Dal approccio statico all’approccio problem posing dinamico.

Vladimir Georgiev, Yuki Kurokawa

1 Breve introduzione

Durante le attivitá dei problem posing labs in Pisa era interessante ad imparare qualcosa per i metodi seguiti in altri paesi per far diventare piu attraente l’insegnamento in Matematica. La possibilita’ si é realizzata quando la Proff.ssa Kurokawa ha visitato il Dipartimento di Matematica dell’Universitá di Pisa nel periodo aprile - seetembre 2011.

Lo scopo principale di questo capitolo é:

- vedere come le attivitá in problem posing labs in Pisa si puo complementare con alcune idee e metodi usati in Giappone durante l’insegnamento in Matematica.

Uno dei problem posing labs in Pisa in 2011 aveva partecipazione internazionale. Il lavoro é stato organizzato dei autori di questo capitolo.

2 Esempi di livelli diversi

Iniziamo con esempi abbastanza elementari con problemi Giapponesi ben noti. É importante sottolineare che l’origine di questi problemi non é artificiale, ma é ben collegato con problemi della vita reale.

1. (Cranes e tartarughe calcolo) Partendo della figura 1) si fa un modello matematico semplice.

Figure 1: Cranes e tartarughe calcolo

Il punto di partenza é la seguente osservazione (vedi la Figura 2):

Ci sono 70 teste (cranes o tartarughe) allora il numero delle gambe depende del numero delle tartarughe per esempio. Le possibiliá sono

- abbiamo 70 cranes e 0 tartarughe;
- abbiamo 69 cranes e 1 tartaruga;
- abbiamo 68 cranes e 2 tartarughe;

- $\cdots$

Le possibiliá sono presentati nella Tabella (1).

Teste (70)				
Cranes	70	69	68	$\cdots$
Tartarughe	0	1	2	$\cdots$

(1)

Adesso passiamo al calcolo delle gambe. É fatto nella Tabella successiva

Gambe (222)				
Cranes	140	138	136	$\cdots$
Tartarughe	0	4	4	$\cdots$
TOTALE	140	142	144	$\cdots$

(2)

Sembra chiaro che l'ultima riga della tabella inizia con 140 ed ad ogni passo successsivo aggiungiamo 2, cioé

$$140(+2) \Rightarrow 142(+2) \Rightarrow 144(+2) \Rightarrow \cdots$$

La domanda posta adesso sia:

- Quanti passi dobbiamo fare per partire da 140 ed arrivare a 222?

Per esempio partendo da 140 e arrivando a 142 dobbiamo fare

$$\frac{142-140}{2} = 1$$

passo, per la stessa operazione partendo da 140 e arrivando a 144 ci servono

$$\frac{144-140}{2} = 2$$

passi e per partire da 140 e arrivare a 222 dobbiamo fare

$$\frac{222-140}{2} = 41$$

passi. Per ogni passo noi dobbiamo diminuire il numero di cranes con uno avremmo

$$70 - 41 = 29$$

cranes e 41 tartarughe.

Le discussioni che riguardavano questo problema erano concentrati sul fatto che potevamo considerale la seguente equazione

$$4x + 2y = 222,$$

dove x é il numero delle tartarughe, mentre y é il numero dei cranes. La condizione che il nuomero di tutti cranes e tartarughe é 70 si poteva descrivere con l'equazione

$$x + y = 70.$$

Questo approccio non funzione bene quando si lavora con aluni delle scuole primarie.

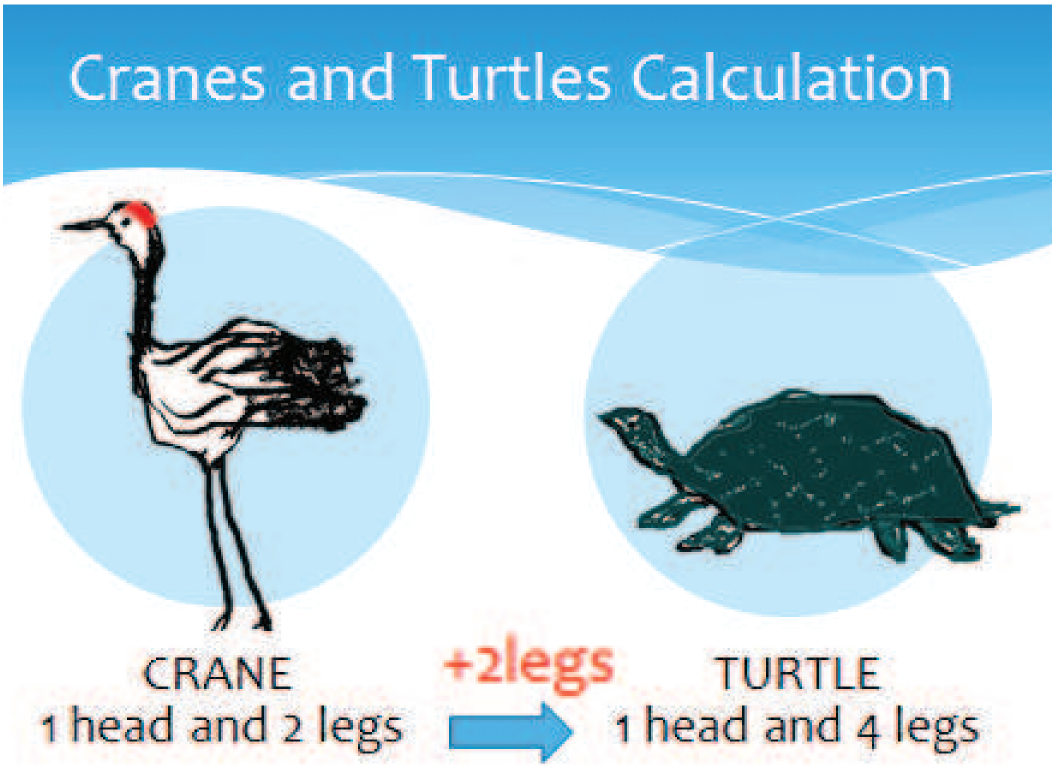

Figure 2: Modello conr Cranes e Tartarughe

Altri generalizzazioni del problema si possano fare in varie direzioni, una possibilitá e di introdurre il problema per cranes, tartarughe e dragonflies. In questa nuova situazione si prendono in considerazioni il numero delle gambe e il numero di winds (vedi la figura 3). Usando Tabelle simile alle Tabelle (1) e (2), si puo arrivare alla soluzione del problema.

Soggerimento. Dragonflies sono 9, numero totale di cranes e tartarughe é 35, e il numero totale delle zampe (gambe) dei cranes e tartarughe é 118. Uno puo applicare l'approccio precedente e trovare il numerodi cranes e il nuomero della tartarughe.

Figure 3: Problem for Cranes, Turtles and Dragonflies

Éra interessante a confrontare l'esperienza Giapponese con l'esperienza della gare a squadre in Matematica, organizzati del Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Pisa.

Possiamo dare un esempio:

Exercise 1. *Bat é riuscito a mangiare 1050 dragonflies per quatro nottee consequtivi. Ogni notte lei mangiaca 25 di piú in confronto con la notte precedente. Quanti dragonflies sono stati mangiati ogni notte?*

Il problema si puo risolvere introducendo x il numero di dragonflies tali che la bat ha manggiato la prima notte. Allora abbiamo la seguente equazione:

$$x + (x + 25) + (x + 50) + (x + 75) = 1050$$

cosí $4x + 150 = 1050$ e troviamo $x = 225$.

Figure 4: Problem for Bats and Dragonflies

Durante il lavoro in math labs in Pisa un giocco specifico preparato con Flash script é stato usato. Questo giocco é stato confrontato con l'esempio precedente. Il giocco permette a risolvere l'equazione diofantea

$$Bx = A + Cy, \tag{3}$$

dove A, B, C sono numeri naturali che devono essere scelti prima del inizio del giocco, mentre x, y possano essere interpretati di 2 pulsanti (vedi la Figura 5).

Pressando il pulsante verde si puo effettuare l'operazione

$$x \Rightarrow x + 1,$$

o

$$Bx \Rightarrow Bx + B.$$

Pressandi il pulsante rosso, si fa l'operazione

$$y \Rightarrow y + 1,$$

o

$$Cy \Rightarrow Cy + C.$$

In questo modo dopo l'introduzione dei numeri B, C, A, lo studente(il gioccatore) deve scegliera la sua strategia: pressando $x --$ volte il pulsante verde e $y --$ volte il pulsante rosso, il

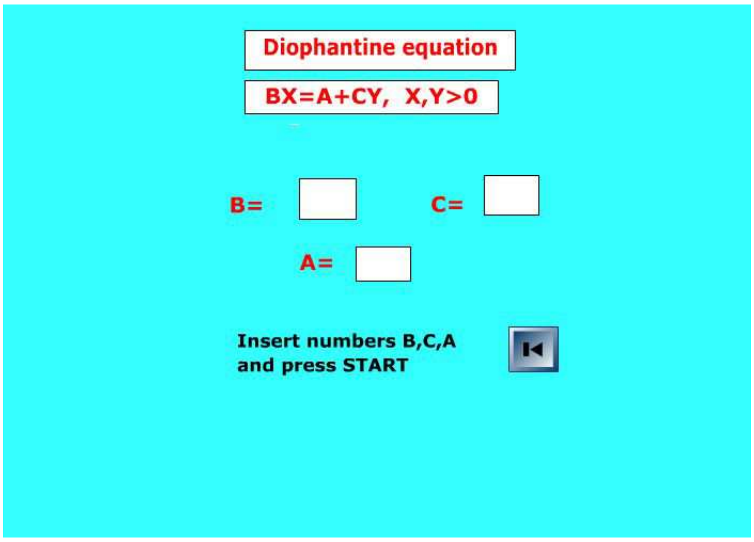

Figure 5: Giocco con equazione Diofantea

programma calcola $Bx - Cy$ e se questo numero coincide con A allora il giocco finisce e il numero totale di tutti operazioni

$$x + y$$

si vede sullo scermo.

Il risultato del gioccatore é $x + y$ e il vincitore é il gioccatore con risultato piú piccolo possibile. Un esempio é quando si sceglie $B = 3, C = 7, A = 1$ e $x = 12, y = 5$ e una soluzione con risultato finale $12 + 5 = 17$ presentato sulla Figura 6.

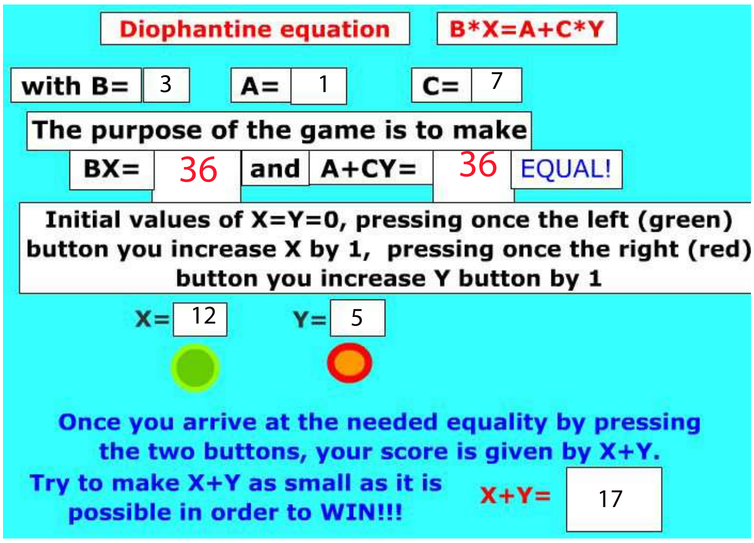

Figure 6: Giocco con l'equazione Diofantea

Uno puo trovare una soluzione migliore. $x = 5, y = 2$ con risultato finale $5 + 2 = 7$.

Uasndo il link Diophantine Game uno puo provare il giocco.

Ci sono varie domande collegati con questo giocco.

- trovare le triple A, B, C tale che l'equazione Diofantea associata con questi numeri non ha soluzione;
- trovare le condizioni sufficenti e necessari tali che l'equazione Diofantea ha al meno una soluzione;
- teovare algoritmo per vincere.

I risultati di questo tentativo mostrano la possibilita di usare l'esperienza internazionale e in particlare di avere combinazione tra i metodi usati in Italia e in Giappone.

3 Quesiti per continuare.

Un altro esempio collegato con problema collegato con un orologgio si vede sulla Figura 7.

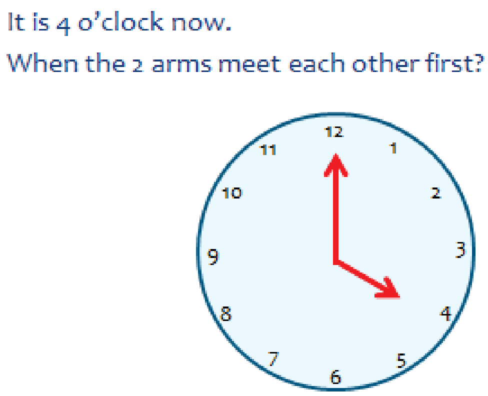

Figure 7: Problema dell'orologgio

Le discussioni per la soluzione possano essere basati sul segente.

Soggerimento. Ogni minuto le arms fanno rotazione in senso orario di

$$Long\ arm : 360^0/60 = 6^0,$$

$$Short\ arm : 30^0/60 = 0.5^0.$$

Cosi ogni munuto l'angolo tra le due arms diminuira' con

$$6^0 - 0.5^0 = 5.5^0.$$

L'angolo dei due bracci in 4 nel pomeriggio é 120^0. Cosí otteniamo

$$120/5.5 = 21.81818181^0.$$

Risposta.

$$4 : 21 : 49.$$

Altro argomento introdotto e discusso é presentato sulla Figura 8.

Formalmente, tutti partecipanti di math labs sono stati consigliati di seguire approccio basato sulle osservazioni del mondo intorno trovando le possibilitá di costruire modelli matematici opportuni e provare a risolvere i problemi principlai. Ecco come il gruppo é arrivato ad un

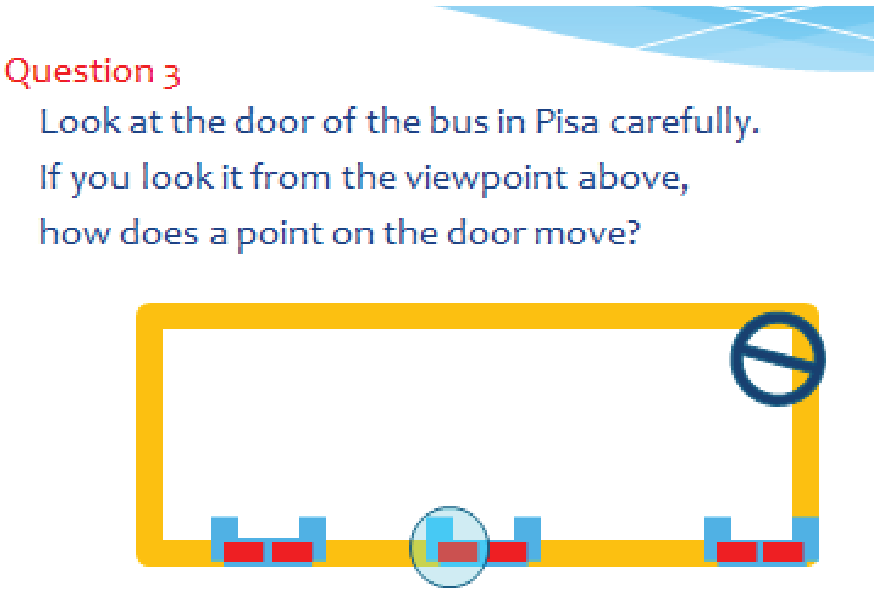

Figure 8: Problema della porta

esempio concreto. In Pisa si usano bus di una generazione vecchia e le perte dei bus si apronon in un modo particolare (vedi la Figura 8. Il modello costruito é stato un punto di partenza del lavoro e dopo un pó di tempo si é chiarito che il problema ha un punto di intersezione essenziale con un altro problema studiato nel capitolo "Astronomy and instruments to draw quadratic curves" in [2].

Exercise 2. *(see chapter "Astronomy and instruments to draw quadratic curves" in [2]). Uno studente del famoso Galileo Galilei scopri un pianeta nuovo, che orbitava intorno al sole con semi-assi a e b.Supponete che un osservatore é posizionato su un punto del piano dell'ellisse, tale che l'ellisse é osservato da questo punto ad un angolo di 90 gradi. Calcolate la distanza tra il centro dell'ellisse e il punto d'osservazione.*

Si puo usare un riferimento con coordinate cartesiani e trovare una soluzione analitica con una equazione che descrive tutti punti tali che l'ellissse é osservato da questo punto ad un angolo di 90 gradi. Problemi di questo tipo sono ben studiati. Un riferimento utile é [4] dove si possano trovare altri esempi interessanti. Tenendo conto che l'esperienza prattica dei partecipanti di math labs non éra di un livello altissimo le nostre preferenze erano di seguire l'approccio di [1], [2]. Si puo usare GeoGebra per il problema (2). I colleghi giapponesi, senza avere informazione dell'esistenza di Geogebra hanno provato utilizzo di un altro mezzo usato spesso nel lavoro in Giappone - Power Point from Microsoft Office 2010.

Non é comodo di utilizzare questo approccio senza avere in disposizione Microsoft Office che non é un software del tipo open source.

Ecco il link al ppt file Power Point application

Per studiare il problema del bus a Pisa (vedi la Figura 8) si puo utilizzare Geogebra.

Link a Geogebra file.

L'esempio da la possibilitá di confrontare Geogebra e Power Point e vedere che il software al fondo é solo un mezzo utile per insegnare Matematica.

Altri esempi sono stati studiati della studentessa Eva Cricca usando Power Point presentation e Geogebra.

Ecco il punto di partenza del lavoro della studentessa

Exercise 3. *Sappiamo che il minimo della distanza tra due punti nello spazio viene realizzato dal segmento tra i due. Ma cosa succede se tra i punti A e B viene posto un ostacolo con ben precise regole per attraversarlo?*

Cosi possiamo proporre i problemi collegati

- ottimizzare la distanza tra due punti, quando l'ostacolo e un fiume (per la soluzione il link é Pwoer Point soluzione con link)
- ottimizzare la distanza tra due punti, quando l'ostacolo é un lago (ellisse) (per la soluzione il link é Geogebra soluzione é link)

References

[1] Georgiev, V., Mushkarov, O., Ulovec, A., Dimitrova, N., Mogensen, A., Sendova, E. MEETING in Mathematics, Demetra Publishing House, Sofia, 2008

[2] A. Ulovec, J.Anderson, S. Čeretková, N. Dimitrova, V. Georgiev, O.Mushkarov E Sendova, *MATH to EARTH* 2010.

[3] Kajikawa, *....needs translation from Japanese .....*

[4] J. Šunderlk and E. Barcková, *Best spot - investigation with circles*, chapter in this book.

[5] M. Yoshida (revised and commented by S. Ohya) "Jinkoki", Iwanami Shoten, Japan, 1977.