della equaizone $z^3 = 1$ e soddisfano le relazioni*

$$z_1 + z_2 = 1, z_1 z_2 = 1, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1. \tag{13}$$

**Remark 2.** *La relazione* (11) *é utile e possiamo generalizzarla.*

**Exercise 3.** *Provare a trovare la condizione necessaria e sufficente (expressa come relazione su $z_1, z_2$ in* (11)*) tale che il tiangolo $\triangle ABC$ é rettangolo (con $\angle A = \pi/2$).*

**Soggerimento.**Il triangolo $\triangle ABC$ é rettangolo se e solo se

$$C - A = (B - A)i\lambda$$

per qualche numero reale $\lambda \neq 0$. Usando questa relazione (11) si trova

$$(z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda)(C - B) = 0$$

e questa relazione implica

$$z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda.$$

**Risposta.**

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}$$

per qualche REALE $\lambda \neq 0$.

**Exercise 4.** *Trovare la condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ sia is isoscele e rettangolare (con $\angle A = \pi/2$).*

**Risposta.** Sia $\lambda = \pm 1$ in Problema 3, allora abbiamo

$$z_1 = \frac{1 \mp i}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Il passo successivo e di trovare il baricentro del Lemma 2.

**Lemma 3.** *Se $\triangle ABC$ é equilatero e* (11) *é soddisfatto con*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1},$$

*allora il baricentro e stabilito dal*

$$\frac{A+B+C}{3} = (z_1+1)\frac{B}{3} + (z_2+1)\frac{C}{3}.$$

La dimostrazione é semplice, per quello facciamo solo riferimento alla Figura 8.

**Remark 3.** *Tornando a* (13)*, si vede la relazione*

$$\frac{A+B+C}{3} = w_1 B + w_2 C,$$

*dove*

$$w_1 + w_2 = \frac{z_1 + 1 + z_2 + 1}{3} = 1. \tag{14}$$

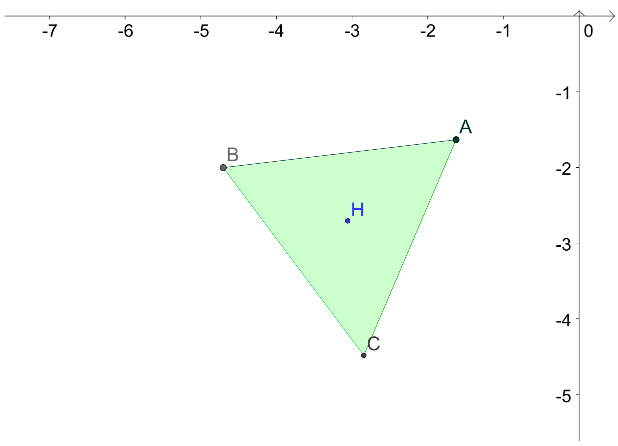



Figure 8: Il baricentro di un triangolo equilatero

Alla fine di questo capitolo possiamo dare una descrizione della scelta dei punti $GHI$ della Figura 1. Si parte del fatto che l'orientazione di un cerchio nel piano e' definito del senso orario o del senso antiorario. In modo simile l'orientazione di un trianglo nel piano é orario o antioraario.

Sulla Figura 1 il triangolo $\triangle\ ABC$ ha orientazione oraria. é importante a notare che il tirangolo $\triangle\ ABH$, $\triangle\ BCI$ e $\triangle\ CAG$ hanno la stessa orientazione.

Abbiamo la seguente modifica del Lemma 2, tenendo conto della orientazione.

**Lemma 4.** *$\triangle ABC$ é equilatero con orientazione antioraria(vedi la Figura 8) se e solo se* (11) *é vero con*

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

In modo simile le Esercizi 3 e 4 si possano modificare.

**Exercise 5.** *La condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ é rettangolo e orientato in senso antiorario é*

$$A = z_1 B + z_2 C,$$

*dove*

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}$$

*con $\lambda < 0$.*

**Remark 4.** *La condizione*

$$A = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}B + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}C$$

*si puo rescrivere come*

$$A = \frac{1+i\mu}{1+\mu^2}B + \frac{\mu^2 - i\mu}{1+\mu^2}C$$

*dopo la sostituzione*

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

**Exercise 6.** *La condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ é isoscele rettangolo orientato nel senso orario é*

$$A = \frac{1-i}{2}B + \frac{1+i}{2}C.$$

## References


[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, NY, 1961.

[2] J. Douglas, *On Linear Polygon Transformation*, Bull Amer Math Soc, **46** (1940), p. 551 – 560

[3] R.H. Eddy and R. Fritsch, *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle.*, Math. Mag. **67**, (1994), p. 188 – 205.

[4] S. B. Gray, *Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons*, The American Mathematical Monthly, **110(3)** (2003), p. 210 – 227.

[5] B. Grunbaum, *Metamorphosis of Polygons, in The Lighter Side of Mathematics*, R.K.Guy and R.E.Woodrow (eds), MAA, 1994.

[6] B. H. Neumann, *A Remark on Polygons*, J London Math Soc, **17** (1942), p. 165 – 166.

[7] T. Pappas, *Napoleon's Theorem,* The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989.

[8] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[9] F. Schmidt, *200 Jahre franzosische Revolution–Problem und Satz von Napoleon*, Didaktik der Mathematik **19**, (199) p. 15 – 29.

[10] D. Wells, *You Are a Mathematician*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[11] J.E. Wentzel, *Converses of Napoleon's Theorem,* Amer. Math. Monthly **99** (1992) p. 339 – 351.

[12] http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml