

Dyna MAT

Il Teorema di Napoleone: e noto in Italia? Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software

Vladimir Georgiev Andreas Ulovec

1 Il Teorema di Napoleone: un po di storia

.
Napoleon é noto come matematico non professionale, il matematico italiano Lorenzo Mascheroni é stato tra i suoi amici. Mascheroni ha studiato il problema delle costruzioni geometriche usando solo il compasso. Uno dei probemi di Napoleone chiedeva a trovare il centro di una circonferenza usando solo il compasso. Il problema non é triviale, sicome non é l'argomento principale in questo capitolo, possiamo limitarsi con l'osservazione che é un problema interessante perché e un problema ben collegato con la vita reale del periodo del Rinascimento (1300-1600). Le principali scoperte del Rinascimento includevano per esempio value of experiments are material teachers group processionale, it inaterialities realized via scheme and you need a lot of α observe how the path of light actually changes. We want to demonstrate how the path of \mathbf{r}

- l'orologgio meccanico; T_{S} material can be useful for science teachers, who can use it to model experiments with lenses, with lenses,
- \bullet l'artileria, costruzione di tubi che lanciavano pesiintrodotti dal ingignere William Congreve; simulation, the pedagogic value is not quite the same), but *complementing* it. It can as well be useful
- \bullet la pressa stampante, inventata in 1440 dal tedesco Johann Gutenberg;
- \bullet il compasso, usato dal cinese Zheng He $(1371-1435)$ durante i suoi viaggi;
- $\bullet\,$ il microscopio, Hans Janssen ha costruito il primo microscopio in in 1509; \bullet if interoscopio, real stands and reference in primo interoscopio in in 1509;
- \bullet la carta stampante, introdotta in Ingilterra in 1496; \bullet the centre specification, introducted in light being more of \bullet .
- $\bullet\,$ la sottomarina, il disegno di Leonardo Da Vinci. D'altra parte, Cornelius van Drebbel ha inventato la submarina in 1624 ; m exercise to but even for m to 2π ,
	- The Match, invention made in 1680 by Robert Boyle;
- occhialli, sono stati inventati dal italiano Salvino D'Amate in 1284. **2 Easy beginnings – light hits a plane surface**

L'importanze di queste scoperte e il fatto che loro avevano cambiato la vita reale sono la base per caprire come mai i problemi matematici di questo periodo erano collegati con la vita reale.

Un altro esempio di questo periodo: P. Fermat (1601-1665) voleva fare una sfida a Evangelista Torricelli (1608-1647), chiedendo la domanda

• Dato un triagolo con tre vertici trovare un punto dentro il triangolo tale che la somma delle distanze di questo punto ai vertici é minimale.

Torricelli ha presentato varie soluzioni. In una delle soluzioni lui oservava che circonferenze circonscritti introno ai triangoli equilateri sui tre lati del triangolo qualsiasi hanno unico punto di intersezione (chiamato oggi il punto di Fermat).

Alcuni teoremi famosi sono stati attrbuiti á Napoleon Bonaparte (1769-1821), malgrado il fatto che il suo contributo vero non era mai stato verificato. Nonostante quello lo sviluppo della matematica in Francia dopo la Revoluzione era straordinario e la matematica ha ottenuto un riconoscimento notevole. Laplace stato Ministro Interno nel periodo quando Napoleon governavaa.

La seguente affermazione (nota come teorema di Napoleon) é ben collegato col problema di Fermat (vedi [\[12\]](#page-14-0)), discusso sopra.

Dyna MAT

Theorem 1. (Teorema di Napoleone) Su ogni lato del traingolo arbitrario si costruisce un triangolo equilatero. Colleghiamo i centri di questi tre triangoli equilateri. Otteniamo un triangolo equilatero. **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software 1 Introduction**

Figure 1: Teorema di Napoleone the angle of incidence (between the ray of light and the *normal*) is equal to the angle of reflection:

E´ davvero sorprendente il fatto che il tirangolo ottenuto erede le proprieta' dei tre triangoli costruiti sui tre lati di un triangolo qualsiasi. Uno puo usare Geogebra per costruire un disegno interattivo usando il link [Teorema di Napoleone.](napol.ggb)

Con Geogebra si fa il nostro primo passo. Cercheremo di costruire materiali didattici(aiutati da Geogebra files) che possano essere usati per l'argomento collegato col Teorema di Napoleone. Piu' precisamente si cerca di

- preparare i futuri insegnanti di Matematica a conoscere l'argomento;
- mostrare le possibilità di implementare alcuni passaggi del materiale didattico nello svolgimento del programma standard nella Scuola Superiore.

Il nostro interesse di discutere l'argomento in questo capitolo (e nel proggetto Comenius) é causato del fatto che l'argomento non é ben noto tra professori di Matematica in Italia. In consequenza, si puo giá prevedere che i futuri insegnanti di Matematica non sono ben preparati per discutere questo argomento belissimo.

Dyna MAT

2 Come si puo usare Geogebra per il Teorema di Napoleone per avere dimostrazioni rigorose **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

Per questo argomento l'uso di Geogebra é consigliabile, perche il programma ha modo semplicissimo di preparare applicazioni geometriche interattivi.

Un foto momentaneo del uso di Geogebra si vede sulla Figura [2.](#page-2-0) Nella forma interattiva i punti A, B, C si possano muovere col mause come vertici di un triangolo arbitrario (uno dei ipotesi del Teorema di Napoleone). In optics when it comes down to show the path of rays of light through glass, lenses or systems of \cup n foto momentaneo del uso di Geogebra si vede sulla Figura 2. Nella forma interattiva i pu

Figure 2: Geogebra applicazione per il teorema di Napoleone.

L'applicazione é preparata in collaborazione con la studentessa Sara Leal Venegas durante il lavoro del math labs a Pisa nella primavera di 2011.

Il passo succesivo era basato sulle domande proposti degli studenti utilizzando l'applicazione di

Dyna MAT

Geogebra. **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** Andreas Ulovec

 $\bullet\,$ Si puo affermare che le aree dei triangoli $\vartriangle\,IHG$ é $\vartriangle\,ABC$ sono proporzionali?

La congettura si puo verificare subito con Geogebra. Movendo il punto A in modo tale che (nel caso limite) i tre punti A, B, C sono su una rete, uno puo vedere che l'area del $\triangle IHG$ si puo fissare, mentre l'area di \vartriangle ABC tende á 0. Cosi, la congettura é falsa. Equipment. It is different enough to some surface the pure vector of light in area det ΔH or any other way of ΔH

Un'altra domanda, collegata con la domanda precedente: \mathbf{r} removing and putting and putting another piece in. To see what happens if \mathbf{r}

 $\bullet~$ Come si puo trovare l'area del triangolo $\vartriangle~IHG$ oppure come possiamo trovare la lunghezza di un lato del triangolo $\triangle ABC$ equilatero?

L'esempio mostra come si salta dalla applicazione di Geogebra ad un problema un'pó piu' astratto dove é necessario applicare un raggionamento senza seftware. simulation, the pedagogic value is not quite the same), but *complementing* it. It can as well be useful

Tornando al teorema di Napoleone possiamo stabilire due nuove domande che danno una altra direzione dello studio intorno del teorema di Napoleone.

- $\bullet\,$ Si puo sostituire la costruzione con triangoli equilateri usando quadrati? \bullet or puo sostituite ia costruzione con triangon equilateri usanuo quadrati:
- $\bullet \,$ Si puo generalizzare il teorema di Napoleone sostituendo il triangolo arbitrario con quadrilatero arbitrario? \sim or pub generalization recording at trapoleone bestituation it thangele and little con-quality $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\alpha}$ and from the equations alone it would be different to see what happens. We different to see what happens.

La risposta alla prima domanda si puo trovare usando l'applicazione di Geogebra successiva, vedi la Figura [\(3\)](#page-4-0).

Se si vuole usare l'applicazione Geogebra, allora si usa il link [Teorema di Napoleone con quadrati.](version1.ggb) **2 Easy beginnings – light hits a plane surface**

Si vede che quando i punti B and A sono vicino allora il triangolo \triangle KLJ (see Figure [4\)](#page-5-0) e sempre piu' vicino ad un triangolo rettangolare.

er procedere in modo rigoroso si possano usare i numeri complessi e si puo usare Esercizio [4](#page-11-0) calcolando i punti L, K, J della Figura [4](#page-5-0) come segue

$$
L = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right)B + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right)C, \quad K = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right)C + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right)A,\tag{1}
$$

$$
J = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right)A + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right)B.
$$
 (2)

Ottrniamo

$$
L + K + J = A + B + C,
$$

dunque i baricentri dei triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle LKJ$ coincidono.

Sicome ognuno dei triangoli \triangle BCL, \triangle CAK e \triangle ABJ é isoscele rettangolare, cioé ogni due lati laterali sono uguali si puo cercare a rispondere alla seguente domanda:

• Si possano trovare tre punti A, B, C con $A \neq B \neq C \neq A$ tale che A, B, C non sono su una rete e tale che \triangle LKG é un isoscele retangolare triangolo ?

Figure 3: Geogebra sostituisce triangoli con quadrati nel teorema di Napoleone

La risposta precisa (soggerita delle applicazioni con Geogebra) é la seguente. La risposta precisa (soggerita delle applicazioni con Geogebra) e la seguellie.

Lemma 1. Se A, B, C sono tre punti nel piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro non sono tre $punti$ su una rete, allora \triangle LKG non puo essere un triangolo isoscele e rettangolare.

 $Proof.$ Suppogniamo che \triangle IGH é isoscele rettangolare, allora abbiamo la relazione

$$
J = \frac{1 \mp i}{2}L + \frac{1 \pm i}{2}K.
$$

Sostituendo [\(1\)](#page-3-0) e [\(2\)](#page-3-1) in questa relazione, otteniamo

$$
\frac{i}{2}(A-B)=0
$$

e questo certamente ci porta alla contradizione.

Un'altra domanda che puo essere chiesta

• Si possano trovare tre punti A, B, C con $A \neq B \neq C \neq A$ tali che A, B, C non sono tre punti su una rete e tale che \triangle LKJ é un triangolo equilatero?

Si puo usare Lemma [2](#page-11-1) e risolvere il seguente problema.

Exercise 1. Se A, B, C sono tre punti sul piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro no sono tre $\emph{punti su una rete, allora il triangolo }\Delta \emph{ LKJ }$ é equilatero se e solo se $\Delta \emph{ABC}$ é equilatero .

 \Box

Dyna MAT

Figure 4: Geogebra countroesempio per la generalizzazione del teorema di Napoleone

Un problema piu' profondo dal punto di vista matemaatico e vedere tutti casi quando \triangle IGH $é$ solo rettangolare.

Possiamo fissare una congettura che é stata creata e poi' "verificata" con varie simulazioni con Geogebra.

Exercise 2. Se A, B, C sono tre punti nel piano tali che $A \neq B \neq C \neq A$ e loro non sono tre punti su una rete, allora \triangle LKJ é rettangolare se e solo se due dei vertici del ∇ABC sono sulle retti determinarti dei lati del \triangle LKJ.

Possiamo fare alcune osservazioni collegati con la congettura. Possimao prendere il triangolo \triangle ABC arbitrario con orientamento in senso orario per esempio (vedi la Figura [5\)](#page-6-0). Possiamo supporre che i punti L, K, G (centroidi dei quadrati) sono tali che \triangle BCL, \triangle CAK e \triangle ABJ **Fig.1** Reflection of light at a plane surface.

Figure 5: Triangoli rettangolari con orientamento in senso orario del \triangle LKJ come immagine della mappa di Napoleone

sono orientati in senso orario. Possiamo applicare Esercizio [6](#page-13-0) e dedurre

$$
L = \frac{1 - i}{2}C + \frac{1 + i}{2}B,
$$

\n
$$
K = \frac{1 - i}{2}A + \frac{1 + i}{2}C,
$$

\n
$$
J = \frac{1 - i}{2}B + \frac{1 + i}{2}A.
$$

La condizione \triangle *LKJ* é rettangolare significa (vedi Esercizio [5\)](#page-13-1)

$$
J = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}L + \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}K
$$

Dyna MAT

Figure 6: Triangoli rettangolari con orientamento in senso orario del \triangle LKJ come immagine della mappa di Napoleone

dove $\lambda > 0$ nel caso di orientamento anti orario di Δ LKJ (Figure [5\)](#page-6-0) e $\lambda < 0$ nel caso di orientamento orario del \triangle LKJ (Figure [6\)](#page-7-0). Utilizzando le relazioni ottenuti sopra troviamo

$$
A - L = \lambda (J - L)
$$

dunque A é sulla rete JL . In modo simile si vede che B é un punto della rete JK .

3 Dimosttrazione del teorema di Napoleone usando numeri complessi

Adesso siamo pronti ad iniziare la dimostrazione del teorema di Napoleone usando i numeri complessi. Perche' si usano i numeri complessi, quandi si sa che il teorema di Napoleone ha tantissimi demostrazioni.

La nostra scelta é subordinata dalle seguneti osservazioni:

Dyna MAT

- la trigonometria e i numeri complessi sono tra i punti piu' difficili per studenti della scuola superiore, trovando difficolta' successivamente nell'Universita'; **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**
- noi cercavamo di trovare un approccio che funzione bene non solo per il caso del teorema **1 Introduction** di Napoleone, ma anche nei capitoli successivi dove si studiano esempi della teoria dei sistemi dinamici sul piano.

In optics when it comes down to show the path of rays of light through glass, lenses or systems of light through glass, lenses or systems of light through glass, lenses or systems of light thro \mathcal{L} is the experiments of the experiments are quite complex, and \mathcal{L}

.
Tornando effettivamente alla dimostrazione noi possiamo dare occhiata alla Figura [1](#page-1-0) e applicando Lemma [3](#page-12-0) otteniamo for mando enettivamente ana dimostrazione noi possiamo dare occinata ana rigura 1 e applicar
.

$$
I = w_1 B + w_2 C, \ G = w_1 C + w_2 A, \ H = w_1 A + w_2 B,
$$
\n(3)

dove

dove

$$
w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}.
$$

La mappa

 $(A, B, C) \Rightarrow (I, H, G)$ $(A, D, C) \Rightarrow (I, H, G)$

definita secondo [\(3\)](#page-8-0) sará chiamata mappa di Napoleonep.

Questa relazione mostra che i baricentri dei triangoli \triangle \overline{ANC} e \triangle \overline{IGH} coincidono, a causa della relazione ω uesta relazione mostra che i baricentri dei triangoli $\triangle\, ANC$ e $\triangle\, IGH$ coincidono, a causa de Ω ielazione of the other surface of the lens – again mathematics is required to calculate the angle in Ω

$$
I + H + G = A + B + C
$$

(vedi (14) e (3)). In particulare noi non perdiamo generalitá assumendo $\sum_{i=1}^{\infty}$ (eq.). In particular that the light being more off-central more off-centre, the calculations of $\sum_{i=1}^{\infty}$

$$
A + B + C = 0,\t\t(4)
$$

e questo implica

$$
I+H+G=0.
$$

Il nostro scopo e verificare la relazione

$$
I = z_1 H + z_2 G. \tag{5}
$$

D'una parte Lemma [2](#page-11-1) implica (tenedo conto dell'orientazione)che ∆ *IGH* é equilatero come annunciato nel Teorema. σ and σ and σ incidence (between the of σ ray of σ ray to σ ray to the angle of σ ray to σ ray to

D'altra parte, la sostituzione di I, G, H di (3) in (5) ci porta alla relazione

$$
-(z_1w_1 + z_2w_2)A + (w_1 - z_1w_2)B + (w_2 - z_2w_1)C = 0.
$$
\n⁽⁶⁾

Confrontando questa relazione con [\(4\)](#page-8-2), otteniamo

$$
-(z_1w_1 + z_2w_2) = (w_1 - z_1w_2) = (w_2 - z_2w_1)
$$

e questo garantisce che [\(6\)](#page-8-3) sia soddisfatta. Tenendo conto della relazione

$$
w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}, z_1 + z_2 = 1,
$$

si vede che dobbiamo verificare la seguente relazione

$$
-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 1 - z_1 z_2 = 1 - z_1 z_2.
$$
 (7)

Adesso siamo in grado diusare [\(13\)](#page-11-2) e dedurre

$$
-z_1^2 - z_2^2 - 1 = z_2 + z_1 - 1 = 0, \ 1 - z_1 z_2 = 1 - 1 = 0
$$

cos'i[\(7\)](#page-8-4) é soddisfatta e il teorema di Napoleone é dimostrato. \mathcal{L}

Dyna MAT

4 Problemi collegati con il teorema di Napoleone sui quadrilateri Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software

Seguendo i conti per la verifica di [\(11\)](#page-10-0) per ogni quadrilatero nel piano complesso abbiamo Andreas Ulovec

$$
A = z_1 B + z_2 C + z_3 D, \ C = u_1 B + u_2 D, z_1 + z_2 + z_3 = 1, u_1 + u_2 = 1
$$
 (8)

dove z_1, z_2, z_3, u_1, u_2 sono numeri complessi. leve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$ bond numerical complexs.

Una generalizzazione ben noto del teorema di Nalpoleone é il segunete:

Sui lati di un triangolo arbitrario si construiscono triangoli simil tali che le seguente 2 condizioni sono soddisfatti: gli angoli apici dei tre trinagoli sono diversi, il troangolo di apice ha la stessa orientazione come i tre triangoli. Collegando i centroidi di tre triangoli otteniamo un triangolo simile ai tre triangoli. of making light visible. To show the path of light in materials, you need special equipment – smoke $\mathop{\rm su}\nolimits$ at always and a construistion that $\mathop{\rm am}\nolimits$ and $\mathop{\rm am}\nolimits$ and $\mathop{\rm a}\nolimits$ are sequente $\mathop{\rm a}\nolimits$ condizi

Uno puo evitare a colegare i centri, qualsisai tre punti corrisopndenti (in senso di similarità) dopo il collegamento diventano vertici di un triangolo simile a quelli di partenza (vedi [\[10\]](#page-14-1), pp.
178 – 181) $178 - 181$. observe how the path of light actually changes. We want to demonstrate how you can show the path of Uno puo evitare a colegare i centri, qualsisal tre punti corrisof reflection and refraction – not *instead* of the actual experiment (if one sees experiments only in

Napoleon's Theorem quadrilaterals - GeoGebra Dynamic Worksheet Page 1 of 1 for mathematics teachers. Well, now where is the mathematics? There is a lot of it in there! If a ray of

Napoleon's Theorem quadrilaterals and continues the glass and continues the glass and continues the same happens when the same happen

Figure 7: Geogebra application: Quadrilateri e mappa di Napoleone

Il teorema di Napoleone ha varie generalizzazioni. Una tale possibilità é stata discussa sopra prendendo triangoli simili al posto di triangoli equilateri. Un'altra possibilit´a ´e stata proposta da S. Gray. La costruzione inizia con qualsiasi n - gone, e procede in (n - 2) passi. Il risultato ad ogni passo é un altro n-gone, l'ultimo sara' o regolare o star-shaped. Il teorema di Napoleone \acute{e} il caso particolare $n = 3$.

Passiamo alla descrizione detagliata di questa operazione.

Per ogni due numeri complessi A e B, si considera l'operazione Andreas Ulovec

$$
C = (1 - c)A + cB \tag{9}
$$

Se c é reale, il punto C é sulla rete definita di A e B . Se c é un numero complesso, A, B e C sono vertici di un triangolo simile al triangolo con vertici $0, 1, e$. L'orientazione é preservata. Se $c = \lambda + i\mu$, allora la costruzione di C é la segunete: tracciare la rete attraverso il punto $(1-\lambda)A + \mu B$ ortogonale ad AB e trovare il punto C come l'unico punto che ha distance $|B - A|$ da AB. $\partial_{\alpha}A_{\beta}$ and adjustments to that $\partial_{\alpha}A_{\beta}$

Applicando [\(9\)](#page-10-1) per tutti lati del poligono, si trova un nuovo poligono, P_c . Questa operazione é stata chiamata $TPL-$ trasformata polinomiale lineare. TPL soddisfa varie proprietá. Prima di tutto, $P e P_c$ sono concentrici, cioé hanno lo stesso centro. done by α removing and putting and putting and putting and putting and putting and putting α Applicando (9) per tutti lati del poligono, si trova un nuovo poligono, P_c . Questa operazion

$$
\sum P_i = \sum (P_C)_i.
$$
\n(10)

Una altra direzione di possibili generalizzazioni e partire con quadrilatero qualsiasi e costruire quadrati. La possibile generalizzazione si puo testare usando Geogebra applicazione usando il link [Il teorema di Napoleone per quadrilateri.](version3.ggb) Si puo vedere che la congetttura che i centri dei quadtro quadrati non é un quadrato. \mathbf{r} again mathematics is required to calculate the again mathematics is required to calculate the angle in

5 Appendice: richiami sui numeri complessi ϵ – but the model is is indicated, and it does with the light falling in lenses and with light falling in light falling in ϵ

Una delle difficoltá principali per studenti dei primi 2 anni nell'Universita' é la mancata esperienza con la trigonometria e l'utillizzo dei numeri complessi. Lo stesso aproblema afrontano anche i futuri insegnanti nella sua preparazione. L'opinione abbastanza difusa é che l'uso dei numeri complessi ci da un algoritmo algebrico che non é abbastanza chiaro ma si deve applicare e quando si applica si usano solo calcoli formali solo. For this reason we are trying to implement concrete didactic units showing how the use of this techniques can stimulate the creativity too.

E uno dei argomenti principali che ha determinato la nostra scelta di usare i numeri complessi. ´ **2.1 Reflection**

Il punto di partenza é collegato col fatto che ogni punto (diciamo *A*) nel piano sará identificato col un numero complesso (useremo la stessa notazione A). Se $A\in\mathbb{C}$ é molteplicato per $\lambda>0$ allora interpretiamo la mappa

$$
A \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda A \in \mathbb{C}
$$

come omotetia o dilazioe. La molteplicazione per $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ per ogni reale φ é una mappa ben definita

$$
A \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{i\varphi} A \in \mathbb{C}
$$

rappresenta una rotazione di angolo φ .

Qualsiasi triangolo $\triangle ABC$ dato possiamo studiare la relazione del tipo

$$
A = z_1 B + z_2 C, \quad z_1 + z_2 = 1,\tag{11}
$$

dove $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

I coefficianti z_1, z_2 sono definiti in modo univuqo quando $B \neq C$. Se

$$
z_1B + z_2C = \widetilde{z_1}B + \widetilde{z_2}C
$$

e

$$
z_1 + z_2 = \widetilde{z_1} + \widetilde{z_2} = 1
$$

Dyna MAT

allora abbiamo

$$
z_1 = \tilde{z}_1, z_2 = \tilde{z}_2.
$$
\n⁽¹²⁾

Lemma 2. $\triangle ABC$ é equilatero se e solo se (11) é soddisfatto con

$$
z_1 = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.
$$

Proof. Facciamo all'inizio ipotesi che la media glass lenses etc. Not always available, and adjustments to the system can usually be seen usua

$$
M=\frac{B+C}{2}
$$

del segmento BC é 0. Possiamo scrivere le identitá

$$
A = \pm i \tan(\pi/3)B = \pm i\sqrt{3}B,
$$

perché A puo essere costruito usando rotazione a $\pi/2$ (cioé multiplicando per $\pm i$) e omotetia (cioé per tan π per tance is not as and pedagogic value in π , χ (complementation per $\pm i$) completed (complete multiplicazione per tan $(\pi/3) = \sqrt{3}$. Per trattare il caso generale $M \neq 0$ si puo fare translazione per M , cosí otteniamo functional mathematics teachers. We can also the mathematic $M \neq 0$ si published it ansiems

$$
A - M = \pm i\sqrt{3}(B - M),
$$

e questo implica

$$
A = \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)B + \left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)C.
$$

L'unicitá segue da (12) e completa la dimostrazione. etc. But even for the DGS, we need the DGS, we need the simulation in the first place.

 \Box

Remark 1. I numeri z_1, z_2 sono radici della equaizone $z^3 = 1$ e soddisfano le relazioni

$$
z_1 + z_2 = 1, z_1 z_2 = 1, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1.
$$
\n
$$
(13)
$$

Remark 2. La relazione (11) é utile e possiamo generalizzarla. **the angle of the angle of the ray of the ray of ray of ray incredible ray is equal to the set of reflection:** α

Exercise 3. Provare a trovare la condizione necessaria e sufficente (expressa come relazione su z_1, z_2 in [\(11\)](#page-10-0)) tale che il tiangolo $\triangle ABC$ é rettangolo (con $\angle A = \pi/2$).

Soggerimento.Il triangolo $\triangle ABC$ é rettangolo se e solo se

$$
C - A = (B - A)i\lambda
$$

per qualche numero reale $\lambda \neq 0$. Usando questa relazione [\(11\)](#page-10-0) si trova

$$
(z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda)(C - B) = 0
$$

e questa relazione implica

$$
z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda.
$$

Risposta.

$$
z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}
$$

per qualche REALE $\lambda \neq 0$.

Dyna MAT

Exercise 4. Trovare la condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ sia is isoscele e rettangolare (con $\angle A = \pi/2$). **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

Risposta. Sia $\lambda = \pm 1$ in Problema [3,](#page-11-4) allora abbiamo

$$
z_1=\frac{1\mp i}{2}, z_2=\overline{z_1}.
$$

Il passo successivo e di trovare il baricentro del Lemma [2.](#page-11-1) of making light visible. To show the path of light in materials, you need special equipment – smoke

Lemma 3. Se $\triangle ABC$ é equilatero e [\(11\)](#page-10-0) é soddisfatto con **therminers** of α is the current equivalent of α in the new operator one.

$$
z_1=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2=\overline{z_1},
$$

allora il baricentro e stabilito dal quelle science teachers, un segue it to model experiments with lenses, who can use \mathcal{L}

$$
\frac{A+B+C}{3} = (z_1+1)\frac{B}{3} + (z_2+1)\frac{C}{3}.
$$

La dimostrazione é semplice, per quello facciamo solo riferimento alla Figura [8.](#page-12-2)

Remark 3. Tornando a (13) , si vede la relazione \mathbf{R} reaches the other surface of the lens – again mathematics is required to calculate the angle in \mathbf{R} **EXEMBLE 15 REFLECTED** is reflected and relation calculation calculation calculation calculation calculation calculating the set of α

 -7

$$
\frac{A+B+C}{3} = w_1B + w_2C,
$$

\ndove
\n
$$
w_1 + w_2 = \frac{z_1 + 1 + z_2 + 1}{3} = 1.
$$
\n(14)

dove

Figure 8: Il baricentro di un triangolo equilatero

Alla fine di questo capitolo possiamo dare una descrizione della scelta dei punti GHI della Figura [1.](#page-1-0) Si parte del fatto che l'orientazione di un cerchio nel piano e' definito del senso orario o del senso antiorario. In modo simile l'orientazione di un trianglo nel piano é orario o antioraario.

Sulla Figura [1](#page-1-0) il triangolo $\triangle ABC$ ha orientazione oraria. \acute{e} importante a notare che il tirangolo \triangle *ABH*, \triangle *BCI* e \triangle *CAG* hanno la stessa orientazione.

Abbiamo la seguente modifica del Lemma [2,](#page-11-1) tenendo conto della orientazione.

Lemma 4. $\triangle ABC$ é equilatero con orientazione antioraria(vedi la Figura [8\)](#page-12-2) se e solo se [\(11\)](#page-10-0) \acute{e} vero con **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

$$
z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.
$$

In modo simile le Esercizi [3](#page-11-4) e [4](#page-11-0) si possano modificare. m mode simile te escretar group prossume modificate.

Exercise 5. La condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ é rettangolo e o rientato in senso antiorario \tilde{e} α is not always available. Note and adjustments to the system can usually only be set of the system can

$$
A=z_1B+z_2C,
$$

dove t_{love}

$$
z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}
$$

con $\lambda < 0$.

Remark 4. La condizione and reflection experiments on α of the actual experiments on α

$$
A = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}B + \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}C
$$

si puo rescrivere come light hits the glass surface of an optical lens, a part of it gets reflected back in a certain angle, and

$$
A = \frac{1 + i\mu}{1 + \mu^2}B + \frac{\mu^2 - i\mu}{1 + \mu^2}C
$$

 $\it dopo\ la\ sostituzione$

$$
\mu=-\frac{1}{\lambda}.
$$

Exercise 6. La condizione sufficente e necessaria tale che il triangolo $\triangle ABC$ é isoscele rettanqolo orientato nel senso orario \acute{e} execute the DGS, we conditione sufficience to necessarily the simulation in the figure \sim

$$
A = \frac{1-i}{2}B + \frac{1+i}{2}C.
$$

References when a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that \mathbf{r} the angle of incidence (between the *normal*) is equal to the angle of ray of $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- [1] H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, NY, 1961.
- [2] J. Douglas, On Linear Polygon Transformation, Bull Amer Math Soc, 46 (1940), p. 551 560
- [3] R.H. Eddy and R. Fritsch, The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle., Math. Mag. 67 , (1994), p. $188 - 205$.
- [4] S. B. Gray, Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons, The American Mathematical Monthly, $110(3)$ (2003), p. $210 - 227$.
- [5] B. Grunbaum, Metamorphosis of Polygons, in The Lighter Side of Mathematics, R.K.Guy and R.E.Woodrow (eds), MAA, 1994.
- [6] B. H. Neumann, A Remark on Polygons, J London Math Soc, 17 (1942), p. 165 166.
- [7] T. Pappas, Napoleon's Theorem, The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989.
- [8] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

Dyna MAT

- [9] F. Schmidt, 200 Jahre franzosische Revolution–Problem und Satz von Napoleon, Didaktik der Mathematik 19, (199) p. $15 - 29$. **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**
- [10] D. Wells, You Are a Mathematician, John Wiley & Sons, NY, 1981.
- [11] J.E. Wentzel, Converses of Napoleon's Theorem, Amer. Math. Monthly 99 (1992) p. 339 – 351. \sim 351.
- $[12]$ http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml