Setning Poncelets og lotubundnir þríhyrningar í sporbaugi

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Sögulegur inngangur

Ein af mikilvægustu og fallegustu setningunum í varpfræði er setning Poncelets, sem fjallar um lokaða marghyrninga sem eru innritaðir í eitt keilusnið og umritaðir um annað keilusnið (að neðan gefum við nákvæmu yrðinguna og sönnum við hana í tilfelli þríhyrninga). Setningin hefur djúp tengsl við önnur svið stærðfræðinnar. Markmið þessa kaflahluta er að skýra nánar út tengslin milli setningu Poncelets og biljarðs í sporbaugi. Við fyrstu sýn virðast þessi viðfangsefni vera ótengd þar sem þau koma úr tveimur óháðum stærðfræðisviðum: rúmfræði og hreyfikerfi. En falinn þráður tengir þessi viðfangsefni saman: tilvist undirliggjandi fyrirbæris (sem við nefnum Poncelet samsvörunina) sem reynist vera sporbaugsferill. Það er vel þekkt að hægt er að skilgreina grúpumynstur á sporbaugsferlum og hagnýting þess varpar miklu ljósi á fyrrnefnd viðfangsefni.

Til að lesa flestar bækur tengdar þessu viðfangefni þarf undirstöðu í tvinnfallagreiningu, línulegri algebru og grannfræði og því er ekki einfalt að búa til verkefni sem henta nemendum á framhaldsskólastigi.

Við reynum því að finna nálgun sem krefst einungis þeirra verkfæra sem finnast í venjulegri framhaldsskólanámsskrá. Þetta er ekki auðleyst vandamál. Hin klassíska A. Cayley nálgun (sjá [2], [3]) notar sporbaugsheildi, aðrar heimildir (sjá [5], [6], [8] og heimildirnar sem er þar vísað í) beita rökum úr varprúmfræði og grúpufræði.

Fyrir framsetningu á verkefni Poncelets þarf einungis að þekkja skilgreiningu og jöfnu sporbaugs.

Setning 1. *(Setning Poncelets) Gerum ráð fyrir að gefnir séu tveir sporbaugar þannig að annar sé inni í hinum. Ef til er n-hyrningur sem er innritaður í öðrum sporbaugnum og umritaður um hinn sporbauginn þá er sérhver punktur á jaðri ytri sporbaugsins hornpunktur í umrituðum n-hyrningi innra sporbaugsins.*

Til eru nokkrar sannanir á þessari merkilegu setningu, flestar þeirra eru ekki einfaldar. Rekja má setningu Poncelets til nítjándu aldar og veittu margir stærðfræðingar þess tíma henni athygli (ítarleg sögulýsing er gefin í [1]). Aðalástæðan fyrir þessu er sú staðreynd að margar sannanir setningarinnar krefjast notkunar tvinntölu- og einsleitra hnita, hugtaka sem voru að koma fram á þeim tíma (1813) þegar Poncelet uppgötvaði setninguna. Það gerði hann meðan hann var í haldi sem stríðsfangi í Rússnesku borginni Saratov. Eftir að hann sneri aftur heim til Frakklands birti hann sönnunina í bók sinni [7], sem gefin var út árið 1822. Sönnunin, sem var fremur margbrotin, einfaldar setninguna í tvo (ekki endilega sammiðja) hringi. Umræða um hugmyndirnar í sönnun Poncelets er gefin í [1], bls. 298 - 311.

Tilgangur okkar er að finna einfalda sönnun á tilfelli sem er ekki augljóst: tilfellið $n = 3$ og þar sem við höfum tvo sporbauga

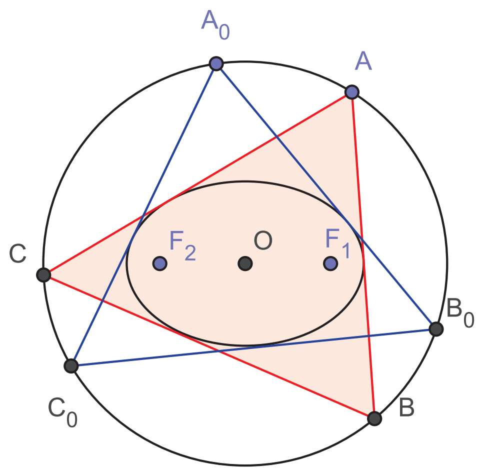
$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

og

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{2}$$

þannig að e_1 sé innan e.

Við munum sanna þetta tilfelli setningar Poncelets og auk þess eftirfarandi sértækari niðurstöðu.



Mynd 1: Setning Poncelet í tilfelli hrings og sporbaugs

Setning 2. *(sjá mynd 1) G.r.f. að sporbaugurinn* (2) *sé innan sporbaugsins* (1)*, þ.e.*

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1.$$

Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:
i) til er þríhyrningur $\triangle A_0B_0C_0$ *innritaður í* e *og umritaður um* e_1*,*
ii) tölurnar a, b, a_1 *og* b_1 *uppfylla*

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1.$$

iii) fyrir hvaða punkt A *sem er á sporbaugnum* e *getum við fundið einkvæmt ákvarðaðan þríhyrning* $\triangle ABC$ *innritaðan í* e *og umritaðan um* e_1*.*

2 Einskorðun við hring og sporbaug

Skoðum tvo sporbauga

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

og

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{4}$$

þ.a. e_1 er innan e. Þessu skilyrði má lýsa sem

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1.$$

Með einföldum hnitaskiptum í planinu,

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \tag{5}$$

hefur sporbaugurinn e í nýju hnitunum jöfnuna

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{6}$$

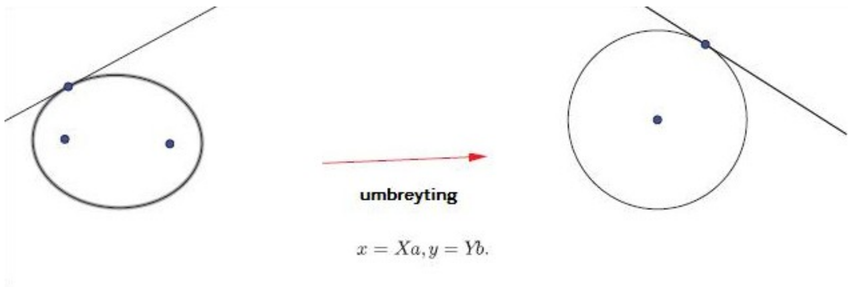
þ.a. hann er hringurinn $k(O, 1)$ með miðju í upphafspunkti nýja hnitakerfisins O og radíus 1.

Hinn sporbaugurinn e_1 verður

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1, \quad A_1 = \frac{a_1}{a}, \quad B_1 = \frac{b_1}{b} \tag{7}$$

og ljóst er að þessi breyting á hnitum varðveitir skurðpunkta, línu er breytt í línu, hring í hring, sporbaugi í sporbaug (eða hring sem sértilfelli) og ef lína er snertill sporbaugsins þá helst hún sem snertill sporbaugsins eftir hnitaskiptin (sjá mynd 2).

Dæmi 1. *Sannaðu þá staðreynd að ef lína og sporbaugur eru snertlar þá haldast þau sem snertlar eftir hnitaskiptin* (5)*.*



Mynd 2: Sporbaugi er breytt í hring

Héðan í frá vinnum við með hring $k(O, 1)$ með miðju í upphafspunktinum O og radíus 1.

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{8}$$

og sporbaug e_1

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad 1 > a_1 \geq b_1 \tag{9}$$

inni í $k(O, 1)$ eins og sést á mynd 1

Við útbúum lista af spurningum til að undirbúa lausnina á verkefninu (eða sönnunina á setningu Poncelets):

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O, 1)$ finnið snertilínurnar frá A_0 til e_1 og finnið einnig skurðpunkta þessara snertilína við hringinn $x^2+y^2 = 1$. Köllum skurðpunktana A_1, A_2 (okkur vantar formúlu sem lýsir hnitum A_1, A_2 m.t.t. x_0, y_0 og halla línanna A_0A_1 og A_0A_2, k_1, k_2);

- Finnið vensl milli φ_j og $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$ með því að nota stikunina

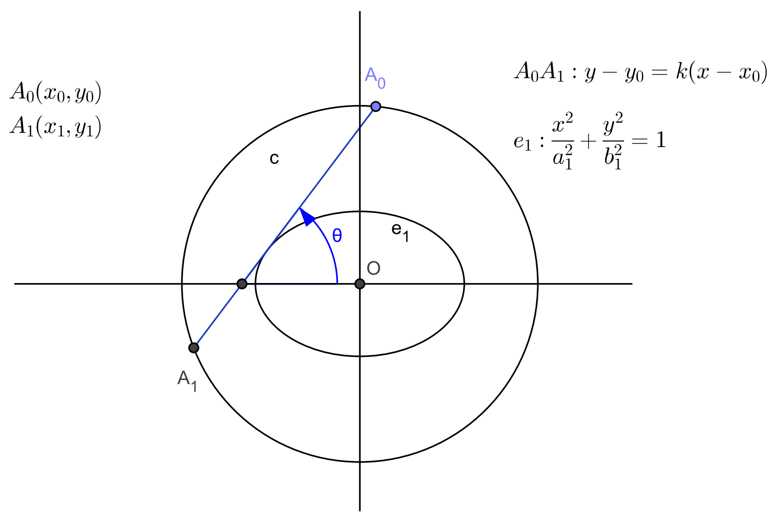
$$x_j = \cos\varphi_j, y_j = \sin\varphi_j, \; j = 0, 1, 2 \tag{10}$$

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O, 1)$, snertilínur frá A_0 til e_1 sem skera $k(O, 1)$ í punktunum A_1, A_2 notið stikunina (10) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan A_0A_1 sé snertill sporbaugsins e_1, táknað við φ_0, φ_1 og $\theta_1 = \arctan k_1$.

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O,1)$, snertilínur frá A_0 til e_1, sem skera $k(O,1)$ í punktunum A_1, A_2, notið stikunina (10) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan A_0A_1 sé snertill sporbaugsins e_1, táknað við φ_0, φ_2 og $\theta_2 = \arctan k_2$.

- Með því að nota einfaldar hornafallaumbreytingar sýndu að eftirfarandi tvö skilyrði
  a) línan A_0A_1 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_0, φ_1 og $\theta_1 = \arctan k_1$)
  b) línan A_0A_2 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_0, φ_2 og $\theta_2 = \arctan k_2$)
  leiði til þess að
  $\star$ línan A_1A_2 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_1, φ_2 og $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$)

Við gefum svör, skref fyrir skref, á nokkrum hjálparsetningum sem auðveldlega má sannreyna.



Mynd 3: Hvenær er A_0A_1 snertill e_1?

Hjálparsetning 1. *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, má lýsa nauðsynlegum og nægjanlegum skilyrðum þess að línan $y - y_0 = k(x - x_0)$ gegnum punktinn $A_0(x_0, y_0)$ sé snertill e_1 með*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2a_1^2.$$

Hjálparsetning 2. *Gefinn er sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0(x_0, y_0)$ á einingarhringnum. Lína gegnum punktinn er táknuð með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

og annar skurðpunktur þessarar línu við einingarhringinn, $k(O,1) : x^2 + y^2 = 1$, er táknaður með $A_1(x_1, y_1)$. Þá er:

$$x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1}y_0,$$

$$y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1}x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}y_0.$$

Sönnun. Skurðpunktarnir eru gefnir með jöfnunum

$$x^2 + (y_0 + k(x - x_0))^2 = 1.$$

Þessi jafna hefur tvær rætur x_0 og x_1 þ.a.

$$x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1 + k^2}.$$

Út frá þessum venslum fáum við lýsingu á x_1. Á sama hátt fáum við lýsingu á y_1. □

Hjálparsetning 3. *Gefinn sporbaugur* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *og punktur* $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ *á einingarhringnum, þá táknum við með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

hvaða línu sem er í gegnum A_0*. Látum* $A_1(x_1, y_1)$ *vera skurðpunkt þessarar línu við einingarhringin* $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$*, þannig að* $A_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$*. Þá taka venslin úr hjálparsetningu 2 formið*

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

þar sem

$$\theta = \arctan k.$$

Sönnun. Við höfum venslin

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\cos(2\theta), \qquad \frac{2k}{k^2 + 1} = \sin(2\theta).$$

Með því að nota innsetninguna

$$x_1 = \cos\varphi, \ \ y_1 = \sin\varphi$$

fáum við

$$\begin{gathered}\cos\varphi = -\cos(2\theta)\cos\varphi_0 - \sin(2\theta)\sin\varphi_0 = \\ = \cos(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 + \sin(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \cos(2\theta + \pi - \varphi_0), \\ \sin\varphi = -\sin(2\theta)\cos\varphi_0 + \cos(2\theta)\sin\varphi_0 = \\ = \sin(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 - \cos(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \sin(2\theta + \pi - \varphi_0),\end{gathered}$$

og þessi vensl gefa

$$2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Þar með er sönnuninni lokið. □

Hjálparsetning 4. *Gefinn sporbaugur* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *og punktur* $A_0 = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$*, þá táknum við með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

hvaða línu sem er í gegnum A_0 *og með* A_1 *skurðpunkt línunnar við hringinn* $e : x^2 + y^2 = 1$*, þ.a.* $A_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$*. Þá er* t *snertill* e_1 *ef og aðeins ef*

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = b_1^2 \sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + a_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2.$$

Sönnun. Út frá hjálparsetningu 1 sést að við þurfum að umskrifa $(y_0 - kx_0)^2$ yfir í fall af φ og φ_0. Við höfum

$$y_0 - kx_0 = \frac{\cos\theta \sin\varphi_0 - \sin\theta\cos\varphi_0}{\cos\theta} = \frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\cos\theta}. \tag{11}$$

Með því að nota venslin

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

úr hjálparsetningu 3 sjáum við að teljarinn í (11) er

$$\sin(\varphi_0 - \theta) = \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)$$

meðan nefnarinn verður

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m \sin\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)$$

svo við fáum

$$\sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)(y_0 - kx_0)^2 = \cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right).$$

Með því að beita hjálparsetningu 1 á venslin hér að ofan þá ljúkum við sönnun hjálparsetningarinnar.

$\square$

Athugasemd 1. *Við getum endurskrifað venslin í hjálparsetningu 4 á mismunandi vegu með því að nota formúluna*

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2},$$

Þannig fæst

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2\cos(\varphi + \varphi_0) + D, \tag{12}$$

eða

$$(1 - c^2)\cos\varphi\cos\varphi_0 + (1 + c^2)\sin\varphi\sin\varphi_0 = D, \tag{13}$$

þar sem

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{14}$$

3 Sönnun á setningu Poncelets með hornaföllum

Við tökum punkt $A_0 = (cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0)$ á einingarhringnum og finnum tvær snertilínur t_1, t_2 gegnum A_0 að sporbaugnum

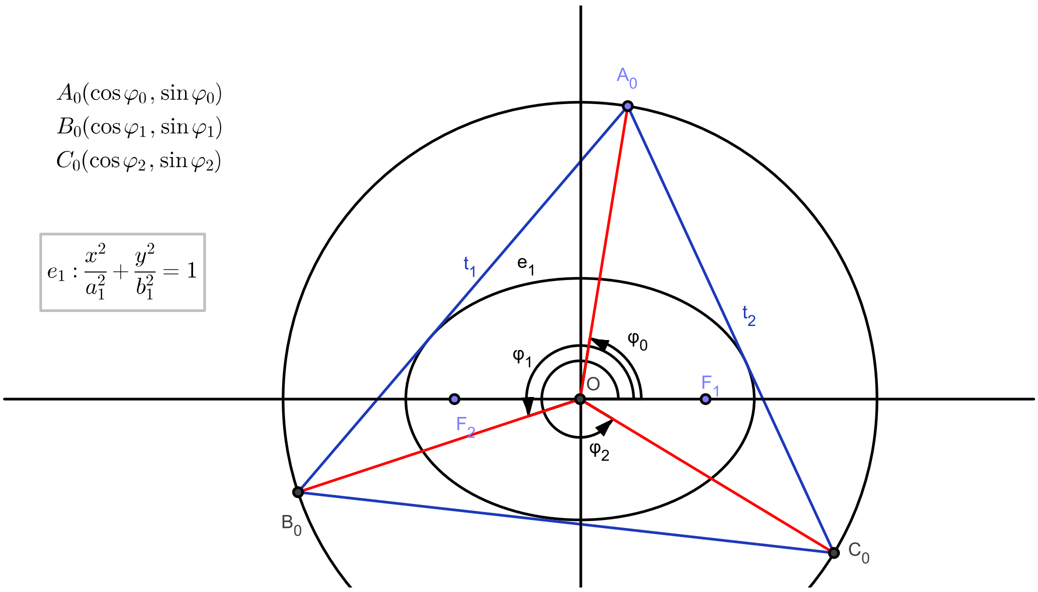
$$e_1 = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Síðan finnum við skurðpunkta t_1, t_2 við einingahringinn (sjá mynd 4) og táknum skurðpunktana tvo (frábrugðna A_0) með

$$B_0(cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0(cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2).$$

Byrjum á að setja fram forsendu Poncelets þannig að til sé a.m.k. einn þríhyrningur, $\triangle\, A_0B_0C_0$, innritaður í einingarhringinn, þ.e.

$$A_0 = (cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0), B_0 = (cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0 = (cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2), \quad 0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$$



Mynd 4: Merking forsendunnar að $\triangle A_0B_0C_0$ sé umritaður á e_1?

og umritaður um innri sporbauginn e_1 Þar sem A_0B_0 er snertill við e_1 vitum við að:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{15}$$

(skv. hjálparsetningu 4). Á sama hátt gefur sú staðreynd að A_0C_0 og B_0C_0 eru snertlar e_1 og hjálparsetning 4 að

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2. \tag{16}$$

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{17}$$

Við getum sameinað öll þessi vensl í ein

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_j-\varphi_\ell}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j+\varphi_\ell}{2}\right) + b_1^2, \quad 0 \le j \ne \ell \le 2. \tag{18}$$

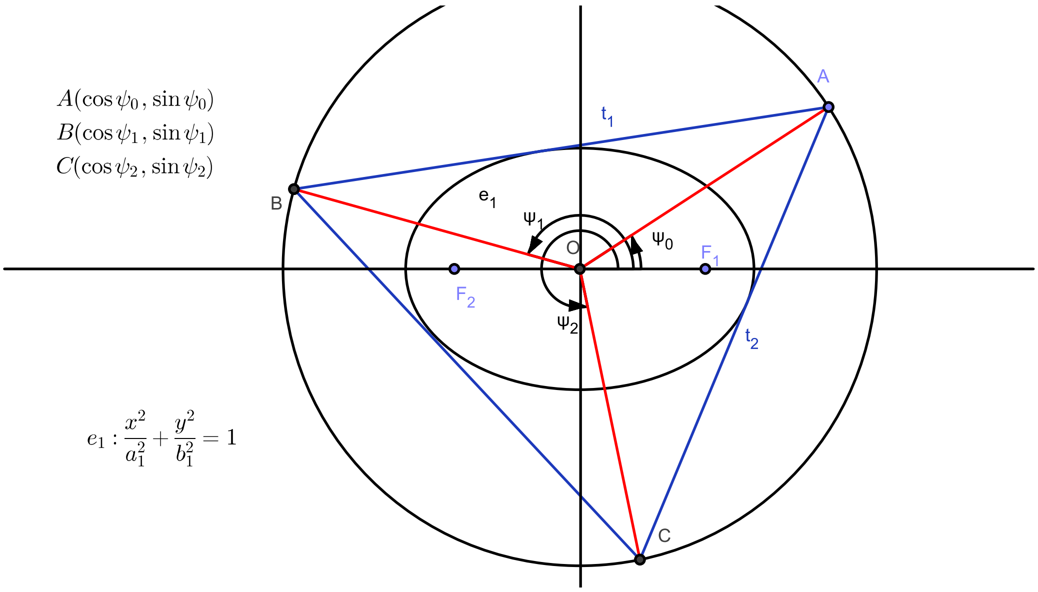
Hvað vitum við út frá forsendu setningar Poncelets og hvað þurfum við að sanna?

Við tökum hvaða punkt $A = (cos\psi_0\,, \sin\psi_0)$ sem er á einingarhringnum og finnum snertilínurnar t_1, t_2 gegnum A_0 að sporbaugnum

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Síðan finnum við skurðpunkta t_1, t_2 við einingahringinn (sjá mynd 5) og táknum skurðpunktana tvo (sem eru frábrugðnir A) með

$$B = (cos\psi_1\,, \sin\psi_1), C = (cos\psi_2\,, \sin\psi_2).$$



Mynd 5: Tvær hliðar eru snertlar $\Rightarrow$ þriðja hliðin einnig snertill

Þar sem AB er snertill e_1 vitum við að:

$$\cos^2\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1+\psi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{19}$$

(vegna hjálparsetningar 4). Eins, sú staðreynd að A_0C_0 og B_0C_0 eru snertlar e_1 og hjálparsetning 4 leiða til

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_0}{2}\right) + (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_0}{2}\right) = b_1^2. \tag{20}$$

Við drögum þá saman allar forsendur setningu Poncelets og getum sagt að (18), (19) and (20) séu sannaðar.

Hvað þurfum við þá að sanna?

Með hjálparsetningu 4 í huga sjáum við að markmið okkar er að sýna

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{21}$$

Rita má þessi vensl sem

$$(1-c^2)\cos\psi_2\cos\psi_1 = (1+c^2)\sin\psi_2\sin\psi_1 + D, \tag{22}$$

þar sem

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{23}$$

samkvæmt athugasemd 1

Nú erum við loks komin í þá stöðu að við getum beitt hjálparsetningunni um hornaföll úr viðaukanum og álykta að

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{24}$$

Með því að bera þessi vensl saman við (21) sjáum við að þörf er á eftirfarandi skilyrðum

$$4D^2 = (1-c^2)^2(1+c^2)^2,\ D^2 = b_1^2(1+c^2)^2 \tag{25}$$

Þessi vensl og (23) leiða til eftirfarandi nægjanlegs skilyrðis

$$a_1 + b_1 = 1 \tag{26}$$

sem leiðir til þess að $\triangle\ ABC$ er umritaður um e_1. Skilyrðið (23) er einnig nauðsynlegt til að uppfylla eiginleikann

- til er þríhyrningur $\triangle\ A_0B_0C_0$ umritaður um e_1.

Ef til er a.m.k. einn $\triangle\ A_0B_0C_0$ umritaður um e_1, þá gildir (26) og þar af leiðandi er $\triangle\ ABC$ umritaður um e_1.

Þar með er sönnun setningarinnar lokið.

4 Viðauki: Hjálparsetning um hornaföll

Hjálparsetning 5. *G.r.f. að*

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0,\ \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \neq 0,\ \cos\psi_0 \neq 0$$

og

$$\begin{cases} (1-c^2)\cos\psi_1\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_1\sin\psi_0 = D & ; \\ (1-c^2)\cos\psi_2\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_2\sin\psi_0 = D & . \end{cases} \tag{27}$$

Þá er

$$(1-c^2)\tan\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) = (1+c^2)\tan\psi_0 \tag{28}$$

og ennfremur

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{29}$$

Sönnun. Tökum mismun venslanna í jöfnu (27). Fáum

$$-(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0 = 0.$$

Forsendan

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0$$

leiðir til þess að

$$(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 = (1+c^2)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Þetta sannar (28). Leiða má út hin venslin með því að framkvæma eftirfarandi áætlun

- fyrsta jafnan í (27) $\times \sin\psi_2$ − önnur jafnan í (27) $\times \sin\psi_1$;

- fyrsta jafnan í (27) $\times \cos\psi_2$ − önnur jafnan í (27) $\times \cos\psi_1$.

Á þennan hátt fáum við

$$2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=2(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$-2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=-2(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0,$$

svo með því að nota forsenduna

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\neq 0$$

fáum við

$$\frac{D}{1-c^2}\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$\frac{D}{1+c^2}\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Með því að taka summu þessara samsemda í öðru veldi fáum við

$$\frac{D^2}{(1-c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)+\frac{D^2}{(1+c^2)^2}\sin^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)$$

og þessi jafna gefur (29)

Þar með lýkur sönnun hjálparsetningarinnar.

□

Heimildir

[1] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem,* Expo. Math. **5** (1987), 289 – 364.

[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99-102.

[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339-345.

[4] H. Dörrie, *100 great problems in Mathematics. Their history and solutions*, Dover Publ., New York, (1965).

[5] V. Dragovic, M. Radnovic *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, (2011).

[6] L.Flatto, *Poncelet's Theorem*, AMS, (2008).

[7] J. V. Poncelet, *Traite sur les Proprietes des Figures,* Paris, (1822).

[8] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)