Úr kyrrstæðu í virka verkefnagerð

Vladimir Georgiev, Yuki Kurokawa
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Stuttur inngangur

Meðan starfsemi verkefnagerðarstofunnar (e. problem posing lab) í Pisa stóð yfir kviknaði áhugi á að læra eitthvað um þau verkfæri og aðferðir sem notuð eru í öðrum löndum til þess að kynna stærðfræðilegar röksemdafærslur á aðlaðandi hátt. Þessi möguleiki var til staðar þar sem prófessor Kurokawa var gestur stærðfræðideildarinnar í Pisa á tímabilinu apríl - september 2011.

Aðalmarkmið þessa kafla er eftirfarandi:

- Að reyna að finna út hvernig hægt er að tvinna saman verkefnagerðina í Pisa og japanska reynslu af stærðfræðikennslu.

Í einni af verkefnagerðarstofunni vorið 2011 í Písa voru alþjóðlegir þátttakendur: nemendur (tilvonandi kennarar) frá Spáni og Ítalíu. Störf stofunnar voru skipulögð af höfundum þessa kafla, þ.e. við höfðum alþjóðlega þátttöku á öllum stigum.

2 Dæmi fyrir mismunandi getustig

Við byrjum á mjög einföldum dæmum af frægum japönskum verkefnum með reikningum án þess að nota neinar jöfnur. Það er mikilvægt að leggja áherslu á að uppruni þessara verkefna og dæma er ekki tilbúningur heldur eru þau byggð á raunverulegum vandamálum.

(Trönu og skjaldböku útreikningar) Þetta dæmi er byggt á aðstæðum úr raunveruleikanum (sjá mynd 1) og fyrir það þurfum við líkan með þægileg upphafsgildi.

Mynd 1: Trönu og skjaldböku útreikningar

Líkanið er byggt á eftirfarandi athugunum (sjá Mynd 2):

Ef við höfum 70 höfuð (trönur og skjaldbökur) þá er fjöldi fóta háður fjölda trana. Möguleikarnir eru:

- Við höfum 70 trönur og 0 skjaldbökur;
- Við höfum 69 trönur og 1 skjaldböku;
- Við höfum 68 trönur og 2 skjaldbökur;

- $\cdots$

Þessir möguleikar eru gefnir í töflu 1.

Höfuð (70)				
Trönur	70	69	68	$\cdots$
Skjaldbökur	0	1	2	$\cdots$

(1)

Gerum nú ráð fyrir að heildarfjöldi fóta sé 222. Í töflu 2 eru mismunandi möguleikar skoðaðir.

Fætur (222)				
Trönur	140	138	136	$\cdots$
Skjaldbökur	0	4	4	$\cdots$
ALLS	140	142	144	$\cdots$

(2)

Ljóst er að síðasta röðin í þessari töflu byrjar á 140 og næstu liðirnir fást með því að bæta 2 við í hvert skipti, þ.e.

$$140(+2) \Rightarrow 142(+2) \Rightarrow 144(+2) \Rightarrow \cdots$$

Spurningin er nú:

- Hversu mörg skref þurfum við að taka til þess að byrja í 140 og enda í 222?

Til dæmis ef við þurfum að byrja í 140 enda í 142 þurfum við að taka

$$\frac{142 - 140}{2} = 1$$

skref, til að byrja í 140 og enda í 144 þurfum við

$$\frac{144 - 140}{2} = 2$$

skref og til að byrja í 140 og enda í 222 þurfum við

$$\frac{222 - 140}{2} = 41$$

skref. Þar sem hvert skref minnkar fjölda trana um 1 höfum við

$$70 - 41 = 29$$

trönur og 41 skjaldböku.

Mynd 2: Líkan fyrir Trönu og Skjaldböku útreikninga

Umræður um þetta verkefni í verkefnagerðarstofunni snérust um þá staðreynd að horfa má á verkefnið sem jöfnu.

$$4x + 2y = 222,$$

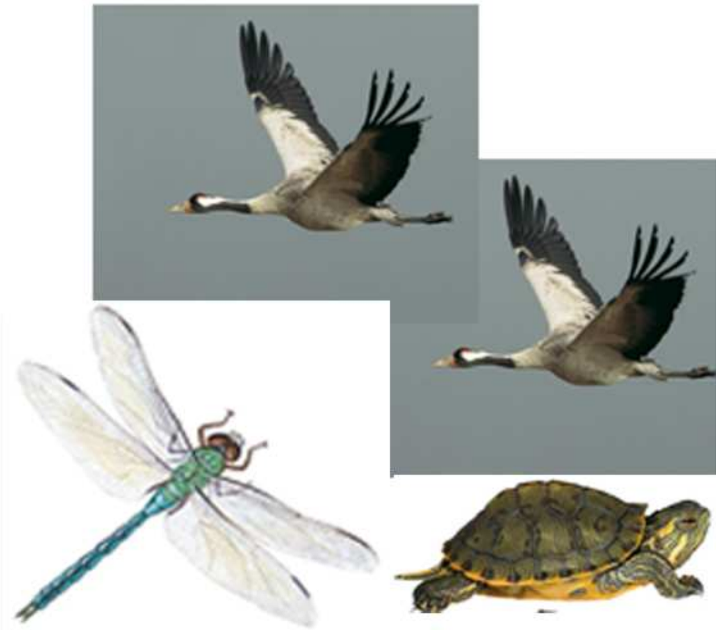
Þar sem x er fjöldi skjaldbaka og y er fjöldi trana. Skilyrðið að heildarfjöldi trana og skjaldbaka sé 70 má rita sem

$$x + y = 70.$$

Slíkt sjónarhorn virkar þó ekki ef um er að ræða barnaskólanemendur.

Annað mögulegt, velþekkt verkefni er um trönur, skjaldbökur og drekaflugur. Í því verkefni er ekki einungis tekið tillit til fóta heldur einnig vængja (sjá mynd 3). Við getum þó fundið lausn á þessu verkefni með því að nota töflur svipaðar 1 og 2.

Ábending: Ef drekaflugur eru 9, heildarfjöldi trana og skjaldbaka er 35, og heildarfjöldi fóta trana og skjaldbaka er 118 þá er hægt að beita lausninni á fyrra verkefninu til þess að finna fjölda trana og skjaldbaka.



Mynd 3: Verkefni fyrir trönur, skjaldbökur og drekaflugur

Það er áhugavert að bera saman reynslu frá Japan við reynslu úr stærðfræðikeppnum fyrir hópa sem stærðfræðideildin í háskólanum í Pisa hefur skipulagt. Dæmi:

Dæmi 1. *Leðurblaka át 1050 drekaflugur samtals fjögur kvöld í röð. Hvert kvöld át hún 25 fleiri en hún gerði kvöldið áður. Hversu margar drekaflugur át hún hvert kvöld? Leystu dæmið með bókstafareikningi.*

Það er ljóst að leysa má dæmið auðveldlega með því að láta x tákna fjölda drekafluga sem leðurblakan át fyrsta kvöldið. Þá höfum við einföldu jöfnuna:

$$x + (x + 25) + (x + 50) + (x + 75) = 1050$$

þ.a. $4x + 150 = 1050$ og við fáum $x = 225$.

Meðan vinna stærðfræðistofunnar í Pisa stóð yfir var sérstakur Flash leikur með borinn saman við dæmin hér að ofan. Leikurinn tengist eftirfarandi Díofantískri jöfnu:

$$Bx = A + Cy, \tag{3}$$

þar sem A, B, C eru náttúrulegar tölur sem við veljum í upphafi leiksins: Breyturnar x, y má túlka með tveimur tökkum, rauðum og grænum (þeir birtast eftir að upphafstölur hafa verið settar inn, sjá mynd 6).

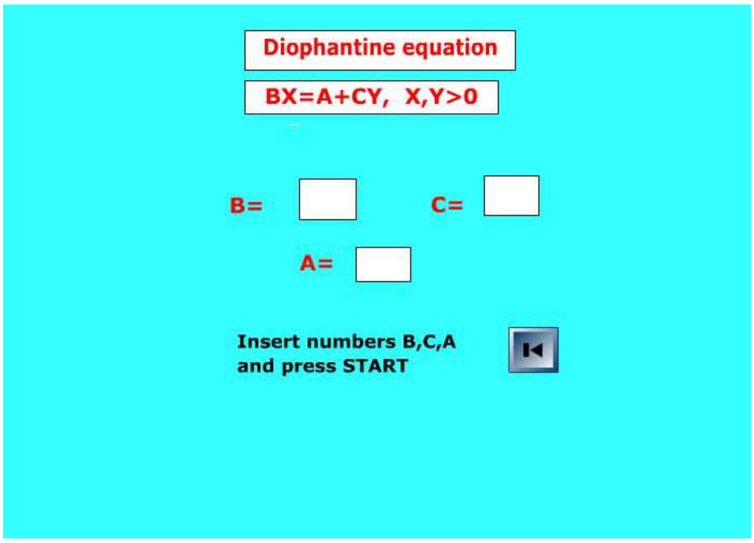
Ef smellt er á græna takkan þá samsvarar það aðgerðinni

$$x \Rightarrow x + 1,$$

eða

$$Bx \Rightarrow Bx + B.$$

Mynd 4: Verkefni um leðurblökur og drekaflugur



Mynd 5: Leikur með Díofantosarjöfnu

Ef smellt er á rauða takkann samsvarar það aðgerðinni

$$y \Rightarrow y + 1,$$

eða

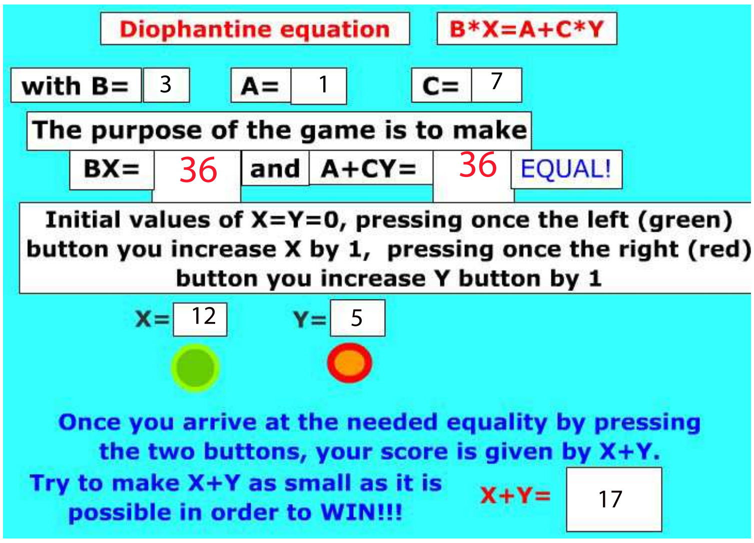
$$Cy \Rightarrow Cy + C$$

Leikurinn fer þannig fram að kennarinn gefur tölurnar B, C og A, nemandinn (spilarinn) velur sér sína leikáætlun: smella $x-$sinnum á græna takkann og $y-$sinnum á rauða takkann, forritið reiknar $Bx - Cy$ og ef þessi tala er sú sama og A þá lýkur leiknum og heildarfjöldi aðgerða

$$x + y$$

er sýndur á skjánum.

Stigin eru nákvæmlega talan $x + y$ og tilgangur leiksins er að hafa sem minnsta summu $x + y$. Ef til dæmis valið er $B = 3, C = 7, A = 1$ með lausn $x = 12, y = 5$ fást $12 + 5 = 17$ stig. Sjá mynd 6.



Mynd 6: Leikur með Díofantosarjöfnu

Hægt er að finna betri lausn, $x = 5, y = 1$ með stigafjöldann $5 + 2 = 7$.

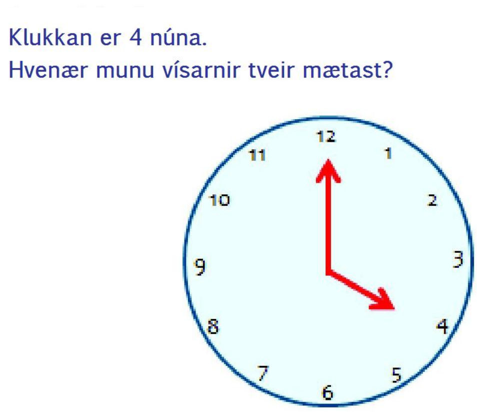
Í stærðfræðistofunni voru ýmsar mögulegar spurningar ræddar:

- Finndu þrenndir A, B, C þ.a. Díofantosarjafnan hafi enga lausn;
- Finndu nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þ.a. Díofantosarjafnan hafi a.m.k. eina lausn;
- Finndu algrím til að vinna eða til að finna besta $x + y$

Niðurstaða þessarar tilraunar til þess að blanda saman ítalskri og japanskri kennslureynslu lofar góðu og sýnir möguleika á frekari þróun.

3 Verkefni sem hægt er að þróa frekar

Á mynd 7 er kynntur möguleiki á verkefni sem hægt er að vinna með.



Mynd 7: Klukkuverkefni

Mögulegar umræður og lausnir má finna með því að nota eftirfarandi.

Ábending. Á hverri mínútu snýst hver vísir klukkunnar réttsælis um

$$\text{Langi vísirinn} : 360^\circ/60 = 6^\circ,$$

$$\text{Stutti vísirinn} : 30^\circ/60 = 0.5^\circ.$$

Þar af leiðandi, á hverri mínútu minnkar hornið milli vísanna um

$$6^\circ - 0.5^\circ = 5.5^\circ.$$

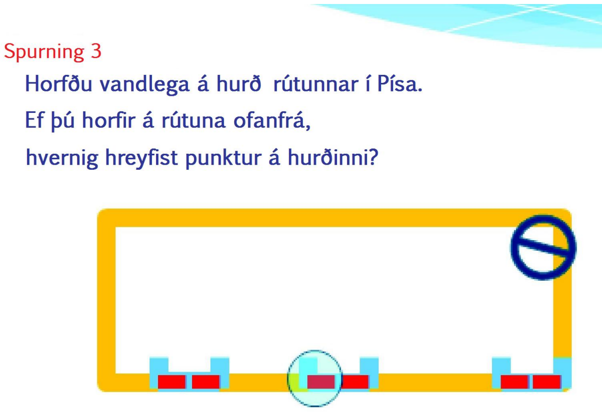
Hornið milli vísanna tveggja kl. 4 er 120°. Þar af leiðandi fæst

$$120/5.5 = 21.81818181$$

Svar.

$$4 : 21 : 49$$

Á mynd 8 sést önnur hugmynd sem kynnt var og rædd í stærðfræðistofunni



Mynd 8: Hurðaverkefnið

Þátttakendur stofunnar fengu eftirfarandi tillögu: reyndu að horfa í kring um þig og kynna til sögunnar eitthvert stærðfræðilíkan og verkefni. Nokkur af mest notuðu farartækjunum í Pisa eru rútur af eldri kynslóð sem hafa hurðaopnunarkerfið sem sýnt er á mynd 8. Í vissum skilningi má tengja verkefnið við nokkur dæmi sem sýnd höfðu verið þátttakendum stofunnar. Meðal þeirra dæma var eftirfarandi verkefni tekið úr kaflanum „Astronomy and instruments to draw quadratic curves" í [2].

Dæmi 2. *(sjá kaflann "Astronomy and instruments to draw quadratic curves"í [2]). Nemandi hins fræga Galileo Galilei uppgötvaði nýja plánetu sem ferðast á sporbaugslaga braut um sólu, með hálfása a og b. G.r.f. að athugandi sé staðsettur á punkti í plani sporbaugsins þannig að sporbaugurinn sjáist frá þeim punkti við* 90° *horn. Reiknið fjarlægðina frá miðju sporbaugsins að punkti athugandans.*

Hægt er að nota Kartesarhnit og finna útreiknaða lausn með því að lýsa, með jöfnu, mengi punkta þar sem sporbaugurinn sést undir réttu horni. Verkefni af þessari gerð má finna á mismunandi stöðum. Í [4] er til dæmis að finna nokkur spennandi dæmi í tengd keilum. Þar sem hagnýt reynsla nemanda í framhaldsskóla er ekki mikil, ákváðum við í verkefnagerðarstofunni að halda okkar við stefnuna úr [1] og [2]. Hægt er að nota GeoGebru til að leysa dæmi (2). Aftur á móti reyndu japanskir starfsbræður okkar, sem höfðu enga vitneskju um tilvist GeoGebru, aðra aðferð byggða á útbreiddri upplýsingatækni sem notuð er í þeirra kennslustofum, þ.e.a.s. PowerPoint.

Heimildir

[1] Georgiev, V., Mushkarov, O., Ulovec, A., Dimitrova, N., Mogensen, A., Sendova, E. MEETING in Mathematics, Demetra Publishing House, Sofia, 2008

[2] A. Ulovec, J.Anderson, S. Čeretková, N. Dimitrova, V. Georgiev, O.Mushkarov E Sendova, *MATH to EARTH* 2010.

[3] Kajikawa, *....needs translation from Japanese .....*

[4] J. Šunderlk and E. Barcková, *Best spot - investigation with circles*, chapter in this book.

[5] M. Yoshida (revised and commented by S. Ohya) "Jinkoki", Iwanami Shoten, Japan, 1977.