Billiardo dinamico

Vladimir Georgiev, Irena Georgieva, Veneta Nedyalkova

1 Breve introduzione

Il billiardo dinamico é un sistema dinamico che corrisponde al movimento di una particella di massa fissa in un dominio con frontiera abbastanza regulare con un rimbalzamento elastico. Questo tipo di modelli appaiano in modo naturale quando si studiano problemi della ottica, fenomeni acaustici e la meccanica classica. Il modello di Bolzman per esmepio si puo simplificare e redurre al modello del billiardo.

Il billiardo puo essere collegato con movimento libero di una particella (chimata palla del billiardo) che rimbalza in modo ellastico alla frontiera.

Questo significa che il punto si muove con velocitá costante (diciamo uguale a 1). Sulla frontiera la particella rimbalza in modo tale che la parte tangenziale della velocitá rimane la stessa, mentre la componente normale cambia solo il segno. Nel piano questa proprietá e ben collegata con la famoza legge di riflessione. Questo argomento mostra la vicinanza della teroia del billiardo e l'ottica geometrica.

Un esempio interessante (tavola da billiardo) si vede sulla Figura 6

Figure 1: Elliptic table

Il billiardo piú semplice é il caso di una circonferenza. Sia $\kappa = \kappa(O, r)$ é il cerchio con centro O e raggio $r > 0$ (vedi la Figura 2). Se S_0 é un punto sul cerchio κ della Figura 2 e questo punto é il punto di partenza del raggioche intersecca nel punto S_1 la frontiera come punto d'intersezione successivo allora nel punto S_1 abbiamo rimbalzo con angole d'arrivo α_1 uguale l'angolo dopo il rimbalzo notato con β_2. Dopo la reflessione la trajettoria del billiardo si estende e noi arriviamo al punto successivo del rimbalzo, notato con S_2, dove il rimbalzo successivo succede e abbiamo

$$\alpha_2 = \beta_2.$$

Ogni trajettoria é definita del punto di partenza S_0 e dai punti

$$S_1, S_2, \cdots$$

di rimbalzo sulla frontiera successivo (in questo caso il cerchio κ).

La prima osservazione é che abbiamo le relazioni

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \cdots ,$$

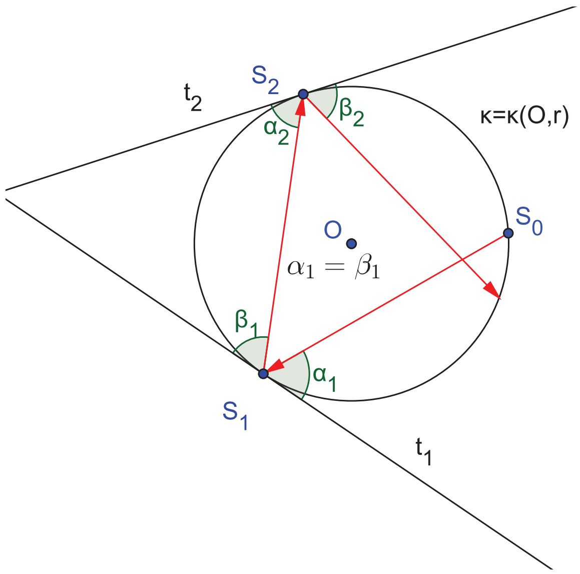


Figure 2: Tavola da billiard col forma di cerchio

cioé ogni trajettoria ha un angolo costante con la frontiera.

D'altra parte, la stesa trajettoria rimane tangente rispetton un circonferenza concentrica a quella di partenza. Possiamo usare un software Geogebra per vedere con la simulazione interattiva un fenomeno simile. Il link é il seguente Il billiardo su tavola di tipo circonferenza

La seguente appllicazione di geogebra permette di utilizzare una combinazione tra Java e Geogebra.

Il link alla simulazione di Geogebra

Uno puo verificare che ogni tajettoria rimane tangente alla circonferenza concentrica.

Se S_0 é un punto sulla ellisse della Figura 5 e questo e' punto di partenza del billiardo sia S_1 e' il primo punto successivo dell rimbalzo allora nel punto S_1 abbiamo il solito legge del rimbalzo, il punto successivo del rimbalzo é S_2 etc.

Siamo in grado di introdurre la nozione della caustica Before we proceed any further we introduce a new concept.

Definition 1. *Una caustica nel piano del billiardo é una curva tale che il billiardo rimane sempre tangente rispetto la curva.*

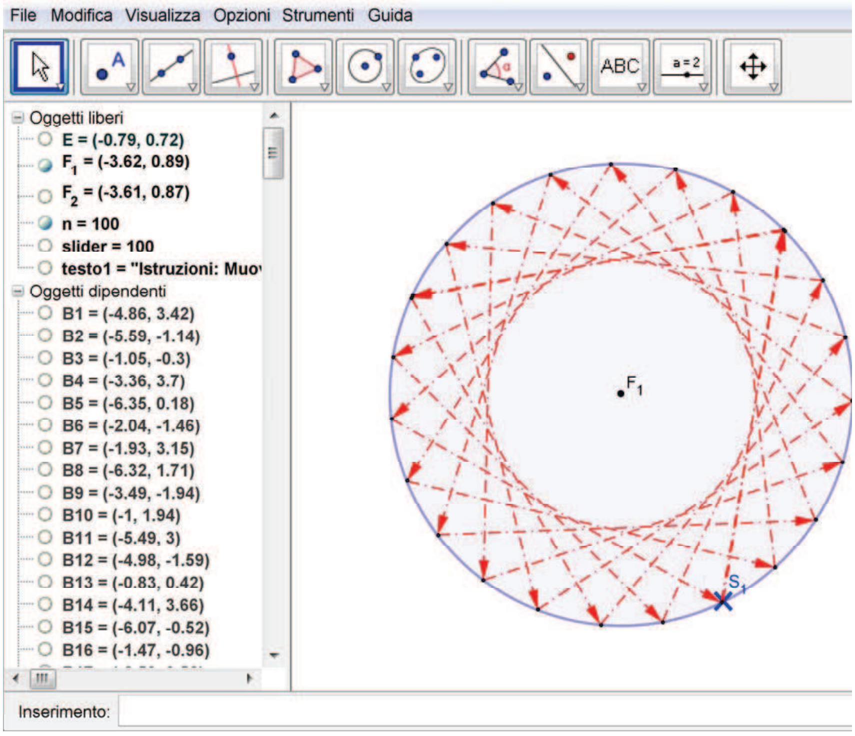
Cosí le caustiche nel caso di un billiardo cerchio sono cerchi concentrici.

Il caso successivo é quello delle coniche. Per un elisse sappiamo che la somaa delle distance di qualsisi punto sulla ellisse ai due foci é costante. La hiperbola ha una proprietá simile.

Le elisse, iperolae e le parabole hanno equazione quadratica nel piano.

2 Proprieta semplici dei billiardi

Abbiamo la seguente proprietá semplice.



Created with GeoGebra

Figure 3: Il billiardo nella circonferenza

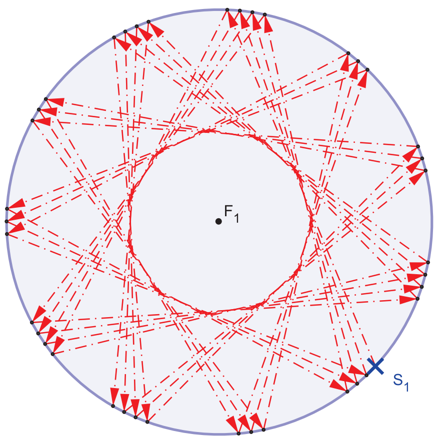


Figure 4: Geogebra application for Circle

Lemma 1. *Se il billiardo parte da uno dei foci dopo il primo rimbalzo deve traversare l'altro foci.*

Proof. Possiamo provare a risolvere il seguente problema di ottimizzazione: data una rete ℓ e due punti F_1 é F_2 su una parte della rete, trovare un punto X tale che la distanza $|F_1X|+|XF_2|$ é minimale. Soluzione: usare riflessione del punto F_1 rispetto la rete e collegare F_2 con questo

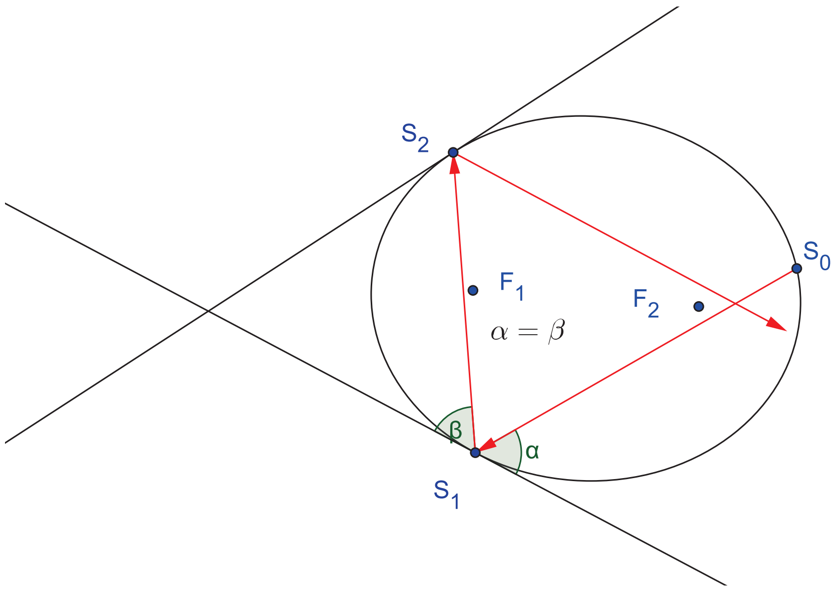


Figure 5: Billiard table

punto.

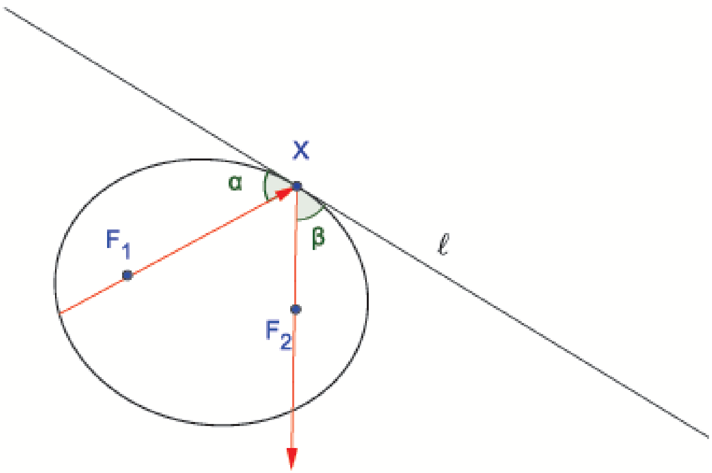


Figure 6: Basic property of ellipse

Il punto dell'intersezione del ℓ sia X. Otteniamo che gli angoli dei segmanti F_1X é F_2X e l'elisse ℓ sono uguali. Consideriamo la famiglia delle ellisse con focci F_1 F_2 fissati. Allora X é il punto dove per la prima volta ℓ é toccata della famiglia delle ellisse. Cosí X é un punto dove la rete tangente ha i stessi angoli con gli segmenti XF_1 e XF_2.

□

In modo simile si possano verificare le proprietá di propagazione e riflessione della luce per l'iperbola e la parabola. Queste proprietá sono fondamentali nella costruzione di varie strumenti ottiche.

Exercise 1. *Se il raggio della luce parte da uno dei foci della parabola, allora il raggio riflessoe parallelo al asse Ox.*

Se due ellisse hanno i stessi foci si chiamano confocali. La stessa cosa si puo dire per due iperbole. In riferimento Cartesiano le equazioni sono le seguente

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \tag{1}$$

con $0 < a < b$. Qui λ é un parametro; per $-b^2 < \lambda < -a^2$ la curva é iperbola, mentre per $-a2 < \lambda$ é ellisse.

Theorem 1. *In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco. Un billiardo ellittico ha una familia di caustiche, formato delle ellisse confocali o iperbole confocali. Piú precisamente, se un segmento della orbita non ha punto d'intersezione con il segmento che collega i due foci, allora l'orbita rimane sempre senza punti di intersezione con il segmento F_1F_2 e rimane tangente alla ellisse confocale. Se un segmento della orbita ha punto d'intersezione con il segmento che collega i due foci, allora ogni segmento della orbita interseca il segmento F_1F_2 e rimane tangente alla iperbola confocale.*

Proof. Sia A_0A_1 e A_1A_2 sono due segmenti consequtivi della orbita. Sia A_0A_1 non ha pinti di intersezione con F_1F_2. La proprietá ottica dimostra che $\angle A_0A_1F_1$ e $\angle A_2A_1F_2$ sono uguali.

Dopo una riflessione del punto F_1 rispetto a (rispettivamente) una retta A_0A_1 abbiamo il punto F_1', facendo la riflessione del punto F_2 rispetta alla retta A_1A_2 otteniamo il punto F_2'. Poniamo: $G = F_1'F2 \cap A_0A_1$; $H = F_2'F_1 \cap A_1A_2$. Considerimao l'ellisse con foci F_1 e F_2, tale che l'ellisse é tangente al segmento A_0A_1. L'uguaglianza tra gli angoli $\angle F_2GA_1$ e $\angle F_1GA_0$ mostra che l'ellisse tocca G. In modo simile l'ellisse con foci F_1 e F_2 tocca A_1A_2 nel punto H. Le due ellisse coincidano, cioé $F_1B + BF_2 = F_1C + CF_2$, e questo si puo rescrivere come $F_1'F2 = F1F_2'$. Osserviamo che $\triangle\ F_1'A_1F_2$ e $\triangle\ F_1A_1F_2'$ sono congruenti:

$$F_1'A_1 = F_1A_1; \quad F_2A_1 = F_2'A_1$$

per la simetria, e gli angoli $\angle F_1'A_1F_2$ and $\angle F_1A_1F_2'$ sono uguali. Dunque

$$F_1'F_2 = F_1F_2',$$

e il risultato segue. □

Uno puo usare l'applicazione di Geogebra per vedere caustiche iperboliche (come nella Figura 8 e ellittico (vedi la Figura 9).

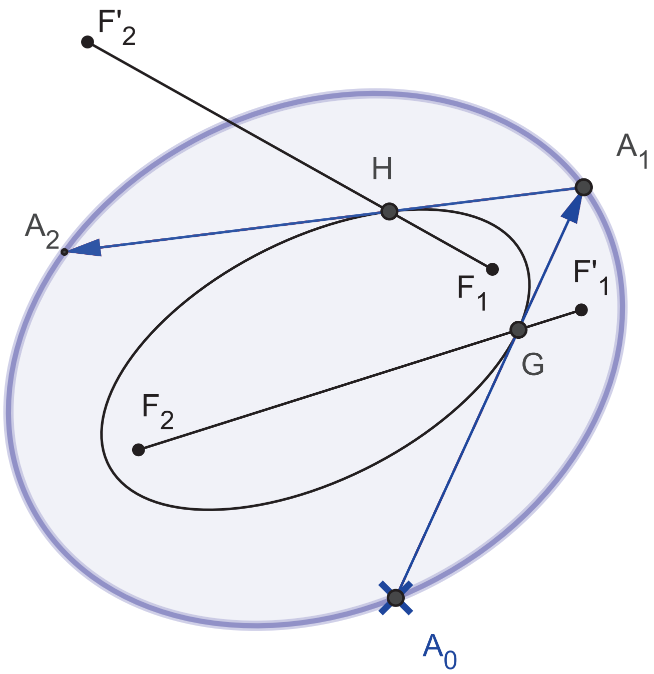


Figure 7: Caustiche

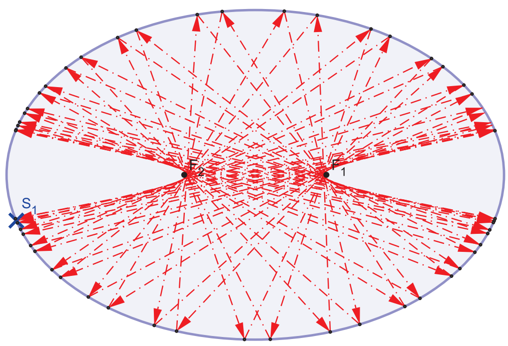


Figure 8: Hyperbolic Caustics

3 Le orbite piu semplici - triangoli periodici.

Come prima simulazione si puo' utilizzare l'applicazione Geogebra per trovare l'orbita periodica triangolo all'interno tavolo da biliardo definita dall'equazione

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Come semplice punto iniziale si sceglie il vertice del triangolo $\triangle A_0A_1A_2$ tale che A_0 sia sull'asse

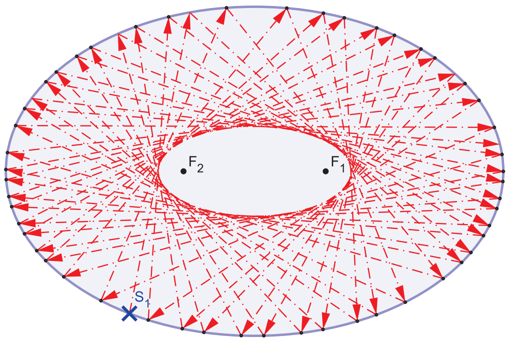


Figure 9: Elliptic Caustics

$y-$ e $A_0(0, b)$. Poi é naturale aspettarsi che se esiste un triangolo periodico, quindi (con simmetria rispetto l'asse y) ha due lati uguali ($A_0A_1 = A_0A_2$), vedi la Figura 10.

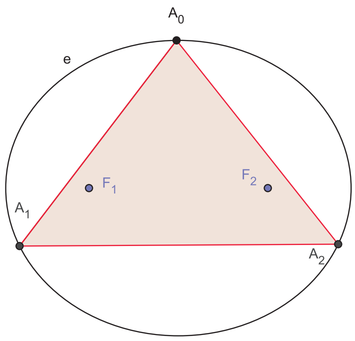


Figure 10: Il problema di trovare triangolo periodico da A_0.

Tuttavia non é chiaro come trovare il punto A_1 per esempio, percheé poi A_2 é simmetrico al punto A_1 rispetto l'asse y.

Ricordando l'affermazione del Teorema 1, si puo' vedere che se $\triangle\ A_0A_1A_2$ é periodico, quindi la sua caustica e' un ellisse confocale, diciamo

$$e_1 : \ \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{3}$$

L'equazione (2) mostra ora che la condizione e e e_1 sono confocale, vale a dire avere le stesse fochi F_1 e F_2 si puo rescrivere come

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2. \tag{4}$$

Noi supponiamo e_1 é dentro e allora abbiamo $a > b > 0, a_1 > b_1 > 0, a > a_1, b > b_1$. In questo modo possiamo riformulare la nostra domanda:

- Dato un punto $A_0(0, b)$ trovare una ellisse e_1 del tipo (3)dentro l'ellisse e in modo che le due tangenti da A_0 a e_1 generano $\triangle\ A_0A_1A_2$ iscritto in e e circoscritto intorno di e_1 (vedi la Figura 11).

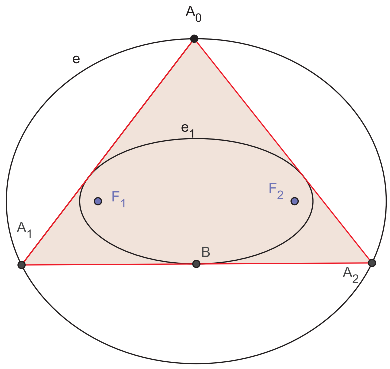


Figure 11: Caustic e_1 del triangolo periodica

Anche ora la soluzione non e‘ ovvio e uno dovrebbe essere molto attento ad evitare i calcoli pesanti e inutili che non hanno un'idea chiara come base. Allora, cosa fare ? Si puó guardare in Internet e vedere che la maggior parte dei documenti trovati non sono molto utili per gli insegnanti delle scuole superiori e per gli studenti. Cerchiamo di sottolineare il nostro scopo principale: utilizzare alcuni concreti "TOOLS" come: manipolazioni algebriche, l'uso di funzioni trigonometriche, applicazioni GeoGebra e cercare di porre e trovare una soluzione ad alcuni problemi interessanti legati al biliardo sul tavolo ellisse.

Quindi cerchiamo di generare diversi "semplice" domande e poi cercheremo di collegarli e di chiarire la nostra strategia per affrontare il problema principale di questa sezione: costruire almeno un triangolo periodico in modo esplicito in una ellisse data (2).

Una possibile elenco di domande é la seguente:

- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e una linea $y = kx + b$ attraverso il punto $A_0(0, b)$, trovare una condizione necessaria e sufficiente (su k, b, a_1, b_1) in modo che la linea e‘ tangente al ellisse e_1;
- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e una linea $y - y_0 = k(x - x_0)$ attraverso un punto qualsiasi $A_0(x_0, y_0)$, trovare una condizione necessaria e sufficiente tale che la linea é tangente al ellisse e_1;
- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(0, b)$ individuare le linee tangenti da A_0 a e_1 e trovare i punti A_1, A_2 di intersezione di queste linee tangenti con l'ellisse $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e i punti A_1, A_2 descritti nel passaggio precedente trovare una condizione necessaria e sufficiente tale che le retta A_1A_2 sia tangete a e_1;
- Utilizzando il rapporto del passo precedente nonche' il fatto che e, e_1 hanno i stessi fochi, ($a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2$) esprimere a_1, b_1 in termini di a, b.

Ciascuna di queste fasi non é molto difficile e diamo i punti principali nella soluzione lasciando alcuni dettagli ripetuti al lettore. I risultati sono ordinati in pochi Lemmi presentati in appendice.

4 Eventuali ulteriori passi per trovare triangoli periodici

Si puo' usare una simmetria banale e di vedere la presa $A_0'(0,-b)$ simmetrica a A_0 rispetto a $x-$ asse abbiamo un altro triangolo periodico simmetrico a quello originale $\triangle\ A_0A_1A_2$ dal Lemma 6. Il passo successivo e' scegliere diverso punto di partenza per la traiettoria periodica e ripetere il programma precedente.

- Data l'ellipse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(a,0)$ sia t_1, t_2 la retta tangente da A_0 a e_1 e sia A_1, A_2 i punti di intersezione di queste linee tangenti con l'ellisse $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, tale che $A_1(x_1,y_1), x_1 < 0,\ A_2(x_2,y_2), x_2 > 0$. Prova a trovare le coordinate di A_1, A_2;
- Data l'ellipse $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e il punto $A_0(a,0)$ prova a trovare un ellissa $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e un triangolo periodico $\triangle\ A_0A_1A_2$ tale che e_1 é la caustica del triangolo periodico. Cercate di esprimere a_1, b_1 tramite a, b.

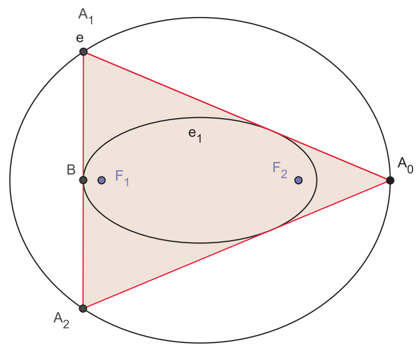


Figure 12: Un altro punto iniziale A_0

Si puo' vedere che le espressioni per a_1, b_1 sono le stesse espressioni da Lemma 6.

Un'altra applicazione Geogebra estremamente interessante e' l'attivazione del pulsante animazione sul punto A_0.

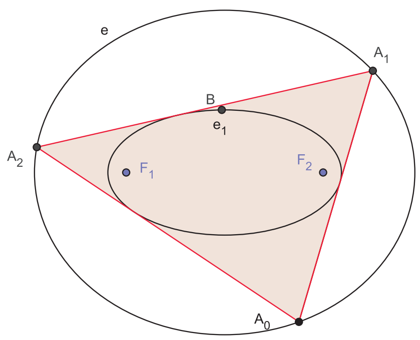


Figure 13: Sorpresa quando A_0 si muove su e: linee tangenti rimangono tangente alla caustica e_1.

Questa simulazione e' molto importante perche' ci porta a nuove domande aperte. Possiamo fare la seguente congettura.

Conjecture 1. *Se A_0 é un punto QUALSIASI sull'ellisse e, allora l'ellipse e_1 é definito in base al Lemma6 e le due linee tangenti a e_1 da A_0 intersecanno l'ellipse e nel punti A_1, A_2, allora A_1A_2 é anche tangente a e_1.*

Questo fenomeno e' strettamente collegato con il Poncelet Porism (vedi [3], [6]). Una soluzione di questo problema si puó trovare in [5].

Un'altra applicazione che e' cruciale per l'ulteriore studio del biliardo sull'ellisse é l'attivazione di alcuni strumenti di misurazione di Geogebra e di valutare come variare le seguenti grandezze, quando A_0 si muove sull'orbita di e:

- perimetro del triangolo periodico;
- area del triangolo periodico;
- angoli del triangolo periodico;

Dopo aver fatto questo esperimento si puo' scoprire (purtroppo solo numericamente!) la seguente proprietá interessantissima.

Exercise 2. *Se A_0 é un punto qualsiasi sull'ellipse e, allora esiste un triangolo unico periodico $\triangle A_0A_1A_2$ con perimetro costante!!!*

Noi non siamo disposti in questo momento per risolvere questo esercizio, ma si possono fare le seguenti operazioni per verificare parzialmente la congettura.

- prendere $A_0(0, b)$ e calcolare il perimettro P_1 del triangolo periodico corrispondente;
- scegliere $A_0(a, 0)$ e calcolare il perimettro P_3 del triangolo periodico corrispondente;
- confrontare P_1 e P_2.

Si puó verificare che (vedi[4])

$$P_1 = P_2 = \frac{4a^2b(a+a_1)\sqrt{a^2-a_1^2}}{b^2a_1^2+a^2(a^2-a_1^2)}.$$

5 Appendice I: Tre lemmi tecnici

Lemma 2. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ si puó esprimere la condizione necessaria e sufficiente tale che la linea $y = kx + b$ attraverso il punto $A_0(0, b)$ sia tangente a e_1 come segue*

$$k^2 = \frac{b_2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Proof. Sostituendo y con $kx+b$ in (3) implica

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{k^2x^2 + 2kbx + b^2}{b_1^2} = 1. \tag{5}$$

L'equazione ha una soluzione reale, cosí dobbiamo avere

$$\frac{b^2k^2}{b_1^4} - \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{k^2}{b_1^2}\right)\left(\frac{b^2}{b_1^2} - 1\right) = 0$$

e questa identitá é equivalente a

$$k^2 = \frac{b_2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Questo completa la dimostrazione del Lemma. □

Lemma 3. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ si puó esprimere la condizione necessaria e sufficiente tale che la linea $y - y_0 = k(x - x_0)$ attraverso il punto $A_0(x_0, y_0)$ sia tangente a e_1 come segue*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2a_1^2.$$

Lemma 4. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(0, b)$ sia t_1, t_2 la retta tangente da A_0 a e_1 e sia A_1, A_2 i due punti d'intersezione con l'ellipse $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, tale che $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$. Allora abbiamo*

$$x_1 = -\frac{2a^2a_1b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = -x_2,$$

$$y_1 = -M = y_2, \quad M = \frac{a^2b(b^2 - b_1^2)}{a_1^2b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)}.$$

Proof. Sostituendo y con $kx+b$ in (2), otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2 + 2kbx + b^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Una delle soluzioni é 0 mentre l'altra é

$$x_1 = -\frac{2ka^2b^2}{b(b^2 + k^2a^2)} = -\frac{2ka^2b}{(b^2 + k^2a^2)}.$$

Possiamo usare l'espressine di k

$$k = \pm\frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1}$$

e considerando il fatto che $x_1 < 0$ otteniamo

$$x_1 = -\frac{2a^2a_1b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)}.$$

Usando la relazione

$$y = kx + b$$

concludiamo

$$y_1 = -\frac{a^2b(b^2 - b_1^2)}{a_1^2b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)}.$$

Questo completa la dimostrazione del Lemma. □

Lemma 5. *Data l'ellisse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *e il punto* $A_0(0,b)$ *sia* $A_1(x_1,y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2,y_2), x_2 > 0$ *sono i punti descritti in Lemma 5. Allora* A_1A_2 *é tangente a* e_1 *se e solo se*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Per evitare l'accumulo di prove tecniche troppo pesanti citiamo [4] per l'idea della dimostrazione.

In pratica, Lemma 5 risponde alla domanda di trovare la caustica dei triangoli periodiche in una ellisse e. Dal momento che sembra essere difficile trovare questa risposta semplice nella letteratura o in Internet abbiamo fatto questo sforzo per dare la risposta con strumenti completamente elementari e manipolazioni algebriche). Si puó paragonare questa risposta con i risultati classici di Cayley in[1], [2],integrali ellittici in cui vengono utilizzati. Il risultato é utile e puó essere utilizzato in alcuni algoritmi in GeoGebra (o alcuni altri strumenti informatici) connesse con tavoli da biliardo. In questa direzione possiamo citare la difficoltá incontrata quando si cercava di implementare script Java in Geogebra e simulare una traiettoria non periodico con $N \gg 1$ punti di rimbalzo. Si scopre che la costruzione della bisettrice come strumento di Geogebra combinato con Java script, crea alcune limitazioni$N$, $N \leq 100$.

Alla fine abbaimo una variazione del Lemma 5.

Lemma 6. *Data l'ellisse* $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *e il punto* $A_0(0,b)$ *si puo trovare unaca ellipse* $e_1 : x^2/a_1^2+y^2/b_1^2 = 1$ *e unico triangolo periodico* $\triangle\, A_0A_1A_2$ *tale che* e_1 *é la caustica del triangolo periodico. Valgono le relazioni*

$$a_1 = a\frac{\sqrt{s^4 - s^2 + 1} - s^2}{1 - s^2}, \quad b_1 = b\frac{1 - \sqrt{s^4 - s^2 + 1}}{1 - s^2},$$

wheredove

$$s = \frac{b}{a} \in (0,1).$$

6 Appendice 2: applet Java

Applet di GeoGebra utilizza la tecnologia Java per combinare una geometria interattiva con la possibilita‘ di inserire direttamente equazioni e coordinate. Questa possibilitá é molto utile come mezzo aggiuntivo nel insegnameto di matematica. L'idea di base di interfaccia GeoGebra é di fornire due presentazioni di ogni oggetto matematico nelle finestre grafiche. Se si cambia un oggetto in una di esse, l'altro sara‘ immediatamente aggiornato. Sistemi informatici e software geometrico dinamico (ad esempio di Geometer Sketchpad, Geometria Cabri, e cosi‘ via, ad esempio) sono potenti strumenti tecnologici per l'insegnamento della matematica. Numerosi i risultati della ricerca suggeriscono che questi pacchetti software possono essere utilizzati per incoraggiare la scoperta, la sperimentazione e visualizzazione in insegnamento tradizionale della matematica. Tuttavia, ricerche suggeriscono che, per la maggior parte degli insegnanti, il problema principale e‘ come fornire la tecnologia necessaria nel insegnamento.

GeoGebra ha rapidamente guadagnando popolarita‘ fra gli insegnanti e ricercatori di tutto il mondo, perché é facile di usarlo. Inoltre, a causa della sua natura open-source, una vasta comunita‘ di utenti ha sviluppato il prodotto.

GeoGebra ha alcune possibilita' di effettuare l'animazione. Future svilupi del software GeoGebra sono collegati con il sviluppo di metodi di algebra computazionale che aiuterano ad aumentare i domini di possibili applicazioni in analisi matematica, e in 3D estensioni.

Un problema che abbiamo incontrato e' connesso con l'uso di applet Java per la produzione di elevato numero di punti di rimbalzo nel problema del biliardo.

Usiamo il seguente script Java.

```
function stopAll(){
ggbApplet.evalCommand("StartAnimation[false]");
ggbApplet.setAnimating("slider",false);
ggbApplet.setValue("slider",100);}
var i= new Number(ggbApplet.getValue("slider"));
var lim = new Number(ggbApplet.getValue("n"));
if(i==0){
ggbApplet.evalCommand("a_{0}=
Vettore[S_{"+i+"},S_{"+(i+1)+"}]");
ggbApplet.setLineStyle("a_{0}",4);
ggbApplet.setColor("a_{0}",255,0,0);}
else if(i>=lim){
stopAll();}
else if(ggbApplet.exists("S_{"+(i)+"}")){
if(ggbApplet.evalCommand("bis"+(i)+"=
Bisettrice[F_1,S_{"+(i)+"},F_2]")){
ggbApplet.setVisible("bis"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("B"+(i)+"=
Intersezione[c, bis"+(i)+",2]")){
ggbApplet.setVisible("B"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("alpha"+(i)+"=
Angolo[S_{"+(i-1)+"},S_{"+(i)+"},B"+(i)+"]"))
{ggbApplet.setVisible("alpha"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("R"+(i)+"=
Ruota[S_{"+(i-1)+"},2alpha"+(i)+",S_{"+(i)+"}]"))
{ggbApplet.setVisible("R"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("aa"+(i)+"=
Semiretta[S_{"+(i)+"},R"+(i)+"]")){
ggbApplet.setVisible("aa"+(i),false);
if(ggbApplet.evalCommand("S_{"+(i+1)+"}=
Intersezione[c,aa"+(i)+",2]")){
ggbApplet.setPointSize("S_{"+(i+1)+"}",1);
ggbApplet.setLabelVisible("S_{"+(i+1)+"}",false)
if(ggbApplet.evalCommand("a_{"+(i)+"}=
Vettore[S_{"+i+"},S_{"+(i+1)+"}]")){
ggbApplet.setLineStyle("a_{"+(i)+"}",4);
ggbApplet.setColor("a_{"+(i)+"}",255,0,0);
}}}}}}}
else {stopAll();}}
```

References

[1] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99102.

[2] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339345.

[3] V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, 2011.

[4] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Perimeter of harmonic triangles in ellipse*, article in this book.

[5] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Poncelet's porism and periodic triangles in ellipse*, article in this book.

[6] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005).