

Dyna MAT

# Setning Poncelets og lotubundnir þríhyrningar í sporbaugi **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson  $\mathbf{I}$  onto show the path of rays of  $\mathbf{I}$  rays of  $\mathbf{I}$  rays of light through glass, lenses or systems of  $\mathbf{I}$ 

# 1 Sögulegur inngangur sames groan et experiments are quite complex, and you need a lot of experiments are quite complex, and you need a lot of experiments are quite complex, and you need a lot of experiments are  $\alpha$

Ein af mikilvægustu og fallegustu setningunum í varpfræði er setning Poncelets, sem fjallar um lokaða marghyrninga sem eru innritaðir í eitt keilusnið og umritaðir um annað keilusnið (að neðan gefum við nákvæmu yrðinguna og sönnum við hana í tilfelli þríhyrninga). Setningin hefur djúp tengsl við önnur svið stærðfræðinnar. Markmið þessa kaflahluta er að skýra nánar út tengslin milli setningu Poncelets og biljarðs í sporbaugi. Við fyrstu sýn virðast þessi viðfangsefni vera ótengd þar sem þau koma úr tveimur óháðum stærðfræðisviðum: rúmfræði og hreyfikerfi. En beinga þar sem þau nema ur veimur endeum startenæsis votum. Tunntaser og meginterni. En<br>falinn þráður tengir þessi viðfangsefni saman: tilvist undirliggjandi fyrirbæris (sem við nefnum Poncelet samsvörunina) sem reynist vera sporbaugsferill. Það er vel þekkt að hægt er að skilgreina grúpumynstur á sporbaugsferlum og hagnýting þess varpar miklu ljósi á fyrrnefnd viðfangsefni. equipment. It is difficult enough to show a ray of light in air – you need smoke, dust or any other way simulation, the pedagogic value is not quite the same), but *complementing* it. It can as well be useful

Til að lesa flestar bækur tengdar þessu viðfangefni þarf undirstöðu í tvinnfallagreiningu, línulegri algebru og grannfræði og því er ekki einfalt að búa til verkefni sem henta nemendum á framhaldsskólastigi. The glass and continues the glass and continues the same happens when the same happens when

Við reynum því að finna nálgun sem krefst einungis þeirra verkfæra sem finnast í venjulegri framhaldsskólanámsskrá. Þetta er ekki auðleyst vandamál. Hin klassíska A. Cayley nálgun (sjá  $[2], [3]$  $[2], [3]$  $[2], [3]$ ) notar sporbaugsheildi, aðrar heimildir (sjá [\[5\]](#page-9-2), [\[6\]](#page-9-3), [\[8\]](#page-9-4) og heimildirnar sem er þar vísað í) beita rökum úr varprúmfræði og grúpufræði. light reaches the other surface of the lens – again mathematics is required to calculate the angle in við reynum því að finna nalgun sem krefst einungis þeirra verkfæra sem finnast í venjule

Fyrir framsetningu á verkefni Poncelets þarf einungis að þekkja skilgreiningu og jöfnu sporbaugs. DGS it is possible to simulate the properties of a lens without actually having to use a lens, laser light, eyrir framsetningu a verkemi Poncelets pari einungis ao pekkja skilgreiningu og jo

Setning 1. (Setning Poncelets) Gerum ráð fyrir að gefnir séu tveir sporbaugar þannig að annar  $\vec{a}$  inni í hinum. Ef til er n-hyrningur sem er innritaður í öðrum sporbaugnum og umritaður um hinn sporbauginn þá er sérhver punktur á jaðri ytri sporbaugsins hornpunktur í umrituðum am num sporoaagum pa er se.<br>*n*-hyrningi innra sporbaugsins.

Til eru nokkrar sannanir á þessari merkilegu setningu, flestar þeirra eru ekki einfaldar. Rekja má setningu Poncelets til nítjándu aldar og veittu margir stærðfræðingar þess tíma henni athygli (ítarleg sögulýsing er gefin í [\[1\]](#page-9-5)). Aðalástæðan fyrir þessu er sú staðreynd að margar sannanir setningarinnar krefjast notkunar tvinntölu- og einsleitra hnita, hugtaka sem voru að koma fram á þeim tíma (1813) þegar Poncelet uppgötvaði setninguna. Það gerði hann meðan hann var í haldi sem stríðsfangi í Rússnesku borginni Saratov. Eftir að hann snéri aftur heim til Frakklands birti hann sönnunina í bók sinni [\[7\]](#page-9-6), sem gefin var út árið 1822. Sönnunin, sem var fremur margbrotin, einfaldar setninguna í tvo (ekki endilega sammiðja) hringi. Umræða um hugmyndirnar í sönnun Poncelets er gefin í [\[1\]](#page-9-5), bls. 298 - 311. When a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that t'il eru nokkrar sannanir á þessari merkilegu setningu, flestar þeirra eru ekki einfaldar

Tilgangur okkar er að finna einfalda sönnun á tilfelli sem er ekki augljóst: tilfellið  $n = 3$  og þar sem við höfum tvo sporbauga

<span id="page-0-1"></span>
$$
e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}
$$

<span id="page-0-0"></span>og

$$
e_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,\tag{2}
$$

 $\frac{1}{2}$  bannig að  $e_1$  sé innan e.

Við munum sanna þetta tilfelli setningar Poncelets og auk þess eftirfarandi sértækari niðurstöðu.





<span id="page-1-0"></span>

Mynd 1: Setning Poncelet i tilfelli hrings og sporbaugs for mathematics teachers. We have in the mathematics? There is a lot of it in the mathematics? If a ray of it is a ray of it in the mathematics? There is a ray of it is a ray of it in the mathematics? If a ray of it is a

**Setning 2.** (sjá mynd [1](#page-1-0)) G.r.f. að sporbaugurinn  $(2)$  sé innan sporbaugsins  $(1)$ ,  $\beta$ .e.

$$
a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,
$$
  

$$
a > a_1, b > b_1.
$$

 $\Delta \tilde{q}$  eru eftirfarandi skilyrði jafngild: become more complex, and from the equations alone it would be difficult to see what happens. With

i) til er þríhyrningur  $\Delta A_0 B_0 C_0$  innritaður í e og umritaður um  $e_1$ , ii) tölurnar  $a, b, a_1$  og  $b_1$  uppfylla

$$
\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}=1.
$$

iii) fyrir hvaða punkt A sem er á sporbaugnum e getum við fundið einkvæmt ákvarðaðan þrí-<br>I  $hyrning \triangle ABC$  innritaðan í e og umritaðan um  $e_1$ .

## 2 Einskorðun við hring og sporbaug

Skoðum tvo sporbauga

$$
e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
$$
\n(3)

og

$$
e_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,\tag{4}
$$

þ.a. e<sup>1</sup> er innan e. Þessu skilyrði má lýsa sem

<span id="page-1-1"></span> $a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$  $a > a_1, b > b_1.$ 

Með einföldum hnitaskiptum í planinu,

$$
X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b},\tag{5}
$$



Dyna MAT

hefur sporbaugurinn e í nýju hnitunum jöfnuna **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** Andreas Ulovec

$$
X^2 + Y^2 = 1\tag{6}
$$

þ.a. hann er hringurinn  $k(O, 1)$  með miðju í upphafspunkti nýja hnitakerfisins  $O$  og radíus 1.

Hinn sporbaugurinn  $e_1$  verður  $l_{\text{rel}}$  , many physics teachers group  $q$  and  $q$  and  $q$  need a lot of offs are quite complex, and  $q$ 

$$
\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1, \quad A_1 = \frac{a_1}{a}, \quad B_1 = \frac{b_1}{b} \tag{7}
$$

og ljóst er að þessi breyting á hnitum varðveitir skurðpunkta, línu er breytt í línu, hring í hring, sporbaugi í sporbaug (eða hring sem sértilfelli) og ef lína er snertill sporbaugsins þá helst hún sem snertill sporbaugsins eftir hnitaskiptin (sjá mynd [2\)](#page-2-0).  $\frac{1}{1}$  and adjustments to that's not always available, and adjustments to the system can usually only be seen to the system can usually only be seen to the system can usually only be seen to the system can usually only og ljóst er að þessi breyting á hnitum varðveitir skurðpunkta, línu er breytt í línu, hring í hri

Dæmi 1. Sannaðu þá staðreynd að ef lína og sporbaugur eru snertlar þá haldast þau sem snertlar eftir hnitaskiptin [\(5\)](#page-1-1). observe how the path of light actually changes. We want to demonstrate how the path of  $\alpha$  $D$ æ ${\rm m}$ 1. Sanna $ou$  pa sta $o$ reyna a $o$  ej una  $og$  spor $va$ ugur eru sner  $T_{\text{tot}}$  material for science teachers, who can use it to model experiments with lenses, w

<span id="page-2-0"></span>

Mynd 2: Sporbaugi er breytt í hring

Héðan í frá vinnum við með hring  $k(O, 1)$  með miðju í upphafspunktinum  $O$  og radíus 1.

$$
x^2 + y^2 = 1.\t\t(8)
$$

og sporbaug e<sup>1</sup>

og sporbaug 
$$
e_1
$$
  
\n
$$
\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad 1 > a_1 \ge b_1
$$
\n(9)

inni í  $k(O, 1)$  $k(O, 1)$  $k(O, 1)$  eins og sést á mynd 1

Við útbúum lista af spurningum til að undirbúa lausnina á verkefninu (eða sönnunina á setningu Poncelets):

- Gefinn sporbaugur  $e_1$ :  $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$  og punktur  $A_0(x_0, y_0)$  á  $k(O, 1)$  finnið snertilínurnar frá  $A_0$  til  $e_1$  og finnið einnig skurðpunkta þessara snertilína við hringinn  $x^2{+}y^2=1.$ Köllum skurðpunktana  $A_1, A_2$  (okkur vantar formúlu sem lýsir hnitum  $A_1, A_2$  m.t.t.  $x_0, y_0$ og halla línanna  $A_0A_1$  og  $A_0A_2$ ,  $k_1, k_2$ ;
- Finnið vensl milli  $\varphi_j$  og  $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$  með því að nota stikunina

<span id="page-2-1"></span>
$$
x_j = \cos \varphi_j, y_j = \sin \varphi_j, \ j = 0, 1, 2 \tag{10}
$$

• Gefinn sporbaugur  $e_1$ :  $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ , punktur  $A_0(x_0, y_0)$  á  $k(O, 1)$ , snertilínur frá  $A_0$ til  $e_1$  sem skera  $k(O, 1)$  í punktunum  $A_1, A_2$  notið stikunina [\(10\)](#page-2-1) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan  $A_0 A_1$  sé snertill sporbaugsins  $e_1$ , táknað við  $\varphi_0, \varphi_1$  og  $\theta_1 = \arctan k_1$ .  $\sigma_1 = \arctan \mu_1.$ 



Dyna MAT

- Gefinn sporbaugur  $e_1$ :  $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ , punktur  $A_0(x_0, y_0)$  á  $k(O, 1)$ , snertilínur frá  $A_0$ til  $e_1$ , sem skera  $k(O, 1)$  í punktunum  $A_1, A_2$ , notið stikunina [\(10\)](#page-2-1) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan  $A_0A_1$  sé snertill sporbaugsins  $e_1$ , táknað við  $\varphi_0, \varphi_2$  og  $\theta_2 = \arctan k_2.$ **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**
- $\bullet\,$ Með því að nota einfaldar hornafallaumbreytingar sýndu að eftirfarandi tvö skilyrði a) línan  $A_0A_1$  er snertill sporbaugsins  $e_1$  (skilyrðinu er lýst m.t.t.  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  og  $\theta_1 = \arctan k_1$ ) b) línan  $A_0A_2$  er snertill sporbaugsins  $e_1$  (skilyrðinu er lýst m.t.t.  $\varphi_0, \varphi_2$  og  $\theta_2 = \arctan k_2$ ) leiði til þess að  $\delta$ a) interested by interesting to show a ray of light in all  $\varphi_0, \varphi_1$  or  $\varphi_1$  – arcter was any other way of  $\varphi_1$

 $\star$  línan  $A_1A_2$  er snertill sporbaugsins  $e_1$  (skilyrðinu er lýst m.t.t.  $\varphi_1, \varphi_2$  og  $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$ )

.<br>Við gefum svör, skref fyrir skref, á nokkrum hjálparsetningum sem auðveldlega má sannreyna. observe how the path of the path of light and the path of the path of the path of  $\alpha$ 



Mynd 3: Hvenær er  $A_0A_1$  snertill  $e_1$ ? the angle of incidence (between the ray of light and the *normal*) is equal to the angle of reflection:

<span id="page-3-1"></span>**Hjálparsetning 1.** Gefinn sporbaugur  $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ , má lýsa nauðsynlegum og nægjanlegum skilyrðum þess að línan y – y<sub>0</sub> = k(x – x<sub>0</sub>) gegnum punktinn  $A_0(x_0, y_0)$  sé snertill e<sub>1</sub> með

$$
(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2 a_1^2.
$$

<span id="page-3-0"></span>**Hjálparsetning 2.** Gefinn er sporbaugur  $e_1$ :  $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$  og punktur  $A_0(x_0, y_0)$  á einingarhringnum. Lína gegnum punktinn er táknuð með

$$
t: y - y_0 = k(x - x_0)
$$

og annar skurðpunktur þessarar línu við einingarhringinn,  $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$ , er táknaður með  $A_1(x_1, y_1)$ . Þá er:

$$
x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1} y_0,
$$
  

$$
y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1} x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} y_0.
$$



Dyna MAT

Sönnun. Skurðpunktarnir eru gefnir með jöfnunum **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

$$
x^2 + (y_0 + k(x - x_0))^2 = 1.
$$

Þessi jafna hefur tvær rætur  $x_0$  og  $x_1$  þ.a. **1 Introduction**

$$
x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1 + k^2}.
$$

of making light visible. To show the path of light in materials, you need special equipment – smoke Út frá þessum venslum fáum við lýsingu á  $x_1$ . Á sama hátt fáum við lýsingu á  $y_1$ .  $\Box$ Ut frá þessum venslum fáum við lýsingu á  $x_1$ . A sama hátt fáum við lýsingu á  $y_1$ .

<span id="page-4-0"></span>**Hjálparsetning 3.** Gefinn sporbaugur  $e_1$ :  $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$  og punktur  $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$  á  $einingarhringnum, \not\!\vec{p} \not\!\vec{a} \ t \acute{a}knum \ vi\eth \ me\eth$  $\alpha$  removing one piece and putting and putting and putting another piece in  $\alpha$ **the the current student in the current lens and put in the new order in the new one of the new order of the new order theorem in the new order th** 

$$
t: y - y_0 = k(x - x_0)
$$

hvaða línu sem er í gegnum  $A_0$ . Látum  $A_1(x_1, y_1)$  vera skurðpunkt þessarar línu við einingarhringin  $k(O, 1): x^2 + y^2 = 1$ , þannig að  $A_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Þá taka venslin úr hjálparsetningu [2](#page-3-0) formið simulation, the pedagogic value is not pedagogic value is not pedagogic value in the same in the same is the u<br>It cannot be useful b  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1$ 

$$
\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},
$$

þar sem light reaches the other surface of the lens – again mathematics is required to calculate the angle in  $\mathcal{L}$ 

$$
\theta = \arctan k.
$$

 $Sönnun.$  Við höfum venslin

$$
\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\cos(2\theta), \quad \frac{2k}{k^2 + 1} = \sin(2\theta).
$$

Með því að nota innsetninguna

$$
x_1 = \cos \varphi, \ y_1 = \sin \varphi
$$

fáum við **2. 2.1 Ref** 

$$
\cos \varphi = -\cos(2\theta)\cos\varphi_0 - \sin(2\theta)\sin\varphi_0 =
$$
  
=  $\cos(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 + \sin(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \cos(2\theta + \pi - \varphi_0),$   
 $\sin \varphi = -\sin(2\theta)\cos\varphi_0 + \cos(2\theta)\sin\varphi_0 =$   
=  $\sin(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 - \cos(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \sin(2\theta + \pi - \varphi_0),$ 

og þessi vensl gefa

$$
2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.
$$

Þar með er sönnuninni lokið.

<span id="page-4-1"></span>**Hjálparsetning 4.** Gefinn sporbaugur  $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$  og punktur  $A_0 = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ , þá táknum við með

$$
t: y - y_0 = k(x - x_0)
$$

hvaða línu sem er í gegnum  $A_0$  og með  $A_1$  skurðpunkt línunnar við hringinn  $e: x^2 + y^2 = 1$ , þ.a.  $A_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Þá er t snertill e<sub>1</sub> ef og aðeins ef

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right) = b_1^2 \sin^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) + a_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2) \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2.
$$

 $\Box$ 



Dyna MAT

*Sönnun*. Út frá hjálparsetningu [1](#page-3-1) sést að við þurfum að umskrifa  $(y_0 - kx_0)^2$  yfir í fall af  $\varphi$  og  $\varphi_0$ . Við höfum **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

<span id="page-5-0"></span>
$$
y_0 - kx_0 = \frac{\cos\theta \sin\varphi_0 - \sin\theta \cos\varphi_0}{\cos\theta} = \frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\cos\theta}.
$$
 (11)

 $\text{Með því að nota venslin}$ 

$$
\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},
$$

úr hjálparsetningu [3](#page-4-0) sjáum við að teljarinn í  $(11)$  er

$$
\sin(\varphi_0 - \theta) = \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)
$$

meðan nefnarinn verður

$$
\cos \theta = \cos \left( \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi \right) = (-1)^m \sin \left( \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right)
$$

svo við fáum simulation, the pedagogic value is not quite the same), but *complementing* it. It can as well be useful

$$
\sin^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)(y_0-kx_0)^2=\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right).
$$

Með því að beita hjálparsetningu [1](#page-3-1) á venslin hér að ofan þá ljúkum við sönnun hjálparsetningarinnar. Með því að beita hjálparsetningu 1 á venslin hér að ofan þá ljúkum við sonnun hjálparsetningar:

 $\Box$ 

<span id="page-5-1"></span>Athugasemd 1. Við getum endurskrifað venslin í hjálparsetningu [4](#page-4-1) á mismunandi vegu með  $\mathbf{p}$ ví að nota formúluna  $\mathbf{p}$  $\frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$ 

$$
\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2},
$$

Þannig fæst

cos(ϕ − ϕ0) = c 2 cos(ϕ + ϕ0) + D, (12) **2 Easy beginnings – light hits a plane surface**

eða **2.1 Reflection**

$$
(1 - c2) \cos \varphi \cos \varphi_0 + (1 + c2) \sin \varphi \sin \varphi_0 = D,
$$
 (13)

þar sem

$$
c2 = a12 - b12, D = a12 + b12 - 1.
$$
 (14)

### 3 Sönnun á setningu Poncelets með hornaföllum

Við tökum punkt  $A_0 = (cos\varphi_0, sin\varphi_0)$  á einingarhringnum og finnum tvær snertilínur  $t_1, t_2$ gegnum  $A_0$  að sporbaugnum

$$
e_1 = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.
$$

Síðan finnum við skurðpunkta  $t_1, t_2$  við einingahringinn (sjá mynd [4\)](#page-6-0) og táknum skurðpunktana tvo (frábrugðna  $A_0$ ) með

$$
B_0(cos\varphi_1, sin \varphi_1), C_0(cos\varphi_2, sin \varphi_2).
$$

Byrjum á að setja fram forsendu Poncelets þannig að til sé a.m.k. einn þríhyrningur,  $\Delta A_0 B_0 C_0$ , innritaður í einingarhringinn, þ.e.

$$
A_0 = (cos\varphi_0, sin\varphi_0), B_0 = (cos\varphi_1, sin\varphi_1), C_0 = (cos\varphi_2, sin\varphi_2), 0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi
$$





<span id="page-6-0"></span>

Mynd 4: Merking forsendunnar að  $\Delta A_0 B_0 C_0$  sé umritaður á  $e_1$ ? light hits the glass surface of an optical lens, a part of it gets reflected back in a certain angle, and

og umritaður um innri sporbauginn  $e_1$  Þar sem  $A_0B_0$  er snertill við  $e_1$  vitum við að: which the light is reflected and refracted. For ideal lenses, there is an easy equation calculating these

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2\tag{15}
$$

(skv. hjálparsetningu [4\)](#page-4-1). Á sama hátt gefur sú staðreynd að  $A_0C_0$  og  $B_0C_0$  eru snertlar  $e_1$  og hjálparsetning [4](#page-4-1) að  $\frac{1}{2}$ etc. But even for the DGS, we need the DGS, we need the simulation in the first place.

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2.
$$
 (16)

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{17}
$$

Við getum sameinað öll þessi vensl í ein

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_j - \varphi_\ell}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j + \varphi_\ell}{2}\right) + b_1^2, \ \ 0 \le j \neq \ell \le 2. \tag{18}
$$

Hvað vitum við út frá forsendu setningar Poncelets og hvað þurfum við að sanna?

Við tökum hvaða punkt  $A = (cos\psi_0, sin \psi_0)$  sem er á einingarhringnum og finnum snertilínurnar  $t_1, t_2$  gegnum  $A_0$  að sporbaugnum

<span id="page-6-1"></span>
$$
e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.
$$

Síðan finnum við skurðpunkta  $t_1, t_2$  við einingahringinn (sjá mynd [5\)](#page-7-0) og táknum skurðpunktana tvo (sem eru frábrugðnir A) með

$$
B = (cos\psi_1, sin\psi_1), C = (cos\psi_2, sin\psi_2).
$$





<span id="page-7-0"></span>

Mynd 5: Tvær hliðar eru snertlar  $\Rightarrow$  þriðja hliðin einnig snertill light state model is the glass surface of an optical lens, and it gets reflecting back in

 $\text{Par sem } AB \text{ er snertill } e_1 \text{ vitum við að:}$ which the light is reflected and reflected. For ideal lenses, there is an easy equation calculating these systems  $\mathcal{L}$ 

<span id="page-7-1"></span>
$$
\cos^2\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1 + \psi_0}{2}\right) + b_1^2\tag{19}
$$

(vegna hjálparsetningar [4\)](#page-4-1). Eins, sú staðreynd að  $A_0C_0$  og  $B_0C_0$  eru snertlar  $e_1$  og hjálparsetning [4](#page-4-1) leiða til  $\frac{1}{2}$ etc. But even for the DGS, we need the simulation in the first place.

<span id="page-7-2"></span>
$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_0}{2}\right) + (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_0}{2}\right) = b_1^2.
$$
 (20)

Við drögum þá saman allar forsendur setningu Poncelets og getum sagt að [\(18\)](#page-6-1), [\(19\)](#page-7-1) and [\(20\)](#page-7-2) **2.1 Reflection** séu sannaðar. When a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that

Hvað þurfum við þá að sanna?

Með hjálparsetningu [4](#page-4-1) í huga sjáum við að markmið okkar er að sýna

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + b_1^2.
$$
 (21)

Rita má þessi vensl sem

$$
(1 - c2) cos  $\psi_2$  cos  $\psi_1$  = (1 + c<sup>2</sup>) sin  $\psi_2$  sin  $\psi_1$  + D, (22)
$$

<span id="page-7-4"></span>þar sem

<span id="page-7-3"></span>
$$
c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1.
$$
\n(23)

samkvæmt athugasemd [1](#page-5-1)

Nú erum við loks komin í þá stöðu að við getum beitt hjálparsetningunni um hornaföll úr viðaukanum og ályktum að

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1 - c^2)^2(1 + c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1 + c^2)^2}.
$$
 (24)



<span id="page-8-0"></span>Dyna MAT

Með því að bera þessi vensl saman við [\(21\)](#page-7-3) sjáum við að þörf er á eftirfarandi skilyrðum **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** Andreas Ulovec

$$
4D^2 = (1 - c^2)^2 (1 + c^2)^2, \ D^2 = b_1^2 (1 + c^2)^2 \tag{25}
$$

Þessi vensl og [\(23\)](#page-7-4) leiða til eftirfarandi nægjanlegs skilyrðis In our comes down to show the path of  $\alpha$  rays of  $\alpha$  rays of  $\alpha$  rays or systems of  $\alpha$ 

$$
a_1 + b_1 = 1 \tag{26}
$$

sem leiðir til þess að  $\triangle$   $ABC$  er umritaður um  $e_1$ . Skilyrðið [\(23\)](#page-7-4) er einnig nauðsynlegt til að uppfylla eiginleikann and adjustments to that's not always available, and adjustments to the system can usually only be seen to the system can usually only be seen to the system can usually only be seen to the system can u  $d_{\text{max}}$  removing and putting another piece in. To see what happens if  $\frac{d}{dt}$ 

• til er þríhyrningur  $\Delta A_0 B_0 C_0$  umritaður um  $e_1$ . • the change between  $\Delta A_0 B_0 C_0$  untitiation and  $e_1$ .

Ef til er a.m.k. einn $\Delta A_0 B_0 C_0$ umritaður um  $e_1$  þá gildir [\(26\)](#page-8-0) og þar af leiðandi er  $\Delta ABC$ umritaður um  $e_1$ .

Par með er sönnun setningarinnar lokið. simulation, the pedagogic value is not quite the same), but *complementing* it. It can as well be useful

#### 4 Viðauki: Hjálparsetning um hornaföll light hits the glass surface of an optical lens, a part of it gets reflected back in a certain angle, and

Hjálparsetning 5.  $G.r.f.$  að  $\mathbf{r}$  reaches the lens – again mathematics is required to calculate the again mathematics is required to calculate the angle in  $\mathbf{r}$ 

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0, \cos\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \neq 0, \cos\psi_0 \neq 0
$$

og

<span id="page-8-1"></span>
$$
\begin{cases}\n(1 - c^2) \cos \psi_1 \cos \psi_0 + (1 + c^2) \sin \psi_1 \sin \psi_0 = D \n(1 - c^2) \cos \psi_2 \cos \psi_0 + (1 + c^2) \sin \psi_2 \sin \psi_0 = D\n\end{cases}
$$
\n(27)

Þá er

<span id="page-8-2"></span>
$$
(1 - c2)\tan\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) = (1 + c2)\tan\psi_0
$$
 (28)

<span id="page-8-3"></span>og ennfremur When a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1 - c^2)^2(1 + c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1 + c^2)^2}.
$$
 (29)

Sönnun. Tökum mismun venslanna í jöfnu [\(27\)](#page-8-1). Fáum

$$
-(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0+(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0=0.
$$

Forsendan

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0
$$

leiðir til þess að

$$
(1 - c2) sin \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) cos \psi_0 = (1 + c2) cos \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) sin \psi_0.
$$

Þetta sannar [\(28\)](#page-8-2). Leiða má út hin venslin með því að framkvæma eftirfarandi áætlun

• fyrsta jafnan í  $(27) \times \sin \psi_2$  $(27) \times \sin \psi_2$  – önnur jafnan í  $(27) \times \sin \psi_1$ ;



Dyna MAT

• fyrsta jafnan í  $(27) \times \cos \psi_2$  $(27) \times \cos \psi_2$  – önnur jafnan í  $(27) \times \cos \psi_1$ . **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** Andreas Ulovec

Á þennan hátt fáum við

$$
2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = 2(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,
$$
  

$$
-2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = -2(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0,
$$
  
so með því að nota forsenduna

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0
$$

fáum við

$$
\frac{D}{1-c^2}\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,
$$

$$
\frac{D}{1+c^2}\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0.
$$

Með því að taka summu þessara samsemda í öðru veldi fáum við

$$
\frac{D^2}{(1-c^2)^2} \cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2} \sin^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)
$$

og þessi jafna gefur [\(29\)](#page-8-3)

Þar með lýkur sönnun hjálparsetningarinnar. et at the  $t_j$  and some mathematics the parameter the simulation in the first place.

 $\Box$ 

### Heimildir **2.1 Reflection**

- <span id="page-9-5"></span>[1] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem*, Expo. Math. 5 (1987),  $289 - 364$ .
- <span id="page-9-0"></span>[2] A. Cayley, Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon, Philosophical magazine 6 (1853), 99-102.
- <span id="page-9-1"></span>[3] A. Cayley, Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon, Philosophical magazine 7 (1854), 339-345.
- [4] H. Dörrie, 100 great problems in Mathematics. Their history and solutions, Dover Publ., New York, (1965).
- <span id="page-9-2"></span>[5] V. Dragovic, M. Radnovic Poncelet Porisms and Beyond, Birkhäuser, Springer-Basel, (2011).
- <span id="page-9-3"></span>[6] L.Flatto, Poncelet's Theorem, AMS, (2008).
- <span id="page-9-6"></span>[7] J. V. Poncelet, Traite sur les Proprietes des Figures, Paris, (1822).
- <span id="page-9-4"></span>[8] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)