Obvod harmonických trojuholníkov v elipse

Vladimír Georgiev, Veneta Nedyalkova
Slovenská verzia: Gabriela Galliková, Dušan Vallo

1 Úvod

Pokračujeme v našom štúdiu niektorých vlastností periodických trojuholníkov na biliardoch na základe poznatkov uvedených na strane 170 v [1]:

"Hľadajme trojuholník maximálneho obsahu, ktorý je vpísaný do *C*, kde *C* je nejaká krivka v rovine. Zrejme existuje najmenej jeden taký trojuholník s nedegenerovanou stranou dĺžky 0. Dotyčnica ku krivke *C* v ľubovoľnom vrchole tohto trojuholníka zviera so stranami trojuholníka (incidentnými s týmto vrcholom) rovnaké uhly. Povieme, že trojuholník je harmonický, ak odpovedá dvom rôznym pohybom. [1] Ak meníme polohu vrcholov trojuholníka na krivke spojito pri fixovanom poradí jeho vrcholov a znižujeme pritom hodnotu jeho obvodu na minimum, objavíme druhý harmonický trojuholník zodpovedajúci opäť dvom periodickým pohybom."

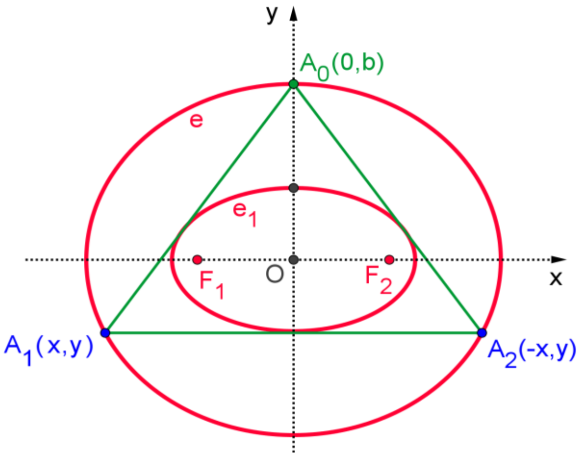
2 Príklady konkrétnych harmonických trojuholníkov

Uvedieme najjednoduchší prípad pre elipsu

$$e:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

a vezmeme bod $A_0 \in e$ na *y*-ovej osi, kde $A_0(0,b)$ (obr. 1).

Podľa Birkhoffovej koštrukcie ([1]) môžeme zostrojiť trojuholník $\triangle A_0A_1A_2$ s maximálnym obvodom, ktorý je vpísaný do elipsy *e*.



Obrázok 1: Harmonický trojuholník s A_0 (0, *b*).

V [5] sú odvodené vyjadrenia pre súradnice bodov $A_1(x,y)$, $A_2(-x.y)$.

Podľa tvrdenia vety 1 v [5] je zrejmé, že ak je $\triangle A_0A_1A_2$ periodický, potom je opísaný konfokálnej elipse e_1 s rovnicou

$$e_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (2)$$

---

[1] Poznámka prekladateľa: treba si uvedomiť, že uvažujeme o trojuholníku, teda jeho hranica je uzavretá lomená čiara. Ak zvolíme na krivke *C* bod A_0 ľubovoľne a zostrojíme dotyčnice ku elipse e_1, nemáme zaručené, že strana A_1A_2 bude dotyčnicou ku e_1. Keďže vrcholy trojuholníka sú rovnocenné, môžeme začať ktorýmkoľvek, preto rozlišujeme dva „pohyby“. Pohybom sa rozumie fixované poradie vrcholov: trojuholník $A_0A_1A_2$ alebo trojuholník $A_0A_2A_1$.

Rovnica (1) v [5] udáva podmienku pre konfokálnosť elíps e a e_1 , t.j. takých elíps, ktorých ohniská F_1 a F_2 sú totožné. Po úprave je podmienka v tvare

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2 \tag{3}$$

Budeme predpokladať, že e_1 je vo vnútri e a platí

$$a > b > 0,\ a_1 > b_1 > 0,\ a > a_1, b > b_1$$

Pripomeňme si niektoré z výsledkov v [5].

Lema 1. (pozri [5]) *Nech je daná elipsa* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$. Nutná *a postačujúca podmienka, aby priamka* $y = kx + b$ *prechádzajúca bodom* $A_0(0,b)$ bola *dotyčnicou ku* e_1 je

$$k^2 = \pm \frac{b^2 - b_1^2}{a_1^2}$$

Lema 2. (pozri [5]) *Nech je daná elipsa* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ *a bod* $A_0(0,b)$. *Ak označíme* t_1, t_2 *dotyčnice z bodu* A_0 *ku* e_1 *a priesečníky* A_1, A_2 *týchto dotyčníc s elipsou* $e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *, kde* $A_1(x,y)$, $x < 0$, $A_2(-x,y)$, *potom platí*

$$x = \frac{2a^2 a_1 b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = -M, \quad M = \frac{a^2 b(b^2 - b_1^2)}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = \frac{b(b^2 - a^2k^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

Zo vzťahu $M = b_1$ a konfokálnosti e a e_1 vieme odvodiť a_1, b_1 .

Lema 3. Nech je d*aná elipsa* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, *bod* $A_0(0,b)$ a *nech* $A_1(x_1, y_1)$, $x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2)$, $x_2 > 0$ *sú body určené v leme 2. Potom A_1A_2 je dotyčnica k e_1, vtedy a len vtedy, keď*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Dôkaz. Vzťah $M = b_1$ je ekvivalentný s

$$\frac{b\left(b^2 - a^2k^2\right)}{b^2 + a^2k^2} = b_1$$

Úpravou

$$b^2(b - b_1) - a^2k^2(b + b_1),$$

kde pomocou Lemy 1 dostaneme

$$b^2(b-b_1)-\frac{a^2(b-b_1)(b+b_1)^2}{a_1^2}=0.$$

Z $b \neq b_1$ zjednodušíme

$$b^2-\frac{a^2(b+b_1)^2}{a_1^2}=0$$

alebo

$$a_1^2b^2=a^2(b+b_1)^2$$

a to znamená, že

$$a_1b = a(b + b_1).$$

Z uvedeného vzťahu a z podmienky $a^2-b^2=a_1^2-b_1^2$ odvodíme systém dvoch rovníc

$$\begin{cases} a_1b=a(b+b_1), \\ a_1^2-b_1^2=a^2-b^2. \end{cases} \tag{4}$$

Tento systém má jediné riešenie pre $a_1> 0$; $b_1> 0$ v tvare

$$a_1=\frac{a(\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}-b^2)}{a^2-b^2},$$

$$b_1=\frac{b(a^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4})}{a^2-b^2}.$$

Tým je dôkaz lemy ukončený.

Ak položíme

$$s=\frac{b}{a}\in(0,1). \tag{5}$$

potom pre a_1; b_1 dostaneme vzorce

$$a_1=a\frac{(\sqrt{1-s^2+s^4}-s^2)}{1-s^2},$$

$$b_1=b\frac{(1-\sqrt{1-s^2+s^4})}{1-s^2}.$$

Necháme na čitateľa, aby uvažoval prípad zámeny polohy bodu A_0 voľbou $A_0(a,0)$ (obr. 2).

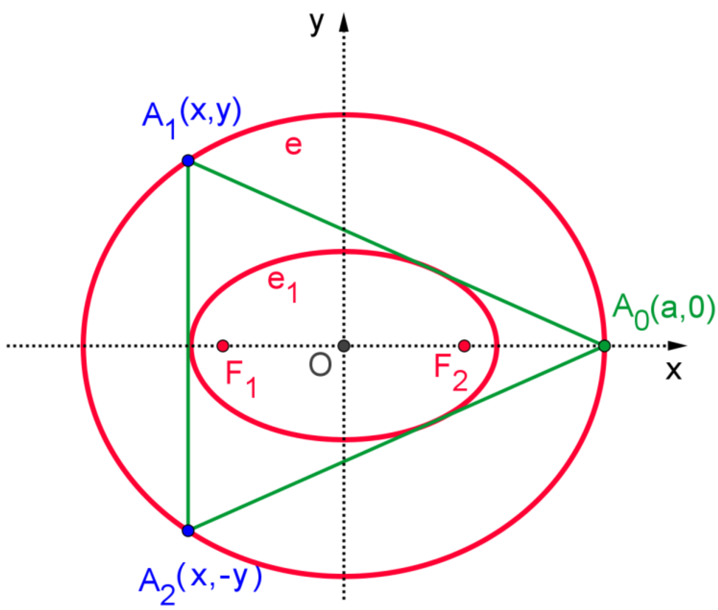
Cvičenie 1. *Nech je daná elipsa* $e_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$. *Nutná a postačujúca podmienka, aby priamka* $y=kx-ka$ *prechádzajúca bodom* $A_0(a,0)$ *bola dotyčnicou ku elipse* e_1 *je*

$$k^2=\pm\frac{b^2-b_1^2}{a_1^2}$$

Cvičenie 2. *Nech je daná elipsa* $e_1: \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ *a bod* $A_0(a,0)$. *Ak označíme t_1 t_2 dotyčnice z bodu A_0 ku elipse e_1 a body A_1, A_2 sú priesečníky týchto dotyčníc s elipsou* $e: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *kde* $A_1(x,y)$, $x<0$, $A_2(x,-y)$, *potom platí*

$$x = -\frac{2a(k^2-b^2)}{b^2+a^2k^2},$$

$$y = \frac{2ab_2k}{b^2+a^2k^2}.$$



Obrázok 2: Harmonický trojuholník s A_0 (a, 0)

Cvičenie 3 si môže čitateľ dokázať sám podľa dôkazu lemy 3.

Cvičenie 3. Nech je d*aná elipsa* $e_1: \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ *bod* A_0 (0, *b*) a *nech* body $A_1(x_1,y_1)$, $x_1<0$, $A_2(x_2,y_2)$, $x_2>0$ *sú bodmi určenými v leme 2*. *Potom* A_1A_2 je dotyčnica k e_1, *vtedy a len vtedy, keď*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}-b^2)}{a^2-b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4})}{a^2-b^2}.$$

3 Obvod konkrétnych harmonických trojuholníkov

Uvažujme najjednoduchší prípad elipsy

$$e: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a bod $A_0 \in e$ ležiaci na osi y, t.j. A_0 (0, b) (obr. 1) . Pre súradnice bodov A_1 (x, y), A_2 (-x, y) máme vzorce v tvare

$$x = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = -M, \quad M = \frac{b(b^2 - a^2k^2}{b^2 + a^2k^2},$$

odvodené v leme 2. Obvod trojuholníka $\triangle A_0A_1A_2$ je

$$P_1 = 2\sqrt{x^2 + (y-b)^2} + 2|x| =$$

$$= \frac{4a^2b|k|\sqrt{k^2+1}}{b^2 + a^2k^2} + \frac{4b|k|a^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

Aj lemu 1 môžeme použiť na výpočet obvodu P_1 , ako aj k dôkazu nasledujúcej lemy 4.

Lema 4. Nech je d*aná elipsa* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, *bod* A_0 (0, b) a nech body A_1 (x_1, y_1), x_1 <0, A_2 (x_2, *y2*), x_2> 0 *sú bodmi určenými v leme 2*. Pre obvod P_1 trojuholníka $\triangle A_0A_1A_2$ platí

$$P_1 = \frac{4a^2b(a + a_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b^2a_1^2 + a^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Ak uvažujeme o bode A_0 na x –ovej osi , t.j. A_0 (a, 0), dokážeme nasledovné

Lema 5. Nech je d*aná elipsa* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, *bod* A_0 (0, b) a *nech* A_1 (x_1, y_1), x_1 <0, A_2 (x_2, *y2*), x_2> 0 *sú bodmi určenými v leme 2*. Pre obvod P_2 trojuholníka $\triangle A_0A_1A_2$ platí

$$P_2 = \frac{4ab^2(b + b_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b_1^2a^2 + b^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Cvičenie 4. Dokážte, že pre obsahy platí : $S_1 = S_2$

Návod. Určte súradnice vrcholov trojuholníkov.

Literatúra

[1] G D. Birkhoff, *Dynamical systems* , AMS, Coll. Publ. Vol. 9, Revised edition (1966).
[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine **6** (1853), 99102.
[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine **7** (1854), 339345.
[4] V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhauser, Springer-Basel, 2011.
[5] V.Georgiev, I.Georgieva, V.Nedyalkova, *Dynamical billiards*, article in this book.
[6] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Poncelet's porism and periodic triangles in ellipse*, article in this book.
[7] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)