Poncelet’s porism e triangoli periodice in ellisse

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova

1 Small historical introduction

Uno dei teoremi piú importanti e belli della goemetia proiettiva é quella di Poncelet, relativa poligoni, inscritti in uno conica e circoscritti su un altra conica confocale (di seguito diamo la precisazione per il caso di triangoli). Il teorema é profonda interazione con gli altri campi di matematica. Lo scopo di questa sezione é quello di chiarire un aspetto di queste relazioni: la connessione tra Teorema di Poncelet e biliardo in un ellisse. A prima vista questi argomenti apparentemente non hanno nulla, appartenenti a due campi distinti: la geometria e la teoria dei sistemi dinamici. Ma c’e‘ un filo nascosto che lega questi temi insieme. Come é noto, la curva ellitticha puo‘ essere dotato di una struttura di gruppo, e lo sfruttamento di questa struttura fa molto luce sui temi di cui sopra.

Tuttavia, per leggere la maggior parte dei libri e dei riferimenti disponibili alcune prerequisiti (di solito di corsi della laurea specialistica in matematica) sono necessari: analisi complessa, algebra lineare, e alcuni elemneti della teoria degli insiemi e la topologia.

In questo senso l’argomentazione non puo‘ essere facilmente adattato ad alcune attivita‘ extracurricula nelle scuole superiori.

Per questo stiamo cercando di trovare l’approccio che ha bisogno di strumenti solo dai programmi standard High School.

Questo non e‘ un problema facile. il classico A. Cayley (vedi [2], [3]) approccio usa integrali ellitiche (vedi [5], [6], [8] usa argimenti della geometria projettiva e teoria dei gruppi.

Ile teorema di Poncelet é il seguente.

Theorem 1. *(Poncelet’s Porism) Dati due ellissi, una dentro l’altra, se esiste un poligono circonscritto e iscritto nel altra ellisee allora ogni punto dell’ellisse e vertice di un poligon circonscritto e iscritto.*

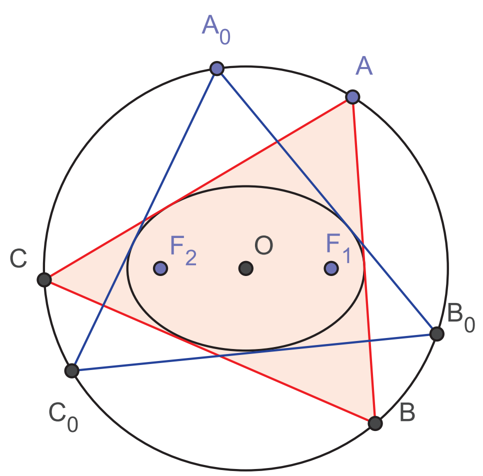

Figure 1: Teorema di Poncelet per il caso di un ellisse e una circonferenza.

Ci sono diverse dimostrazioni di questo teorema famoso, la maggior parte che non sono elementari. Teorema di Poncelet risale al XIX secolo e ha attirato l'attenzione di molti matematici di quella periodo (un dettagliato resoconto storico é dato in cite BKOR). Il principale ragione di questo interesse sembra derivare dal fatto che le prove piú di questo teorema richiedono l'utilizzo di complesse e omogenea coordinate, nozioni che cominciavano ad emergere al momento (1813) quando Poncelet ha scoperto il suo teorema. Poncelet ha scoperto il teorema, mentre in cattivita' come il prigioniero di guerra nella citta' russa di Saratov. Dopo il suo ritorno in Francia, una dimostrazione appare nel suo libro [7], publicato nel 1822. La prova, che e' sintetico e un po 'elaborato, riduce il teorema al caso di due cerchi (non' necessariamente concentrici). Una discussione delle idee di Poncelet é data in [1], pp. 298-311.

Il nostro scopo e' quello di trovare la prova elementare in una situazione non banale: il caso $n = 3$ e la situazione, quando avremo due ellissi

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

e

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{2}$$

tale che e_1 é dentro e.

Dimostreremo in questo caso il teorema Poncelet ', nonche' il seguente risultato piu' preciso.

Theorem 2. *(see Figure 1) Se l'ellisse* (2) *é dentro l'ellisse* (1), *cioé*

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1,$$

allora le seguente condizioni sono equivalenti:

i) esiste un triangolo $\triangle A_0B_0C_0$ *iscritto in* e *é circoscritto a* e_1,

ii) abbiamo la relazione

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1.$$

iii) per ogni punto A *dell' ellisse* e *si trova un triangolo unico* $\triangle ABC$ *iscritto in* e *é circoscritto a* e_1.

2 Riduzione al caso di cerchio e ellisse e relazioni preliminari

Consideriamo le due ellisse

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

e

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{4}$$

tale che e_1 é dentro e. Questo significa

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1.$$

Usando un cambiamento di variabili nel piano, otteniamo

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \tag{5}$$

cosé l'ellisse e ha l'equazione

$$X^2 + Y^2 = 1. \tag{6}$$

e diventa una circonferenza $k(O, 1)$ con centro al'origine O e raggio 1.

La seconda ellisse e_1 diventa

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1, \quad A_1 = \frac{a_1}{a}, B_1 = \frac{b_1}{b} \tag{7}$$

ed e' chiaro che questo cambiamento di coordinate conserva le nozioni di intersezione, linea si trasforma in linea, cerchio in cerchio, ellisse in ellisse (o cerchio come un caso parziale) e se la linea e ellisse sono tangenti rimangono tangente dopo il cambiamento delle coordinate(vedi la Figura 2).

Exercise 1. *Vedi se una linea e ellisse sono tangenti, allora dopo il coabiamento degli variabili rimangono tangenti.*

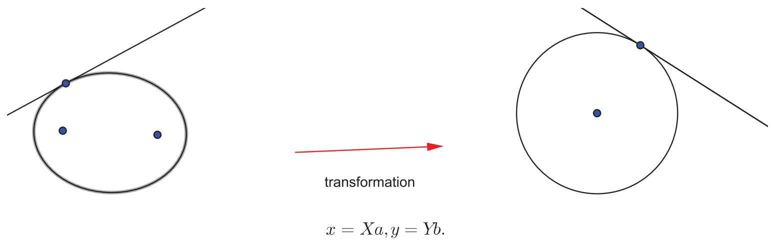

Figure 2: L'ellisse é trasformata in cerchio.

Per questo da ora in poi lavoreremo con il cerchio $k(O, 1)$ con centro O é raggio 1

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{8}$$

e l'ellisse e_1

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad 1 > a_1 \geq b_1 \tag{9}$$

dentro $k(O, 1)$ come si vede nella Figura 1.

Prepariamo ancora una volta un elenco delle domande per preparare la soluzione del problema (o la dimostrazione del teorema di Poncelet):

- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$ individuare le linee provenienti da A_0 e tangenti a e_1 e trovare i punti A_1, A_2 di intersezione di queste linee di tangenza con il cerchio $x^2 + y^2 = 1$;
- Usando la parametrizzazione

$$x_j = \cos\varphi_j, y_j = \sin\varphi_j, \; j = 0, 1, 2 \tag{10}$$

  trovare relazione tra φ_j e $\theta_{1,2} = arctank_{1,2}$.

- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$, le linee provenienti da A_0 tangenti a e_1 intersecando $k(O, 1)$ nei punti A_1, A_2 e usando (10), trovare la condizione neccessaria e sufficente tale che la linea A_0A_1 é tangente all'ellisse e_1.
- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$, le linee provenienti da A_0 tangenti a e_1 intersecando $k(O, 1)$ nei punti A_1, A_2 e usando la parametrizzazione (10) trovare la condizione neccesaria e sufficente tale che la linea A_0A_2 e' tangente all'ellisse e_1 .
- Usando le trasformate trigonometriche semplici vedere che le seguente due condizioni a) la retta A_0A_1 é tangente al ellisse e_1 b) la retta A_0A_2 é tangente al ellisse e_1 implicano c) la retta A_1A_2 é tangente al ellisse e_1.

Passo dopo passo diamo risposte che presentano alcuni Lemmi che possono essere verificati senza difficoltá.

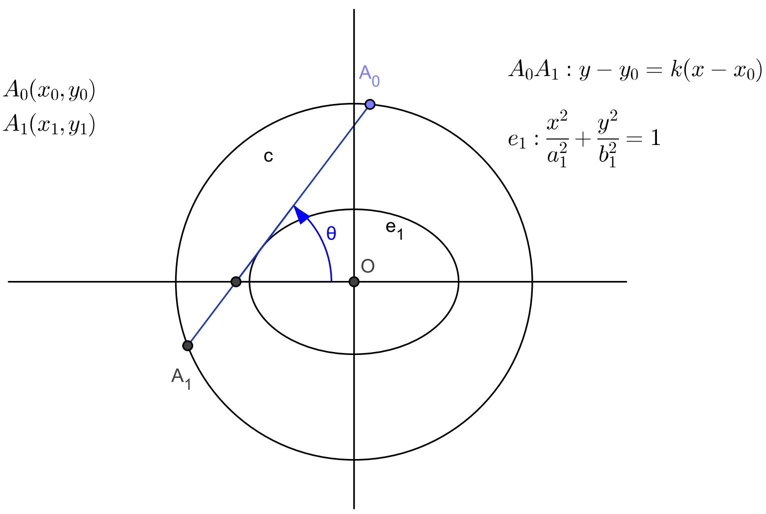

Figure 3: When A_0A_1 is tangent to e_1?.

Lemma 1. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ si puo trovare la condizione neccesaria e sufficente tale che la linea $y - y_0 = k(x - x_0)$ attraverso i punti $A_0(x_0, y_0)$ e' tangente al e_1 come segue*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2a_1^2.$$

Lemma 2. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(x_0, y_0)$sulla circonferenza di raggio 1 sia*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

qualsiasi retta che passa atraverso A_0 e sia $A_1(x_1, y_1)$ é il punto della seconda intersezione della retta e la circonferenza $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$. Allora abbiamo le relazioni

$$x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1}y_0,$$

$$y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1}x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}y_0.$$

Proof. I punti d'intersezione sono dati dalle equazioni

$$x^2 + (y_0 + k(x - x_0))^2 = 1.$$

L'equazione ha due radici x_0 tale che x_1 cosí abbiamo

$$x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1 + k^2}.$$

Questa relazione implica relazione per x_1. In modo simile procediamo per ottenere la representazione di y_1. □

Lemma 3. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$sulla circonferenza di raggio uno, sia*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

la retta proveniente da A_0 e sia A_1 il secondo punto d'intersezione della retta con la circonferenza $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$, tale che $A_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Allora le relazioni del Lemma 2 si posssano rescrivere come segue

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

dove

$$\theta = \arctan k.$$

Proof. Abbiamo le relazioni

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\cos(2\theta), \quad \frac{2k}{k^2 + 1} = \sin(2\theta).$$

La sostituzione

$$x_1 = \cos\varphi, y_1 = \sin\varphi$$

implica la relazione

$$\cos\varphi = -\cos(2\theta)\cos\varphi_0 - \sin(2\theta)\sin\varphi_0 =$$
$$= \cos(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 + \sin(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \cos(2\theta + \pi - \varphi_0),$$
$$\sin\varphi = -\sin(2\theta)\cos\varphi_0 + \cos(2\theta)\sin\varphi_0 =$$
$$= \sin(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 - \cos(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \sin(2\theta + \pi - \varphi_0),$$

e queste relazioni ci portano alla relazione

$$2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

□

Lemma 4. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ sia*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

la retta atraverso A_0 e sia A_1 il punto d'intersezione della linea con la circonferenza $e : x^2 + y^2 = 1$, tale che $A_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Allora t e' tangente a e_1 se e solo se abbiamo

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = b_1^2 \sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + a_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2.$$

Proof. Lemma 1 implica che dobbiamo trasformare $(y_0 - kx_0)^2$ in una funzione di φ e φ_0. In fatti, abbiamo

$$y_0 - kx_0 = \frac{\cos\theta \sin\varphi_0 - \sin\theta \cos\varphi_0}{\cos\theta} = \frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\cos\theta}. \tag{11}$$

Usnado ldentit'a

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

del Lemma 1, si vede che il numeratore in (11) é

$$\sin(\varphi_0 - \theta) = \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)$$

mentre il denominatore si puo rescrivere cosí

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m \sin\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)$$

otteniamo

$$\sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)(y_0 - kx_0)^2 = \cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right).$$

Appliccando Lemma 1 insieme con le relazioni descritti sopra completiamo la dimostrazione del Lemma.

□

Remark 1. *Siamo in grado di resrivere le relazioni del Lemma 4 in modo diverso usando la formula*

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2},$$

ottniamo

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2 \cos(\varphi + \varphi_0) + D, \tag{12}$$

o

$$(1 - c^2)\cos\varphi \cos\varphi_0 + (1 + c^2)\sin\varphi \sin\varphi_0 = D, \tag{13}$$

dove

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{14}$$

3 Dimostrazione del Teorema di Poncelet usando le formule trigonometriche

Scegliamo il punto $A_0(cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0)$ sulla circonferenza di raggio uno e troviamo due rette tangenti t_1, t_2 through A_0 all'ellisse

$$e_1 = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Cosi troviamo i punti d'intersezione di t_1, t_2 con la circonferenza di raggio uno (vedi la Figura 4) e sia

$$B_0(cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0(cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2)$$

due punti di intersezione (diversi da A_0)

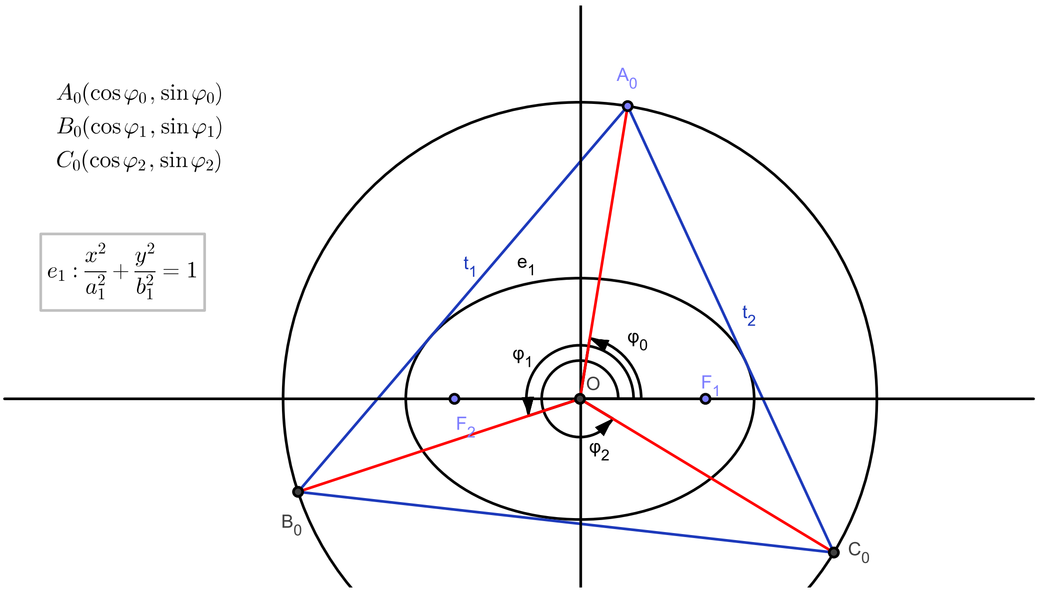

Figure 4: L'ipotesi $\triangle\ A_0B_0C_0$ é circonscritto a e_1?

Prima , l'ipotesi di esistenza di un triangolo $\triangle\ A_0B_0C_0$ iscritto nello circonferenza di raggio uno, cioé

$$A_0(cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0), B_0(cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0(cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2), \quad 0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$$

é circoscritta alla e_1 Sicome A_0B_0 e' tangente al e_1 abbiamo:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{15}$$

(vedi Lemma 4). In modo simile, il fatto A_0C_0 e B_0C_0 sono tangenti a e_1, e Lemma 4 implica

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2. \tag{16}$$

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{17}$$

Cosi' otteniamo

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_j - \varphi_\ell}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j + \varphi_\ell}{2}\right) + b_1^2, \quad 0 \leq j \neq \ell \leq 2. \tag{18}$$

Che coa sappiamo dalle ipotesi del teorema di Poncelet e cosa dobbiamo dimostrare?

Prendete un qualsiasi punto $A(cos\psi_0\,, \sin\psi_0)$ e troviamo sulle t_1, t_2

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Possiamo trovare i punti d'intersezione di t_1, t_2 con la circonferenza di raggio uno (vedi la Figura 5) e possiamo notare i due punti d'intersezione come segue

$$B(cos\psi_1\,, \sin\psi_1), C(cos\psi_2\,, \sin\psi_2).$$

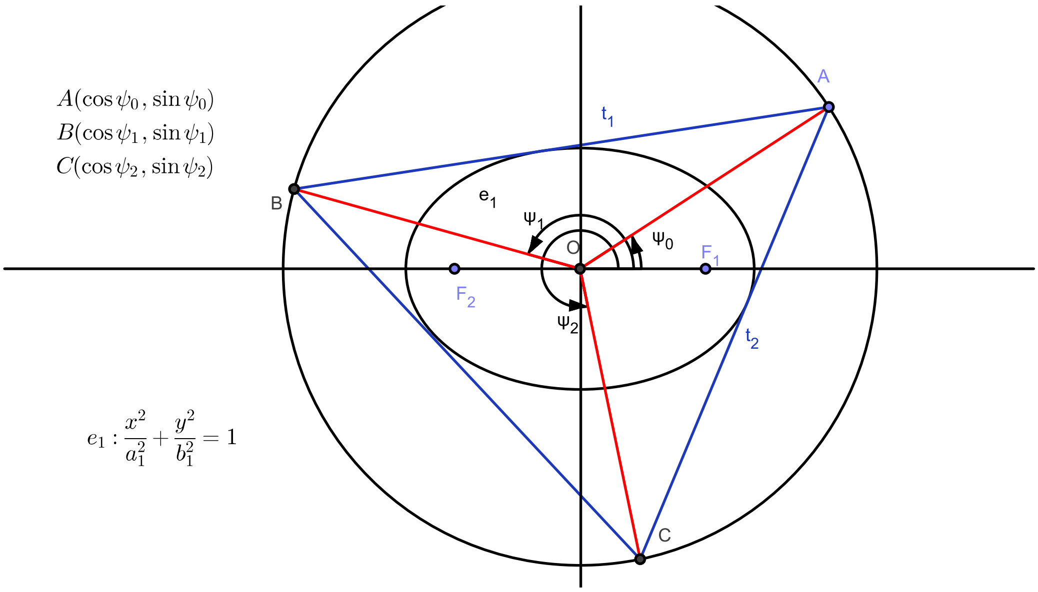

Figure 5: Two sides tangent $\Rightarrow$ the third side is also tangent.

Sicome AB e' tangente al e_1 abbiamo:

$$\cos^2\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1+\psi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{19}$$

(vedi Lemma 4). In modo simile troviamo

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_0}{2}\right) + (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_0}{2}\right) = b_1^2. \tag{20}$$

Cosi' (18), (19) and (20) sono sodisfatti.

Che cosa dobbiamo dimostrare?

Avere di nuovo Lemma 4 wsi vede che dobbiamo verificare che

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{21}$$

La relazione si puo rescrivere come segue

$$(1-c^2)\cos\psi_2\cos\psi_1 = (1+c^2)\sin\psi_2\sin\psi_1 + D, \tag{22}$$

dove

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{23}$$

secondo Remark 1.

Adesso applichiamo lemma trigonometrico dell'appendice

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{24}$$

Questa relazione e (21) implicano che e' sufficente a verificare

$$4D^2 = (1-c^2)^2(1+c^2)^2, \;\; D^2 = b_1^2(1+c^2)^2 \tag{25}$$

Questa relazione e (23) implicano una condizione sufficente

$$a_1 + b_1 = 1 \tag{26}$$

e questo implica $\triangle\, ABC$ e circoscritto intorno a e_1.

La condizione (23) ié anche neccessario per la proprietá

- esiste triangolo $\triangle\, A_0B_0C_0$ circoscritto intorno al on e_1.

Se esiste almeno un triangolo $\triangle\, A_0B_0C_0$ circoscritto intorno al e_1, allora abbiamo (26) e abbiamo $\triangle\, ABC$ é circoscritto intorno a e_1.

Questo completa la dimostrazione.

4 Appendice: Lemma trigonometricha

Lemma 5. *Sia*

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0, \;\; \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \neq 0, \cos\psi_0$$

e

$$\begin{cases} (1-c^2)\cos\psi_1\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_1\sin\psi_0 = D & ; \\ (1-c^2)\cos\psi_2\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_2\sin\psi_0 = D & . \end{cases} \tag{27}$$

Allora

$$(1-c^2)\tan\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) = (1+c^2)\tan\psi_0 \tag{28}$$

e

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{29}$$

Proof. Prendendo la differenza tra le ralzioni in (27), otteniamo

$$-(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0 = 0.$$

L'ipotesi

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0$$

implica

$$(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 = (1+c^2)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Cosi' (28) é verificato. L'altra relazione puo' essere ottenuta secondo il piano

- la prima equazione in (27) $\times \sin\psi_2 -$ la seconda equazione in (27) $\times \sin\psi_1$;
- la prima equazione in (27) $\times \cos\psi_2 -$ la seconda equazione in (27) $\times \cos\psi_1$.

Cosi' troviamo

$$2D \sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = 2(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$-2D \sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = -2(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0,$$

e usando l'ipotesi

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\neq 0$$

troviamo

$$\frac{D}{1-c^2}\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$\frac{D}{1+c^2}\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Prendendo i quadrati delle identitá, otteniamo

$$\frac{D^2}{(1-c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}\sin^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)$$

e questa equazione implica (29).

□

References

[1] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem,* Expo. Math. **5** (1987), 289 – 364.

[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99102.

[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339345.

[4] H. Dörrie, *100 great problems in Mathematics. Their history and solutions*, Dover Publ., New York, (1965).

[5] V. Dragovic, M. Radnovic *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, (2011).

[6] L.Flatto, *Poncelet's Theorem*, AMS, (2008).

[7] J. V. Poncelet, *Traite sur les Proprietes des Figures,* Paris, (1822).

[8] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)