# Hreyfifræði biljarðs

Vladimir Georgiev, Irena Georgieva, Veneta Nedyalkova
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

## 1 Stuttur inngangur

Hreyfifræði biljarðs er hreyfikerfi sem samsvarar tregðuhreyfingu punktmassa innan svæðis sem hefur jaðar sem er þjáll á köflum með fjaðrandi endurvarp. Biljarður kemur fyrir sem náttúrlegt líkan fyrir mörg dæmi í ljósfræði, hljóðfræði og klassískri hreyfifræði. Mest áberandi líkanið í safneðlisfræði, Boltzmann gas af fjaðrandi árekstrum harðra kúlna í kassa má auðveldlega einfalda niður í biljarð.

Hreyfikerfi biljarðs er myndað af frjálsri hreyfingu massapunkts (sem kallast biljarðskúla) sem verður fyrir fjaðrandi endurvarpi á jaðrinum. Þetta þýður að punkturinn ferðast eftir gagnvegi með fastan (eininga-) hraða þangað til hann rekst á jaðarinn. Við núningslausan jaðarpunkt endurkastast biljarðskúlan þannig að snertiþáttur hraða þess helst óbreyttur, meðan þverþáttur þess skiptir um formerki. Í tveimur víddum er þessum árekstri lýst með vel þekktu lögmáli úr ljósgeislafræði: innfallshornið er jafnt útfallshorninu. Því hefur biljarðsfræðin og ljósgeislafræðin marga eiginleika sameiginlega.

Eitt af áhugaverðu biljarðsborðunum með sporbaugslögun er sýnt á mynd 1

**Mynd 1:** Sporlaga borð

Einfaldasta biljarðsborðið er hringlaga borð. Lát $\kappa = \kappa(O, r)$ vera hring með miðju $O$ og radíus $r > 0$ (sjá mynd 2). Ef $S_0$ er punktur á hringnum $\kappa$ á mynd 2 og upphafspunktur geislans hefur $S_1$ sem sinn næsta skurðpunkt, þá er það í þessum punkti $S_1$ sem við fáum speglun við innfallshornið $\alpha_1$ jafnt útfallshorninu $\beta_1$. Eftir speglunina heldur geislinn leið sinni áfram og við fáum næsta skurðpunkt geislans, $S_2$, þar sem önnur speglun á sér stað og við fáum

$$\alpha_2 = \beta_2$$

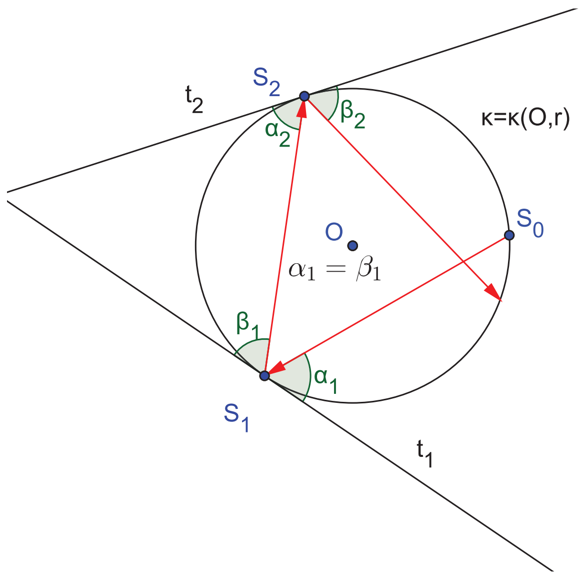
Hver ferill er skilgreindur af upphafspunktinum $S_0$ og speglunarpunktunum

$$S_1, S_2, \cdots$$

á jaðrinum (í þessu tilfelli hringinn $\kappa$).

Tökum fyrst eftir að speglunarpunktarnir $S_1, S_2, \cdots$ gefa okkur að

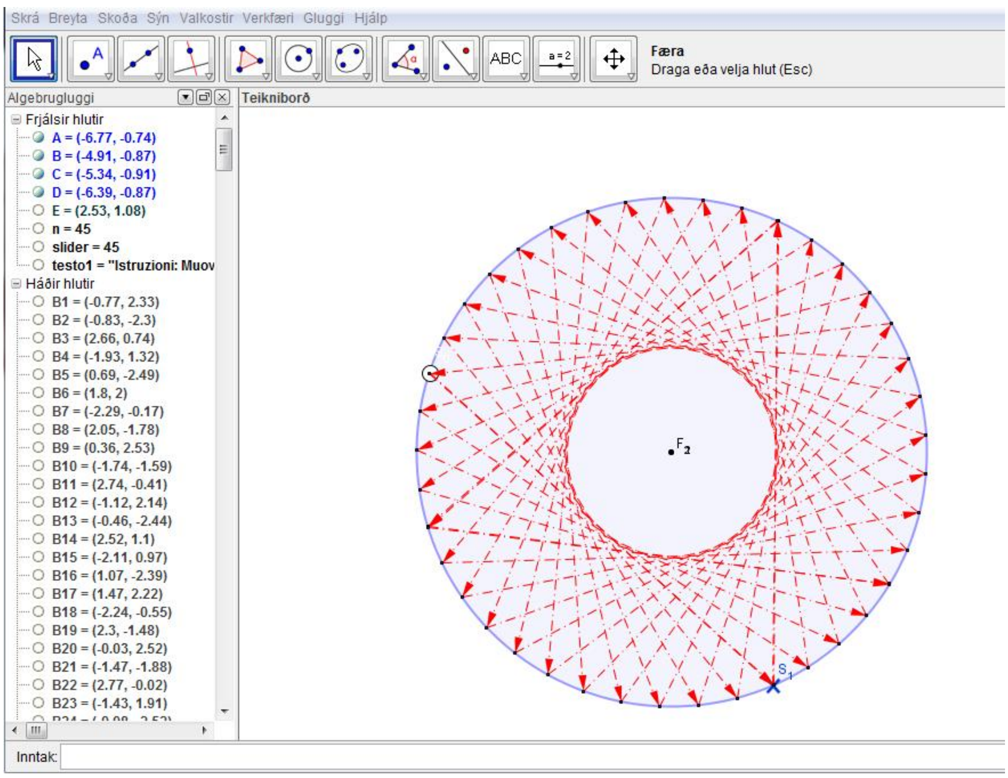
$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \cdots,$$




**Mynd 2:** Hringlaga biljarðsborð

þ.e. hver ferill myndar fast horn við jaðarinn (í þessu tilfelli hringinn $\kappa$).

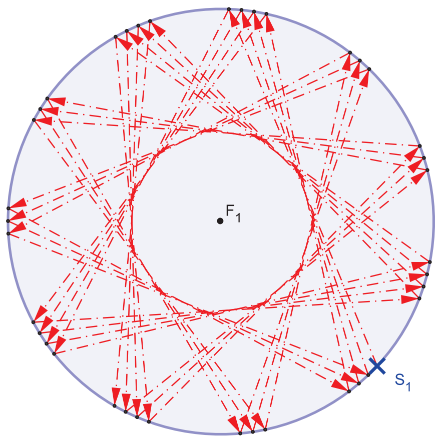
Sami ferill myndar einnig snertla við sammiðja hring og til að skýra nánar þessa staðreynd notum við GeoGebru vinnublað.



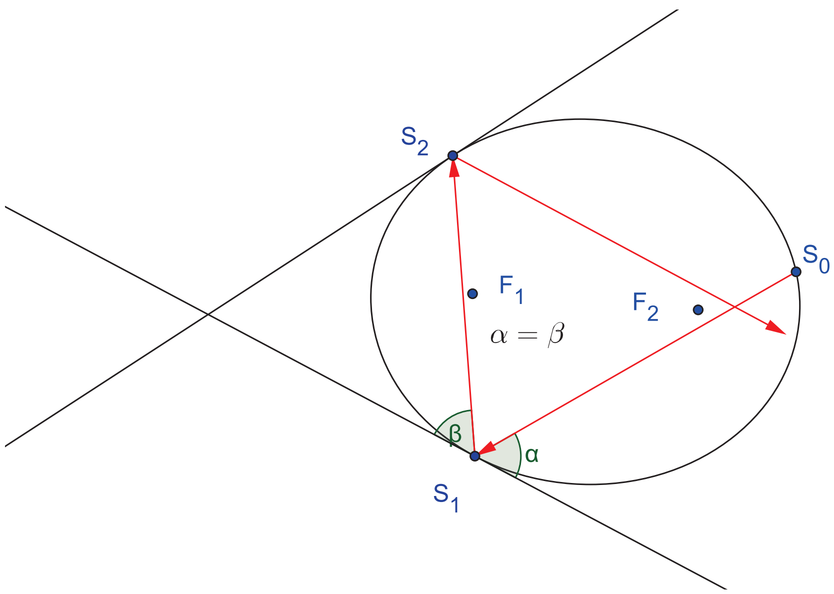

**Mynd 3:** GeoGebruvinnublað fyrir hringinn

Í þessu forriti er notaður nýr möguleiki á því að sameina Java og GeoGebru (sjá viðauka).

Við sjáum að hver ferill helst snertill við sammiðja hringinn.




**Mynd 4:** GeoGebruvinnublað fyrir hring




**Mynd 5:** Biljarðsborð

Ef $S_0$ er punktur á sporbaugnum á mynd 5 og $S_1$ er næsti skurðpunktur, þá höfum við í þeim punkti speglun þar sem innfallshornið $\alpha$ er jafnt útfallshorninu $\beta$. Eftir speglunina heldur geislinn áfram og við fáum næsta skurðpunkt $S_2$ geislans þar sem önnur speglun tekur við.

Áður en við höldum áfram kynnum við nýtt hugtak.

**Skilgreining 1.** *Brenniflötur biljarðs er boglína þannig að ef ferilstefnan er snertill hennar þá* *verður hún aftur snertill hennar eftir hverja speglun.*

Hringlaga biljarður hefur því fjölskyldu af brenniflötum sem samanstendur af sammiðja hringjum.

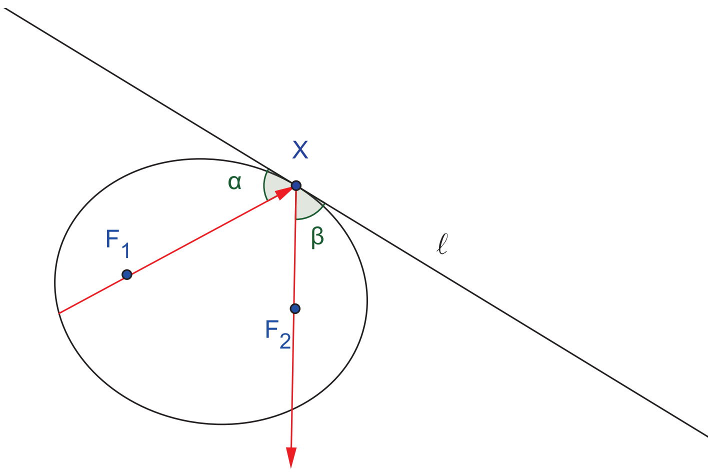
Næsta tilfelli sem við skoðum er keilusnið. Rifjum upp að sporbaugur er mengi þeirra punkta sem hafa fasta samanlagða fjarlægð frá tveimur föstum punktum, en þeir punktar kallast brennipunktar sporbaugsins. Búa má til sporbaug með því að nota snærispotta og binda enda þess við brennipunktana. (Þessa aðferð nota til dæmis trésmiðir og garðyrkjufólk við raunverulegar aðstæður). Breiðbogi er skilgreindur á svipaðan hátt nema að summu fjarlægðanna er skipt út fyrir algildið á mismun þeirra og fleygbogi er mengi þeirra punkta sem eru í jafnri fjarlægð frá gefnum punkti (brennipunkti) og gefinni línu (stýrilínu). Sporbaugar, breiðbogar og fleygbogar hafa allir annars stigs jöfnur í Kartesarhnitum.

## 2 Nokkrir einfaldir eiginleikar

Fyrsta niðurstaðan er eftirfarandi ljósfræðilegur eiginleiki sporbauga.

**Hjálparsetning 1.** *Ljósgeisli sem á uppruna í öðrum brennipunktinum kemur aftur að hinum brennipunktinum eftir speglun á sporbaugnum. Með öðrum orðum, línustrikin sem tengja punkt á sporbaugnum við brennipunktana mynda jafnstór horn við sporbauginn.*

*Sönnun.* Íhugið útgildisverkefnið: fyrir gefna línu $\ell$ og tvo punkta $F_1$ og $F_2$ öðru megin við hana, finnið punkt $X$ á $\ell$ þ.a. fjarlægðin $|F_1X| + |XF_2|$ sé í lágmarki.
Lausn: Speglið $F_1$ um línuna og tengið við $F_2$ með línustriki.




**Mynd 6:** Grunneiginleikar sporbaugs

Skurðpunkturinn við $\ell$ er $X$. Það leiðir af því að hornin mynduð af $F_1X$ og $F_2X$ við $\ell$ eru jafnstór. Á hinn bóginn má finna $X$ á eftirfarandi hátt: Takið fjölskyldu af sporbaugum með fasta brennipunkta $F_1$ og $F_2$. Þá er $X$ punkturinn þar sem sporbaugurinn úr þessari fjölskyldu snertir $\ell$ í fyrsta skipti. Þar af leiðandi er $X$ snertipunktur sporbaugsins sem hefur brennipunktana $F_1$ og $F_2$ og línunnar $\ell$. $\square$

Eins sannar maður ljósfræðilega eiginleika breiðboga og fleygboga. Þessir eiginleikar eru mjög mikið notaðir í smíði hinna ýmsa tækja þar sem ljós kemur við sögu.

**Dæmi 1.** *Ef ljósgjafi er settur á brennipunkt fleygbogaspegils þá mynda spegluðu geislarnir samsíða geisla (eiginleikinn notaður í hönnun ökuljósa)*

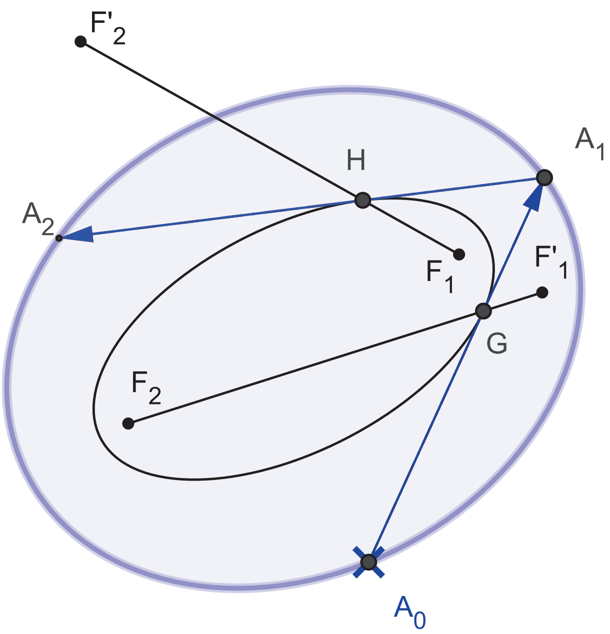
Sporbaugum og breiðbogum með sömu brennipunkta má (í viðeigandi Kartesarhnitum $(x, y)$) lýsa með jöfnunni:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \tag{1}$$

með $0 < a < b$. Hér er $\lambda$ breytilegur stiki; fyrir $-b^2 < \lambda < -a^2$ er ferillinn breiðbogi og fyrir $-a^2 < \lambda$ er hann sporbaugur.

**Setning 1.** *Sporbaugslaga biljarðsborð hefur fjölskyldu af brenniflötum sem samanstendur af sporbaugum og breiðbogum með sömu brennipunkta. Nánar tiltekið, ef strik á biljarðsferlinum sker ekki strikið sem tengir saman brennipunktana $F_1$ og $F_2$, þá sker ekkert strik ferilsins $F_1F_2$ og öll strikin eru snertlar sama sporbaugsins með brennipunkta $F_1$ og $F_2$; ef strik ferilsins sker $F_1F_2$, þá skera öll strik þess ferils $F_1F_2$ og eru þau öll snertlar sama breiðboga með brennipunkta $F_1$ og $F_2$.*

*Sönnun.* Lát $A_0A_1$ og $A_1A_2$ vera samliggjandi strik ferilsins. Gerum ráð fyrir að $A_0A_1$ skeri ekki strikið $F_1F_2$ (hitt tilfellið er leyst á svipaðan hátt). Það fæst út frá ljósfræðilegum eiginleika að hornin $\angle A_0A_1F_1$ og $\angle A_2A_1F_2$ eru jöfn.




**Mynd 7:** Brennifletir

Speglið $F_1$ um $A_0A_1$ í punktinn $F_1'$, og $F_2$ um $A_1A_2$ í punktinn $F_2'$, og setjið; $G = F_1'F_2 \cap A_0A_1$; $H = F_2'F_1 \cap A_1A_2$. Skoðum sporbaug með brennipunkta $F_1$ and $F_2$ sem hefur $A_0A_1$ sem snertil.

Þar sem hornin $\angle F_2GA_1$ og $\angle F_1GA_0$ eru jöfn, snertir þessi sporbaugur $A_0A_1$ í punktinum $G$. Eins gildir að sporbaugur með brennipunkta $F_1$ og $F_2$ snertir $A_1A_2$ í punkti $H$. Við viljum sýna að þessir tveir sporbaugar falli saman sem er jafngilt því að $F_1B + BF_2 = F_1C + CF_2$, sem merkir einfaldlega $F_1'F_2 = F_1F_2'$. Við tökum eftir því að þríhyrningarnir $\triangle\ F_1'A_1F_2$ og $\triangle\ F_1A_1F_2'$ eru eins.

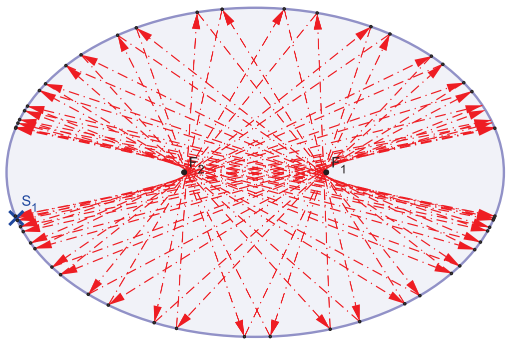
$$F_1'A_1 = F_1A_1; \quad F_2A_1 = F_2'A_1$$

sökum samhverfu, og hornin $\angle F_1'A_1F_2$ og $\angle F_1A_1F_2'$ eru jöfn. Því er

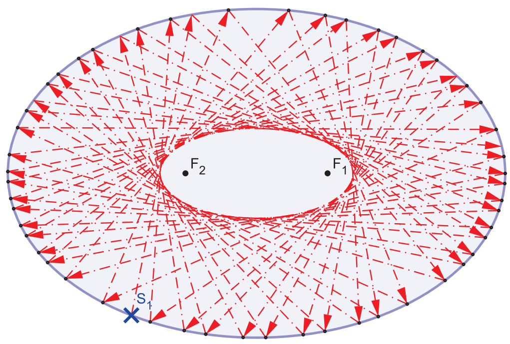
$$F_1'F_2 = F_1F_2',$$

og fæst niðurstaðan af því. $\square$

Eftirfarandi niðurstöður voru fengnar með því að nota GeoGebru forritið. Við höfum breiðboga brenniflöt á mynd 8 og sporbauga brenniflöt á mynd 9.




**Mynd 8:** Breiðboga brennifletir



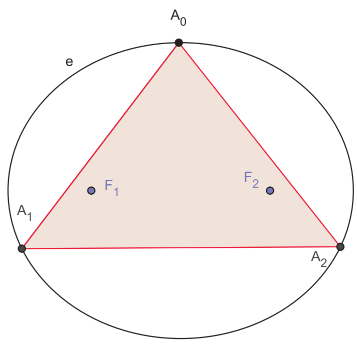

**Mynd 9:** Sporbauga brennifletir

## 3 Einföldustu lotubundnu brautirnar í sporbaugi - þríhyrningar

Sem fyrstu hermun getum við notað GeoGebru forritið til þess að finna þríhyrningslaga lotubundna braut innan biljarðsborðsins sem skilgreint er með jöfnunni

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Sem einfaldasta upphafspunkt veljum við hornpunkt þríhyrnings $\triangle\ A_0A_1A_2$ þ.a. $A_0$ sé á $y-$ásnum og $A_0 = (0, b)$. Þá er eðlilegt að búast við því að ef lotubundinn þríhyrningur er til, þá (vegna samhverfu um $y-$ásinn) hafi hann tvær jafnar hliðar ($A_0A_1 = A_0A_2$), sjá mynd 10.




**Mynd 10:** Verkefnið að finna lotubundinn þríhyrning út frá $A_0$

Aftur á móti er ekki ljóst hvernig skal finna punktinn $A_1$ ($A_2$ er samhverfur $A_1$ með tilliti til $y-$ássins).

Ef við rifjum upp yrðingu setningar 1, þá sést að ef $\triangle\ A_0A_1A_2$ er lotubundinn, þá er brenniflötur þess sporbaugur með sömu brennipunkta, segjum

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{3}$$

Almennt gildir fyrir sporbaug sem skilgreindur er með jöfnu af gerðinni (2) að $a^2 - b^2 = c^2$ þar sem $c$ er fjarlægð brennipunkts frá núllpunkti. Fyrir tvo sporbauga ((2) og (3)) með sömu brennipunkta, $F_1$ og $F_2$, gildir því

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2. \tag{4}$$

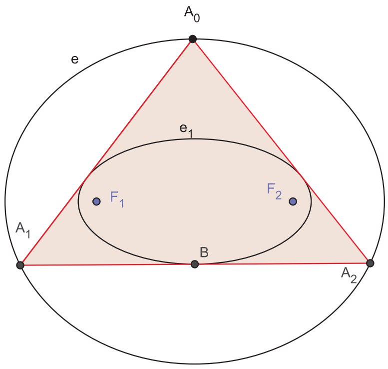
Við gerum ráð fyrir að $e_1$ sé innan $e$ svo við höfum $a > b > 0, a_1 > b_1 > 0, a > a_1, b > b_1$. Út frá þessu getum við endurorðað spurninguna

- Gefinn punktur $A_0 = (0, b)$ finnið sporbaug $e_1$ af gerð (3) innan sporbaugsins $e_1$ þannig að snertlarnir tveir frá $A_0$ til $e_1$ myndi þríhyrning $\triangle\ A_0A_1A_2$ innritaðan í $e$ og umritaðan um $e_1$ (sjá mynd 11).

Lausnin er enn ekki augljós og maður skyldi vanda sig vel til þess að forðast þunga og óþarfa útreikninga. Hvað skal þá gera? Hægt er að leita á netinu en flest skjöl sem þar finnast eru ekki mjög gagnleg fyrir framhaldsskólakennara og nemendur. Við skulum undirstrika aðalmarkmið okkar: að nota áþreifanleg „TÆKI OG TÓL” eins og: hagræðing algebru, notkun hornafalla, GeoGebruforrit og reyna að setja fram og finna lausnir á áhugaverðum verkefnum tengdum biljarði á sporbaugslaga borði.

Við reynum því að búa til nokkrar „einfaldari” spurningar og síðan tengja þær saman og að gera nálgun okkar að aðalverkefni þess hluta skýrari: að smíða minnst einn lotubundinn þríhyrning í gefnum sporbaugi (2).

Mögulegur listi spurninga er eftirfarandi:




**Mynd 11:** Brenniflötur $e_1$ lotubundna þríhyrningsins

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og lína $y = kx + b$ gegnum punktinn $A_0 = (0, b)$, finnið nauðsynleg og nægjanleg skilyrði (á $k, b, a_1, b_1$) þess að línan sé snertill $e_1$;
- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og lína $y - y_0 = k(x - x_0)$ gegnum hvaða punkt $A_0 = (x_0, y_0)$ sem er, finnið nauðsynleg og nægjanleg skilyrði (á $k, x_0, y_0, a, b$) þannig að línan sé snertill $e_1$;
- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0 = (0, b)$ finnið snertillínurnar frá $A_0$ til $e_1$ og finnið að auki skurðpunkta þessara snertillína, $A_1, A_2$, við sporbauginn $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (við þurfum formúlu sem lýsir hnitum $A_1, A_2$ með tilliti til $a, b, a_1, b_1$);
- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktar $A_1, A_2$ sem lýst var í síðasta skrefi, finnið nauðsynleg og nægjanleg skilyrði (á $a, b, a_1, b_1$) þ.a. línan $A_1A_2$ sé snertill $e_1$;
- Með því að nota vensl síðasta skrefs auk þeirrar staðreyndar að $e, e_1$ hafa sömu brennipunkta, þ.e. $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2$ gefið $a_1, b_1$ með tilliti til $a, b$.

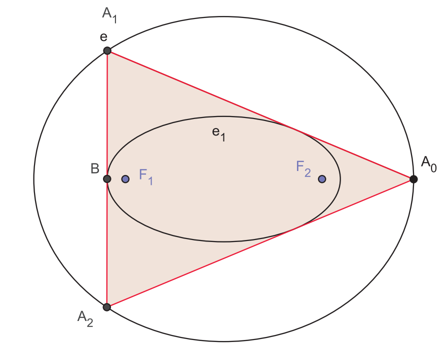
Ekkert þessara skrefa er mjög flókið og við gefum upp aðalatriði lausnanna en skiljum eftir hluta af endurteknum smáatriðum handa lesandanum. Niðurstöðurnar eru dregnar saman í nokkrar hjálparsetningar sem finna má í Viðaukanum.

# 4 Möguleg frekari skref til þess að finna fleiri lotubundna þríhyrninga

Hægt er að nota augljósa samhverfu og sjá að með því að taka $A'_0 = (0, -b)$ samhverft við $A_0$ m.t.t. $x-$ ássins að við höfum annan lotubundin þríhyrning samhverfan um þann upprunalega, $\triangle\ A_0A_1A_2$ úr hjálparsetningu 6. Næsta skref er að velja annan upphafspunkt fyrir lotubundna ferilinn og endurtaka fyrra ferli.

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0 = (a, 0)$ táknaðu með $t_1, t_2$ snertlilínurnar frá $A_0$ til $e_1$ og með $A_1, A_2$ skurðpunkta þessara snertilína við sporbauginn $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, þ.a. $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$. Reyndu að finna hnit $A_1, A_2$;

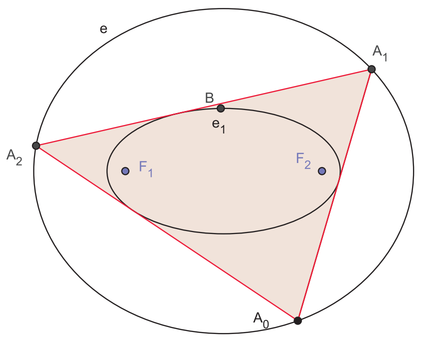
- Gefinn sporbaugur $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ og punktur $A_0 = (a, 0)$ reyndu að finna sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og lotubundinn þríhyrning $\triangle\ A_0A_1A_2$ þ.a. $e_1$ er brenniflötur lotubundna þríhyrningsins. Reyndu að lýsa $a_1, b_1$ m.t.t. $a, b$.




**Mynd 12:** Annar upphafspunktur $A_0$

Maður getur séð að stæðurnar fyrir $a_1, b_1$ eru þær sömu og stæðurnar úr hjálparsetningu 6.

Það er mjög áhugavert að nota hreyfimyndartakkann á punktinum $A_0$ í GeoGebru.




**Mynd 13:** Óvænt niðurstaða, þegar $A_0$ ferðast eftir $e$ haldast snertilínurnar sem snertlar brenniflatarins $e_1$

Þessi hermun er mjög mikilvæg þar sem hún leiðir okkur að nýjum opnum spurningum. Við getum sett fram eftirfarandi

**Tilgáta 1.** *Ef $A_0$ er HVAÐA punktur sem er á sporbaugnum $e$, litli sporbaugurinn $e_1$ er skilgreindur af hjálparsetningu 6 og snertilínurnar tvær að $e_1$ frá $A_0$ skera sporbauginn $e$ í punktunum $A_1A_2$, þá er $A_1A_2$ einnig snertill $e_1$.*

Þetta fyrirbæri er nátengt setningu Poncelets (sjá [3], [6]). Lausn á henni má finna í [5]

Fyrir frekari rannsóknir á biljarðsfræðum á sporbaugi er mikilvægt að nota nokkur mælitæki GeoGebru og að meta hvernig eftirfarandi stærðir breytast þegar $A_0$ ferðast eftir „braut” $e$:

- ummál lotubundna þríhyrningsins;

- flatarmál lotubundna þríhyrningsins;
- horn lotubundna þríhyrningsins.

Eftir að hafa gert þessa tilraun getur maður uppgötvað (því miður aðeins tölulega!) næsta ótrúlega eiginleika.

**Dæmi 2.** *Ef $A_0$ er HVAÐA punktur sem er á sporbaugnum $e$, þá er til ótvíræður lotubundinn þríhyrningur $\triangle A_0A_1A_2$ með fast ummál, þ.e. ummálið er óháð staðsetningu punktsins $A_0$ á sporbaugnum $e$!*

Við erum nægjanlega undirbúin á þessum tímapunkti að leysa þetta dæmi en hægt er framkvæma eftirfarandi skref til að sannreyna tilgátuna að hluta til.

- takið $A_0 = (0, b)$ og reiknið, $P_1$, ummál tilsvarandi lotubundna þríhyrningsins;
- takið $A_0 = (a, 0)$ og reiknið, $P_2$, ummál tilsvarandi lotubundna þríhyrningsins;
- berið saman $P_1$ og $P_2$.

Hægt er að sannreyna (sjá [4]) að

$$P_1 = P_2 = \frac{4a^2b(a + a_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b^2a_1^2 + a^2(a^2 - a_1^2)}.$$

## 5 Viðauki I: Nokkrar tæknilegar hjálparsetningar

**Hjálparsetning 2.** *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ er hægt að lýsa nauðsynlegum og nægjanlegum skilyrðum þess að línan $y = kx + b$ gegnum punkt $A_0 = (0, b)$ sé snertill $e_1$ á eftirfarandi hátt:*

$$k^2 = \frac{b^2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

*Sönnun.* Með því að setja inn $kx + b$ í stað $y$ í jöfnu (3) fæst

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{k^2x^2 + 2kbx + b^2}{b_1^2} = 1. \tag{5}$$

Þessi jafna hefur einungis eina rauntölurót sem hefur í för með sér

$$\frac{b^2k^2}{b_1^4} - \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{k^2}{b_1^2}\right)\left(\frac{b^2}{b_1^2} - 1\right) = 0$$

og þessi jafna er jafngild því að

$$k^2 = \frac{b^2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Þar með er sönnun lokið. □

**Hjálparsetning 3.** *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ er hægt að lýsa nauðsynlegum og nægjanlegum skilyrðum þess að línan $y - y_0 = k(x - x_0)$ gegnum punktinn $A_0 = (x_0, y_0)$ sé snertill $e_1$ á eftirfarandi hátt:*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2a_1^2.$$

**Hjálparsetning 4.** *Gefinn sporbaugur* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *og punktur* $A_0 = (0, b)$ *táknum við með* $t_1, t_2$, *snertilínur frá* $A_0$ *til* $e_1$ *og með* $A_1, A_2$ , *skurðpunkta þessara snertilína við sporbauginn* $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, *þ.a.* $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0,\ A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$. *Þá höfum við*

$$x_1 = -\frac{2a^2 a_1 b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = -x_2,$$

$$y_1 = \frac{b(a_1^2 b^2 - a^2(b^2 - b_1^2))}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = y_2.$$

*Sönnun.* Með því að setja $kx + b$ í stað $y$ í (2) fáum við jöfnuna

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2 + 2kbx + b^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Ein af rótunum er augljóslega 0 og hin rótin er

$$x_1 = -\frac{2ka^2b^2}{b(b^2 + k^2a^2)} = -\frac{2ka^2b}{(b^2 + k^2a^2)}.$$

Við getum notað stæðuna fyrir $k$

$$k = \pm\frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1}$$

og með því að taka tillit til þeirrar staðreyndar að $x_1 < 0$ fáum við að

$$x_1 = -\frac{2a^2 a_1 b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)}.$$

Með því að nota venslin

$$y = kx + b$$

Fáum við stæðu fyrir $y_1$

$$y_1 = \frac{b(a_1^2 b^2 - a^2(b^2 - b_1^2))}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)}.$$

Þar með er sönnun lokið. □

Út frá venslunum $y = -b_1$ og þeirri staðreynd að $e$ og $e_1$ hafa sömu brennipunkta má sanna eftirfarandi.

**Hjálparsetning 5.** *Gefinn sporbaugur* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *og punktur* $A_0 = (0, b)$ *lát* $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0,\ A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ *vera punktana ákvarðaða í hjálparsetningu 4. Þá er* $A_1A_2$ *snertill* $e_1$ *ef og aðeins ef*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Til þess að týnast ekki í tæknilegum formsatriðum vísum við í [4] fyrir sönnun á hjálparsetningunni.

Í raun svarar hjálparsetning 5 spurningunni um það hvernig finna megi brenniflöt lotubundinna þríhyrninga í gefnum sporbaug $e$. Þar sem það virðist vera erfitt að finna einfalt svar við þessu í bókum eða á netinu, lögðum við í það erfiða verk að nota frumstæð verkfæri (nefnilega eingöngu umritanir úr algebru). Hægt er að bera svarið saman við klassískar niðurstöður frá Cayley í [1], [2], þar sem sporbaugsheildi eru notuð. Niðurstaðan er gagnleg og hægt er að nota hana í sumum reikniritum í GeoGebru (eða með öðrum hugbúnaði) í tengslum við biljarðsborðin. Víkjum nú að erfiðleikum sem fylgdu því þegar reynt var að færa Java kóða inn GeoGebru og herma eftir ólotubundnum ferlum með $N \gg 1$ speglunarpunkta. Það kemur í ljós að smíði helmingunarlínu sem GeoGebru verkfæri í bland við Java kóða olli nokkrum takmörkunum á $N$, $N \leq 100$.

Við ljúkum viðaukanum með eftirfarandi umbreytingu á hjálparsetningu 5.

**Hjálparsetning 6.** *Gefinn sporbaugur $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ og punktur $A_0 = (0, b)$ er hægt að finna ótvíræðan sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og ótvíræðan lotubundin þríhyrning $\triangle\ A_0A_1A_2$ þ.a. $e_1$ er brenniflötur lotubundna þríhyrningsins. Að auki höfum við*

$$a_1 = a\frac{\sqrt{s^4 - s^2 + 1} - s^2}{1 - s^2}, \quad b_1 = b\frac{1 - \sqrt{s^4 - s^2 + 1}}{1 - s^2},$$

*þar sem*

$$s = \frac{b}{a} \in (0, 1).$$

## 6 Viðauki 2: Java forrit

GeoGebra notar Java tæknina til þess að sameina kosti virks rúmfræðiumhverfis og möguleikann á að slá jöfnur og hnit beint inn, sem gerir það mjög gagnlegt í stærðfræðikennslu og stærðfræðikönnunum. Grunnhugmyndin á bak við viðmót GeoGebru er að bjóða upp á tvær framsetningar á hverjum stærðfræðilegum hlut í algebrugluggum og teikniborðum þess. Ef þú breytir hlut í öðrum af þessum gluggum, mun framsetningin í hinum uppfærast samstundis. Táknreiknikerfi (svo sem Mathmetica, Maple o.s.frv.) og kvik rúmfræðiforrit (svo sem Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry o.s.frv.) eru öflug tæknitól til þess að kenna stærðfræði. Fjöldinn allur af rannsóknum gefur til kynna að hægt sé að nota þessa forritunarpakka til að hvetja til uppgötvana, tilrauna og sjónsköpunnar í hefðbundinni stærðfræðikennslu. Aftur á móti gefa rannsóknir til kynna að fyrir meirihluta kennara sé aðalvandamálið að geta boðið upp á nauðsynlega tækni svo hægt sé að fella tæknina inn í kennsluna á áhrifaríkan máta.

Vinsældir GeoGebru hafa aukist gífurlega hratt meðal kennara og rannsakenda víðsvegar um heiminn, vegna þess að það er notendavænt stærðfræðiforrit sem sameinar ýmsar hliðar mismunandi stærðfræðipakka. Þar að auki, þar sem það er opinn hugbúnaður, hefur myndast stórt samfélag í kringum það.

Í GeoGebru eru nokkrir möguleikar á hreyfimyndum. Að bæta fleiri forritseiningum fyrir hreyfimyndir í GeoGebra ætti að vera mikilvæg tæknieining í framtíðarútgáfum. Framtíðarviðbætur við forritið GeoGebra munu örugglega innihalda frekari táknreiknimöguleika, sem gerir okkur mögulega kleift að framkvæma flóknari aðgerðir í stærðfræðigreiningu.

Vandamál sem við komumst í kynni við tengist notkun Java forrits til að búa til mikinn fjölda af speglunarpunktum í biljarðsverkefninu.

Við notuðum eftirfarandi kóða í tengslum við rennistikuna í forritinu.

```
function stopAll(){
ggbApplet.evalCommand("StartAnimation[false]");
ggbApplet.setAnimating("slider",false);
```

```
ggbApplet.setValue("slider",100);}
var i= new Number(ggbApplet.getValue("slider"));
var lim = new Number(ggbApplet.getValue("n"));
if(i==0){
ggbApplet.evalCommand("a_{0}=
Vettore[S_{"+i+"},S_{"+(i+1)+"}]");
ggbApplet.setLineStyle("a_{0}",4);
ggbApplet.setColor("a_{0}",255,0,0);}
else if(i>=lim){
stopAll();}
else if(ggbApplet.exists("S_{"+(i)+"}")){
if(ggbApplet.evalCommand("bis"+(i)+"=
Bisettrice[F_1,S_{"+(i)+"},F_2]")){
ggbApplet.setVisible("bis"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("B"+(i)+"=
Intersezione[c, bis"+(i)+",2]")){
ggbApplet.setVisible("B"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("alpha"+(i)+"=
Angolo[S_{"+(i-1)+"},S_{"+(i)+"},B"+(i)+"]"))
{ggbApplet.setVisible("alpha"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("R"+(i)+"=
Ruota[S_{"+(i-1)+"},2alpha"+(i)+",S_{"+(i)+"}]"))
{ggbApplet.setVisible("R"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("aa"+(i)+"=
Semiretta[S_{"+(i)+"},R"+(i)+"]")){
ggbApplet.setVisible("aa"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("S_{"+(i+1)+"}=
Intersezione[c,aa"+(i)+",2]")){
ggbApplet.setPointSize("S_{"+(i+1)+"}",1);
ggbApplet.setLabelVisible("S_{"+(i+1)+"}",false)
if(ggbApplet.evalCommand("a_{"+(i)+"}=
Vettore[S_{"+i+"},S_{"+(i+1)+"}]")){
ggbApplet.setLineStyle("a_{"+(i)+"}",4);
ggbApplet.setColor("a_{"+(i)+"}",255,0,0);
}}}}}}}
else {stopAll();}}
```

## Heimildir


[1] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99-102.

[2] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339-345.

[3] V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, 2011.

[4] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Ummál hreintóna þríhyrninga í sporbaugi*, grein í þessari bók.

[5] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Setning Poncelets og lotubundnir þríhyrningar í sporbaugi*, grein í þessari bók.

[6] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005).