Около теоремата на Наполеон

Владимир Георгиев, Олег Мушкаров

1 Теоремата на Наполеон-малко история

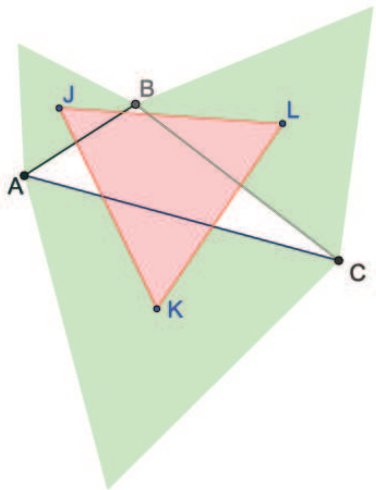
Известно е, че Наполеон е бил любител на елементарната математика и е познавал редица известни математици. Например, негов приятел е бил италианският математик Лоренцо Маскерони, който пръв разглежда задачи за геометрични построения, използващи само пергел. Интересна задача на Наполеон в тази насока е да се построи центърът на дадена окръжност само с пергел. Тук няма да се спираме на нейното решение, а ще отбележим само, че по времето на Ренесанса (1300г.-1600г.) подобни задачи са възниквали от чисто практически въпроси. Ето няколко примера на важни изобретения и открития от този период:

- Механичния часовник;
- Артилерията - първото оръдие за изстрелване на ракети е изобретено от английския инженер Уилям Конгреив (1670 - 1729);
- Печатната преса - изобретена е от Йоханес Гутенберг през 1440 г.;
- Компаса - за първи път е използван от китайския пътешественик Ченг Хе(1371-1435);
- Микроскопа - изобретен е от холандския майстор на очила Ханс Янсен през 1590 г.;
- Тапетите - първата фабрика за хартия е построена в Англия през 1496 г.;
- Подводницата - първият проект е на Леонардо да Винчи, но за първи път подводница е построена от Корнелиус ван Дребел през 1624 г.;
- Кибрита - открит е от Роберт Бойл през 1680 г.;
- Очилата - първите очила са разработени от италианския изобретател Салвино Д‘Амате през 1284 г.

Важността на тези изобретения и фактът, че те съществено са променили реалния живот на хората обясняват защо някои известни математически задачи от този период са свързани с решаването на нови практически проблеми.

Друг пример е следното предизвикателство на П.Ферма(1601-1665) към Е. Торичели (1608-1647), изобретателя на барометъра: *Да се намери точка в равнината на даден триъгълник, за която сумата на разстоянията и до върховете на триъгълника е минимална.* Торичели дава няколко решения на тази екстремална геометрична задача. В едно от тях той отбелязва, че окръжностите, описани около равностранните триъгълници, построени външно върху страните на триъгълника се пресичат в една точка, която дава решение на задачата. В съвременната математическа литратура тази точка се нарича точка на Торичели-Ферма на дадения триъгълник.

Редица забележителни математически твърдения се приписват на Наполеон Бонапарт (1769-1821), въпреки че в известните ни източници връзката му с тях се поставя под въпрос. Трябва да се отбележи обаче, че математиката разцъфтява в следреволюционна Франция и по това време математиците се радват на голямо уважение. Например известният математик Лаплас е бил министър на вътрешните работи при Наполеон.



Фигура 1: Теорема на Наполеон

Следното твърдение (известно като теорема на Наполеон) е тясно свързано със задачата на Ферма (виж [12]), формулирана по-горе.

Теорема 1.1. *Върху страните на триъгълник са построени външно (вътрешно) равностранни триъгълници. Да се докаже, че техните центрове са върхове на равностранен триъгълник.*

Наистина е изненадващо, че видът на получения триъгълник не зависи от вида на първоначалния триъгълник. Но той зависи от вида на построените върху страните триъгълници–той е равностранен винаги когато построените триъгълници са такива. Съответният Geogebra файл може да се намери в следния линк Теорема на Наполеон.

Това е нашата изходна точка, като главната ни цел е разработването на конкретни дидактични материали (на базата на системата Geogebra), които могат да се използват в:

- курсове за подготовка и повишаване на квалификацията на настоящи и бъдещи учители по математика;
- класната работа.

Нашият интерес към теоремата на Наполеон е предизвикан и от факта, че тя не е много известна сред италианските учители по математика.

2 GeoGebra симулации около теоремата на Наполеон

Ние използваме системата Geogebra, защото тя дава приятен и лесен начин за чертане на разнообразни геометрични конфигурации.

В динамичното приложение точките A, B, C могат да се движат произволно като върхове на триъгълник. То може да се активира на следния линк Теорема на Наполеон. Приложението е подготвено съвместно със студентката Сара Леал Венегас в математическата лаборатория *Съставяне на задачи* , организирана в Университета на Пиза през пролетта на 2011 г.

Като първи пример на въпрос, който може да се постави при използването на динамичната конструция предлагаме следния:

- Вярно ли е, че отношението на лицата на $\triangle\ JKL$ и $\triangle\ ABC$ на Фигура 1 е постоянно?

На този въпрос може лесно да се отговори като се използва Geogebra. Движейки точката A така, че в крайното положение точките A, B, C да са колинеарни виждаме, че лицето на $\triangle\ JKL$ може да остава постоянно, докато лицето на $\triangle\ ABC$ клони към 0. Следователно отговорът е отрицателен.

Друг въпрос, свързан с горния, е следния:

- Да се намери лицето на $\triangle\ JKL$ или еквивалентно, да се намери неговата страна.

Този пример показва как може да "скочим"от приложения на Geogebra към по-абстрактни въпроси, които се нуждаят от чисто математическа обосновка и изчисления без използване на IT средства.

Връщайки се към теоремата на Наполеон ще отбележим, че в лабораторията за съставяне на задачи бяха изследвани следните варианти за нейното обобщаване:

- вместо равностранни триъгълници външно се строят квадрати;
- вместо триъгълници се разглеждат четириъгълници.

В първия случай отговорът беше намерен бързо с прилагане на системата Geogebra (виж Фигура 2),

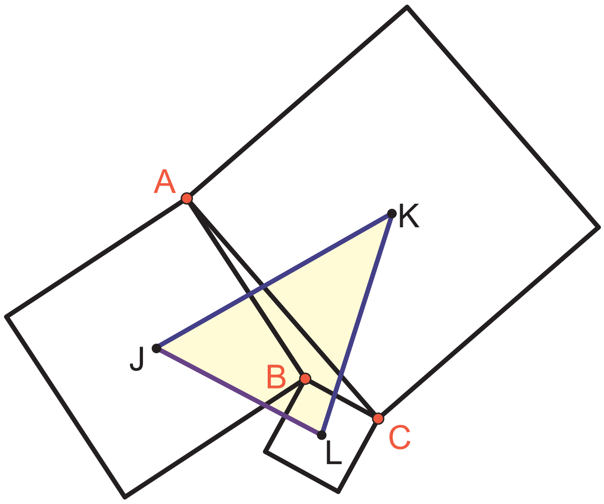
която може до се активира чрез следния линк Теорема на Наполеон с квадрати. Както се вижда, при приближаване на точките B и A (виж Фигура 3) $\triangle\ KLJ$ става близък до правоъгълен, тоест не е равностранен.

Като използваме същото прилжение виждаме, че медицентровете на триъгълниците ABC и JKL съвпадат. Наистина, следвайки подхода от Упражнение 5.2 изразяваме комплексните числа, съответстващи на точките L, K, J от Фигура 3, както следва

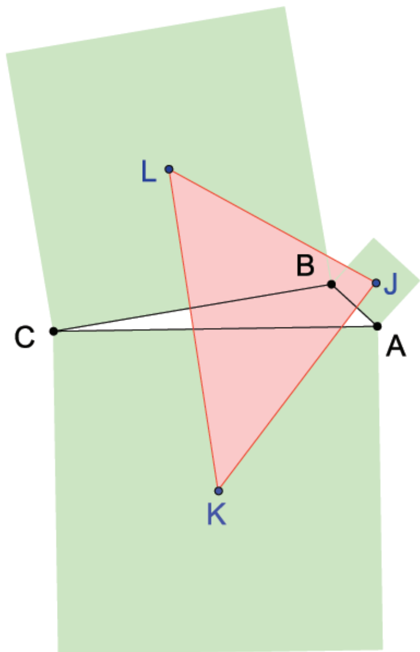
$$l = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) b + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) c, \quad k = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) c + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) a, \tag{1}$$

$$j = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) a + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) b. \tag{2}$$

Сега лесно се проверява, че $l + k + j = a + b + c$, т.е. медицентровете на $\triangle\ LKJ$ и $\triangle\ ABC$ съвпадат. Тъй като триъгълниците $\triangle\ BCL$, $\triangle\ CAK$ и $\triangle\ ABJ$ са равнобедрени и правоъгълни можем да формулираме следния въпрос:



Фигура 2: Geogebra замества триъгълници с квадрати



Фигура 3: Geogebra контрапример за обобщаване на теоремата на Наполеон

,

- Съществуват ли триъгълници ABC, за които $\triangle\ LKJ$ е равнобедрен и правоъгълен?

Предната динамична конструкция с Geogbra подсказва следния отговор:

Лема 2.1. *Не съществува* $\triangle\ ABC$*, за който* $\triangle\ LKJ$ *е равнобедрен и правоъгълен.*

Доказателство. Да допуснем, че $\triangle\ LKJ$ е равнобедрен и правоъгълен. Тогава

$$j = \frac{1 \mp i}{2} l + \frac{1 \pm i}{2} k.$$

Замествайки (1) и (2) в това равенство получаваме $\frac{i}{2}(a-b)=0$, което е противоречие.

Друг естествен въпрос е следния:

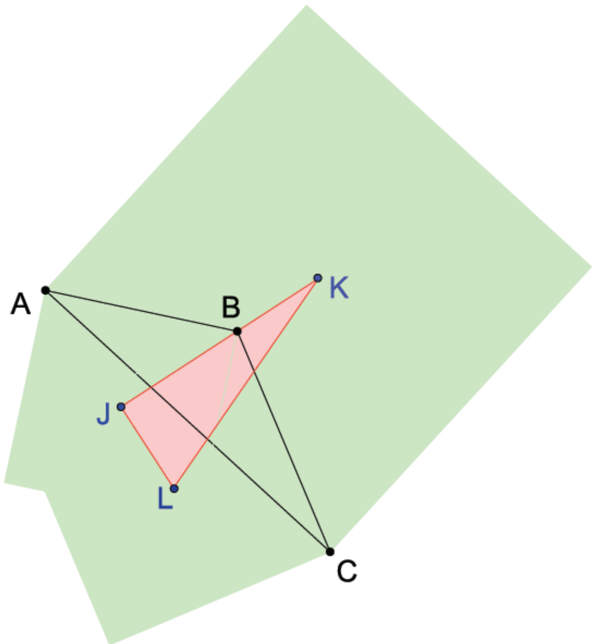
- Съществуват ли триъгълници ABC, за които $\triangle\, LKG$ е равностранен?

Читателят може да използва Лема 5.1 за да реши следното:

Упражнение 2.1. *Триъгълник LKJ е равностранен само когато $\triangle\, ABC$ е равностранен .*

По-интересен е въпросът кога $\triangle\, LJK$ е правоъгълен. След тестване с Geogebra можем да формулираме следната хипотеза:

Твърдение 2.1. *Триъгълник LKJ е правоъгълен с $\sphericalangle LJK = 90^o$ тогава и само тогава, когато квадратите са вътрешни за триъгълника и върховете A и B на $\triangle\, ABC$ лежат върху правите, определени от страните LJ и KJ на $\triangle\, LKJ$.*



Фигура 4: Правоъгълни триъгълници LKJ с положителна ориентация

Доказателство. Нека $\triangle\, ABC$ е ориентиран в отрицателна посока, тоест по часовниковата стрелка (виж Фигура 4) и да предположим, че точките L, K, J (центровете на вътрешните квадрати) са такива, че $\triangle\, BCL$, $\triangle\, CAK$ и $\triangle\, ABJ$ са ориентирани в същата посока. Като използваме Упражнение 5.4 заключаваме, че

$$l = \frac{1-i}{2}c + \frac{1+i}{2}b,$$

$$k = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}c,$$

$$j = \frac{1-i}{2}b + \frac{1+i}{2}a.$$

Условието, че $\triangle\, LKJ$ е правоъгълен , означава, че (виж Упражнение 5.3)

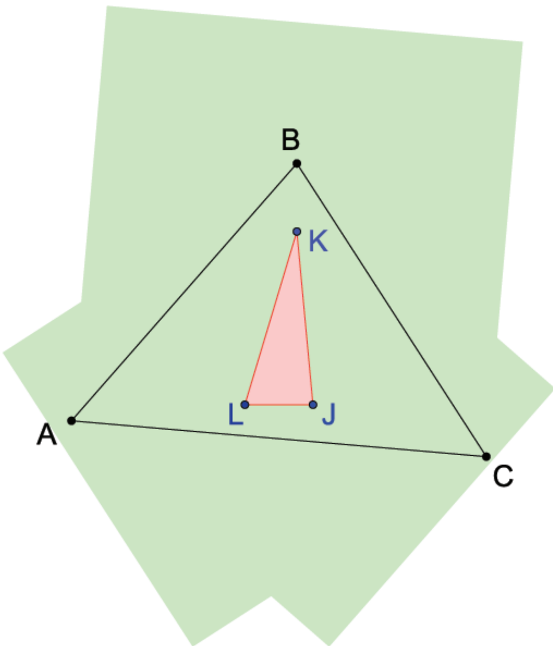
$$j = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2} l + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2} k,$$

като $\lambda > 0$, ако $\triangle\, LKJ$ е ориентиран в положителна посока (Фигура 4) и $\lambda < 0$ – в обратния случай (Фигура 5). От горните равенства следва, че

$$a - l = \lambda(j - l)$$

и значи A лежи върху правата JL. Аналогично заключаваме, че точката B е върху правата JK.

Предлагаме на читателя да докаже обратното твърдение.



Фигура 5: Правоъгълни триъгълници LKJ с отрицателна ориентация

3 Доказателство на теоремата на Наполеон с комплексни числа

Сега сме готови да завършим доказателството на теоремата на Наполеон. Използвайки означенията на Фигура 1 и Лема 5.2, получаваме

$$l = w_1 b + w_2 c,\ \ k = w_1 c + w_2 a,\ \ \ j = w_1 a + w_2 b, \tag{3}$$

където

$$w_1 = \frac{z_1+1}{3}, w_2 = \frac{z_2+1}{3}.$$

От тези равенства следва, че медицентровете на $\triangle\, LKJ$ и $\triangle\, ABC$ съвпадат, защото от (11) и (3) получаваме,

$$l + k + j = a + b + c.$$

Без ограничение можем да предполагаме, че

$$a + b + c = 0, \tag{4}$$

което влече

$$l + j + k = 0.$$

Нашата цел е да покажем, че

$$l = z_1 j + z_2 k, \tag{5}$$

защото от Лема 5.1 ще следва, че $\triangle\ IGH$ е равностранен. От друга страна, като заместим l, k, j от равенство (3) в (5), получаваме

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2)a + (w_1 - z_1 w_2)b + (w_2 - z_2 w_1)c = 0. \tag{6}$$

Сравнявайки това равенство с (4), виждаме, че

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2) = (w_1 - z_1 w_2) = (w_2 - z_2 w_1)$$

и като вземем предвид равенствата

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}, z_1 + z_2 = 1,$$

заключаваме, че е достатъчно да проверим равенствата

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 1 - z_1 z_2 = 1 - z_1 z_2. \tag{7}$$

Те са изпълнени, защото от (10), получаваме

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = z_2 + z_1 - 1 = 0,\ 1 - z_1 z_2 = 1 - 1 = 0.$$

Следователно равенството (7) е изпълнено и теоремата на Наполеон е доказана.

4 Някои обобщения на теоремата на Наполеон

Теоремата на Наполеон има редица обобщения. Например, построените триъгълници могат да имат произволна форма, т.е. да са подобни и еднакво ориентирани. Тогава техните медицентрове образуват подобен на тях триъгълник. В действителност не е необходимо да разглеждаме медицентровете. За произволен $\triangle\ ABC$ разглеждаме три външни точки A_1, B_1, C_1 , за които

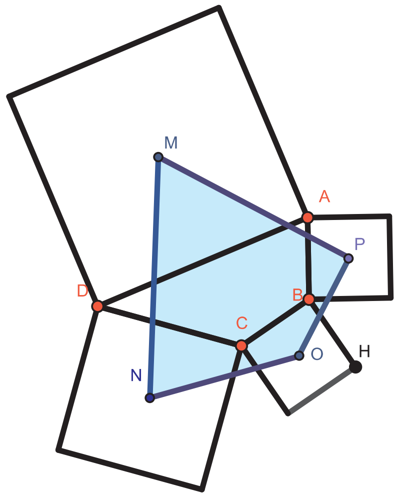
$$\sphericalangle AC_1B + \sphericalangle BA_1C + \sphericalangle CB_1A = 360^{\cdot}$$

Тогава $\triangle\ A_1B_1C_1$ е подобен на триъгълник с ъгли

$$\sphericalangle C_1AB + \sphericalangle B_1AC, \sphericalangle C_1BA + \sphericalangle A_1BC, \sphericalangle A_1CB + \sphericalangle B_1CA.$$

Доказателството на този интересен факт може да се намери например в ([10], стр. 178-181) и [4].

Друго интересно обобщение е предложено от С. Грей [4] . Сега конструкцията стартира с произволен ориентиран n-ъгълник и се разглежда n-ъгълникът, образуван от центровете на правилните n-ъгълници, построени външно на неговите страни. Грей показва, че след повтаряне на тази конструкция $n-2$ пъти се получава правилен n-ъгълник (той може и да е звездообразен).



Фигура 6: Четириъгълници и теорема на Наполеон

Имайки предвид последното обобщение на теоремата на Наполеон може да се постави въпроса дали е възможно да се получи правилен n-ъгълник след по-малко от $n-2$ стъпки. Например, в случая $n=4$ лесно може да се провери с Geogebra, че за произволен четириъгълник това не е вярно (виж Фигура 6). Ето защо е естествен въпросът за описанието на n-ъгълниците, за които се получава правилен n-ъгълник след първата стъпка. За произволно n отговорът на този ъпрос не ни е известен, но в случая $n=4$ той се дава в следното

Упражнение 4.1. *Върху страните на четириъгълник външно са построени квадрати. Да се докаже, че:*

(а) Центровете на квадратите са върхове на четириъгълник с равни и перпендикулярни диагонали.

(в) Центровете на квадратите са върхове на квадрат тогава и само тогава, когато първоначалният четириъгълник е успоредник.

Упътване. Нека a, b, c, d са комплексните числа, съответстващи на върховете на четириъгълника. За да докажете (а) изразете комплексните числа на центровете M, N, P, Q на квадратите чрез a, b, c, d и покажете, че $n - q = i(m - p)$. За (в) използвайте, че $MP \perp NQ$ за да заключите, че $MNPQ$ е квадрат точно когато $MN \parallel PQ$. Сега изразете това условие чрез a, b, c, d.

Накрая ще разгледаме едно обобщение на теоремата на Наполеон, мотивирано от Упражнение 2.1 .

Упражнение 4.2. *Върху страните на неравностранен триъгълник са построени външно правилни n-ъгълници. Да се докаже, че техните центрове са върхове на равностранен триъгълник само при $n=3$.*

Упътване. Докажете и след това използвайте факта, че комплексните числа a, b, c са върхове на равностранен триъгълик тогава и само тогава, когато $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

5 Допълнение: Комплексни числа и геометрия

Една от основните трудности за първокурсниците в университетите е курсът (курсовете) по математика и по-конкретно липсата на опит за работа с тригонометрични функции и комплексни числа. Използването на последните при подготовката на бъдещите учители е сведено до минимум поради утвърденото мнение, че това е алгоритъм, който, макар и не много ясен, работи чрез прилагане само на формални алгебрични пресмятания.

По долу са изложени някои стандартни факти, изпозвани в предишните параграфи. Основната идея при използването на комплексните числа в геометрията е, че всяка точка A в равнината може да се отъждестви с комплексно число, което ще означаваме със същата малка буква a. Ако комплексното числото $a \in \mathbb{C}$ е умножено с реално число $\lambda > 0$, то трансформацията

$$a \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda a \in \mathbb{C}$$

е хомотетия с център началото O и коефициент λ. Аналогично умножението с $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ дефинира ротация на ъгъл φ с център O. Ще отбележим, че въртенето на ъгъл φ се извършва в положителна посока, т.е. обратно на часовниковата стрелка.

Всеки $\triangle ABC$ определя равенство от вида

$$a = z_1 b + z_2 c, \quad z_1 + z_2 = 1, \tag{8}$$

където $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ясно е, че коефициентите z_1, z_2 са еднозначно определени ако $B \neq C$. Наистина, ако

$$z_1 b + z_2 c = \widetilde{z_1} b + \widetilde{z_2} c$$

и

$$z_1 + z_2 = \widetilde{z_1} + \widetilde{z_2} = 1$$

то

$$(z_1 - \widetilde{z_1}) b = (\widetilde{z_2} - z_2) c.$$

Тъй като $b \neq c$ и $z_1 - \widetilde{z_1} = \widetilde{z_2} - z_2$, получаваме

$$z_1 = \widetilde{z_1}, z_2 = \widetilde{z_2}. \tag{9}$$

В сила е следната

Лема 5.1. $\triangle ABC$ *е равностранен точно когато равенството* (8) *е изпълнено при*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Доказателство. Можем да предположим , че комплексното число

$$m = \frac{b+c}{2},$$

отговарящо на средата на отсечката BC е числото 0. Тогава в зависимост от ориентацията на $\triangle ABC$ имаме

$$a = \pm i \tan 60^o b = \pm i\sqrt{3} b,$$

тъй като A се получава с ротация на $\pm 90^o$ (т. е. умножение по $\pm i$) и хомотетия (т.е. с умножение) с коефициент $\tan 60^o = \sqrt{3}$.

Забележка 5.1. *Числата z_1, z_2 са комплексните корени на уравнението $z^3 = 1$ и изпълняват равенствата*

$$z_1 + z_2 = 1, z_1 z_2 = 1, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1. \tag{10}$$

Забележка 5.2. *Равенствата* (8) *са много полезни и могат да се използват за получаване на различни версии на класическата теорема на Наполеон.*

Упражнение 5.1. *Да се намерят необходими и достатъчни условия в термините на коефициентите z_1, z_2 в* (8) *така, че $\triangle ABC$ да е правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$.*

Упътване. $\triangle ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ точно когато

$$c - a = (b - a)i\lambda$$

за реално число $\lambda \neq 0$. От това равенство и (8) следва, че

$$(z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda)(c - b) = 0,$$

откъдето

$$z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda = 0.$$

Отговор.

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}$$

за някакво реално число $\lambda \neq 0$.

Упражнение 5.2. *Да се намерят необходими и достатъчни условия в термините на коефициентите z_1, z_2 в* (8) *така, че $\triangle ABC$ да е равнобедрен и правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$.*

Отговор.

$$z_1 = \frac{1 \mp i}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

В следващата лема е намерен медицентърът на равностранния триъгълник от Лема 5.1.

Лема 5.2. *Ако $\triangle ABC$ е равностранен и равенството* (8) *е изпълнено с*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1},$$

то за неговия медицентър имаме

$$\frac{a + b + c}{3} = w_1 b + w_2 c,$$

където

$$w_1 = \frac{(z_1 + 1)}{3}, w_2 = \frac{(z_2 + 1)}{3}.$$

Ние пропускаме доказателството на горното равенство.

Да отбележим, че от равенството (10) следва, че

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{11}$$

Сега ще дадем по-точно описание на точките L, K, J на Фигура 1. На нея триъгълникът ABC е ориентиран по часовниковата стрелка и е важно да се отбележи, че $\vartriangle ABJ$, $\vartriangle BCL$ и $\vartriangle CAK$ имат една и съща ориентация.

В сила е следната модификация на Лема 5.1 с отчитане на ориентацията.

Лема 5.3. *$\triangle ABC$ е равностранен с положителна ориентация (обратна на часовниковата стрелка) точно когато равенството* (8) *е изпълнено с*

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Аналогично, Упражнения 5.1 и 5.2 приемат следния вид:

Упражнение 5.3. *$\triangle ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ и положителна ориентация, точно когато*

$$a = z_1 b + z_2 c,$$

където

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}$$

за някакво реално число $\lambda > 0$.

Забележка 5.3. *Равенството*

$$a = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2} b + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2} c$$

може да се запише във вида

$$a = \frac{1+i\mu}{1+\mu^2} b + \frac{\mu^2 - i\mu}{1+\mu^2} c$$

след субституцията

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

Упражнение 5.4. *$\triangle ABC$ е равнобедрен и правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ и положителна ориентация, точно когато*

$$a = \frac{1-i}{2} b + \frac{1+i}{2} c.$$

Литература

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, NY, 1961.

[2] J. Douglas, *On Linear Polygon Transformation*, Bull Amer Math Soc, **46** (1940), 551 – 560.

[3] R.H. Eddy and R. Fritsch, *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle*, Math. Mag. **67**, (1994), 188 – 205.

[4] S. B. Gray, *Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons*, The American Mathematical Monthly, **110(3)** (2003), 210 – 227.

[5] B. Grunbaum, *Metamorphosis of Polygons, in The Lighter Side of Mathematics*, R.K.Guy and R.E.Woodrow (eds), MAA, 1994.

[6] B. H. Neumann, *A Remark on Polygons, J London Math Soc*, **17** (1942), 165 – 166.

[7] T. Pappas, *Napoleon's Theorem*, The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989.

[8] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[9] F. Schmidt, *200 Jahre franzosische Revolution–Problem und Satz von Napoleon*, Didaktik der Mathematik **19**, (1990) 15 – 29.

[10] D. Wells, *You Are a Mathematician*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[11] J.E. Wentzel, *Converses of Napoleon's Theorem*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 339 – 351.

[12] $http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat\_point.shtml$