

Dyna MAT

Poncelet's porism e triangoli periodice in ellisse Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software Andreas Ulovec

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova

1 Small historical introduction

Uno dei teoremi piú importanti e belli della goemetia proiettiva é quella di Poncelet, relativa poligoni, inscritti in uno conica e circoscritti su un altra conica confocale (di seguito diamo la precisazione per il caso di triangoli). Il teorema é profonda interazione con gli altri campi di matematica. Lo scopo di questa sezione é quello di chiarire un aspetto di queste relazioni: la connessione tra Teorema di Poncelet e biliardo in un ellisse. A prima vista questi argomenti apparentemente non hanno nulla, appartenenti a due campi distinti: la geometria e la teoria dei sistemi dinamici. Ma c'e' un filo nascosto che lega questi temi insieme. Come é noto, la curva ellitticha puo' essere dotato di una struttura di gruppo, e lo sfruttamento di questa struttura fa molto luce sui temi di cui sopra. ono dei teoremi più importanti e beni della goemetia prolettiva e quella di Foncelet, relat $\frac{1}{2}$ least through a lens with the help of dynamic grappo, $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{2}$

Tuttavia, per leggere la maggior parte dei libri e dei riferimenti disponibili alcune prerequisiti (di solito di corsi della laurea specialistica in matematica) sono necessari: analisi complessa, algebra lineare, e alcuni elemneti della teoria degli insiemi e la topologia. T is material can be useful for science teachers, who can use it to model experiments with lenses, wit ruttavia, per leggere la maggior parte dei libri e dei riferimenti disponibili alcune prerequi

In questo senso l'argomentazione non puo⁴ essere facilmente adattato ad alcune attivita⁴ extracurricula nelle scuole superiori. and questo senso rangomentazione non può essere racinhente adattato ad alcune attività

Per questo stiamo cercando di trovare l'approccio che ha bisogno di strumenti solo dai programmi effects – but this is just a model on lenses with the model of this is just a model on lenses and with light falling in len $\frac{1}{2}$

Questo non e' un problema facile. il classico A. Cayley (vedi [\[2\]](#page-9-0), [\[3\]](#page-9-1)) approccio usa integrali ellitiche (vedi [\[5\]](#page-9-2), [\[6\]](#page-9-3), [\[8\]](#page-9-4) usa argimenti della geometria projettiva e teoria dei gruppi.

Ile teorema di Poncelet é il seguente. etc. But even for the DGS, we need mathematics to create the simulation in the first place.

Theorem 1. (Poncelet's Porism) Dati due ellissi, una dentro l'altra, se esiste un poligono circonscritto e iscritto nel altra ellisee allora ogni punto dell'ellisse e vertice di un poligon cir-**2.1 Reflection** conscritto e iscritto.

Figure 1: Teorema di Poncelet per il caso di un ellisse e una circonferenza.

Ci sono diverse dimostrazioni di questo teorema famoso, la maggior parte che non sono elementari. Teorema di Poncelet risale al XIX secolo e ha attirato l'attenzione di molti matematici di quella periodo (un dettagliato resoconto storico é dato in cite BKOR). Il principale ragione di questo interesse sembra derivare dal fatto che le prove più di questo teorema richiedono l'utilizzo di complesse e omogenea coordinate, nozioni che cominciavano ad emergere al momento (1813) quando Poncelet ha scoperto il suo teorema. Poncelet ha scoperto il teorema, mentre in cattivita' come il prigioniero di guerra nella citta' russa di Saratov. Dopo il suo ritorno in Francia, una dimostrazione appare nel suo libro [\[7\]](#page-9-5), publicato nel 1822. La prova, che e' sintetico e un po 'elaborato, riduce il teorema al caso di due cerchi (non' necessariamente concentrici). Una discussione delle idee di Poncelet é data in $[1]$, pp. 298-311. **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** t_{t} thicker, which have the current lens and put in the new one. Studies can then observe then observe then observe the new order.

Il nostro scopo e' quello di trovare la prova elementare in una situazione non banale: il caso $n = 3$ e la situazione, quando avremo due ellissi

$$
e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}
$$

e

$$
e_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,\tag{2}
$$

tale che e_1 é dentro e .

Dimostreremo in questo caso il teorema Poncelet['], nonche' il seguente risultato piu¹ preciso. effects – but this is just a model, and it does work with light falling it does $\mathbf{r} = \mathbf{r}$ and with $\mathbf{r} = \mathbf{r}$

Theorem 2. (see Figure [1](#page-0-0)) Se l'ellisse (2) é dentro l'ellisse (1) , cioé \mathbf{b} more complex, and from the equations alone it would be different to see what happens. With \mathbf{b}

$$
a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,
$$

$$
a > a_1, b > b_1,
$$

 $allora$ le seguente condizioni sono equivalenti:

i) esiste un triangolo $\Delta A_0 B_0 C_0$ iscritto in e é circoscritto a e₁,

 $ii)$ abbiamo la relazione

$$
\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}=1.
$$

iii) per ogni punto A dell' ellisse e si trova un triangolo unico $\triangle ABC$ iscritto in e é circoscritto a e1.

2 Riduzione al caso di cerchio e ellisse e relazioni preliminari

Consideriamo le due ellisse

$$
e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
$$
 (3)

e

$$
e_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,\tag{4}
$$

tale che e_1 é dentro e. Questo significa

$$
a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,
$$

$$
a > a_1, b > b_1.
$$

Dyna MAT

Usando un cambiamento di variabili nel piano, otteniamo

$$
X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b},\tag{5}
$$

cosé l'ellisse e ha l'equazione

$$
X^2 + Y^2 = 1.
$$
 (6)

e diventa una circonferenza $k(O, 1)$ con centro al'origine O e raggio 1.

La seconda ellisse e_1 diventa α second emisse etc. Not always available, and adjustments to the system can usually only be seen usually α

$$
\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1, \quad A_1 = \frac{a_1}{a}, B_1 = \frac{b_1}{b} \tag{7}
$$

ed e' chiaro che questo cambiamento di coordinate conserva le nozioni di intersezione, linea si trasforma in linea, cerchio in cerchio, ellisse in ellisse (o cerchio come un caso parziale) e se la linea e ellisse sono tangenti rimangono tangente dopo il cambiamento delle coordinate(vedi la Figura [2\)](#page-2-0). reflection and refraction – not *instead* of the actual experiment (if one sees experiments only in

Exercise 1. Vedi se una linea e ellisse sono tangenti, allora dopo il coabiamento degli variabili $\it{rimangono\ tangent}i.$ ${\tt Exercise~1.}$ Vear se una unea e etusse sono tangenti, attora aopo u coabramento aegu varia

Figure 2: L'ellisse é trasformata in cerchio.

Per questo da ora in poi lavoreremo con il cerchio $k(O, 1)$ con centro O é raggio 1 When a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that for questo da ora in poi lavoreremo con il cerchio κ (*O*, i) con centro *O* e raggio 1

$$
x^2 + y^2 = 1.\t\t(8)
$$

e l'ellisse e1

$$
\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad 1 > a_1 \ge b_1 \tag{9}
$$

dentro $k(O, 1)$ come si vede nella Figura [1.](#page-0-0)

Prepariamo ancora una volta un elenco delle domande per preparare la soluzione del problema (o la dimostrazione del teorema di Poncelet):

- Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$ individuare le linee provenienti da A_0 e tangenti a e_1 e trovare i punti A_1, A_2 di intersezione di queste linee di tangenza con il cerchio $x^2 + y^2 = 1$;
- Usando la parametrizzazione

$$
x_j = \cos \varphi_j, y_j = \sin \varphi_j, \ j = 0, 1, 2 \tag{10}
$$

trovare relazione tra φ_j e $\theta_{1,2} = arctank_{1,2}$.

.

Dyna MAT

- Data l'ellisse e_1 : $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$, le linee provenienti da A_0 tangenti a e_1 intersecando $k(O, 1)$ nei punti A_1, A_2 e usando [\(10\)](#page-2-1), trovare la condizione neccessaria e sufficente tale che la linea A_0A_1 é tangente all'ellisse e_1 . **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**
- Data l'ellisse e_1 : $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, il punto $A_0(x_0, y_0)$ su $k(O, 1)$, le linee provenienti da A_0 tangenti a e_1 intersecando $k(O, 1)$ nei punti A_1, A_2 e usando la parametrizzazione [\(10\)](#page-2-1) trovare la condizione neccesaria e sufficente tale che la linea A_0A_2 e' tangente all'ellisse e_1 erovare to condizione necessario e sunneente tale ene la rinea π_{0} / τ_{2} e vangeme an' emisse
- Usando le trasformate trigonometriche semplici vedere che le seguente due condizioni a) la retta A_0A_1 é tangente al ellisse e_1 b) la retta A_0A_2 é tangente al ellisse e_1 implicano c) la retta $A_1 A_2$ é tangente al ellisse e_1 . the current lens and put the current lens and put in the new order $\frac{1}{2}$ is the new order the new order theorem of $\frac{1}{2}$ in the new order theorem of $\frac{1}{2}$ in the new order theorem of $\frac{1}{2}$ in the new order

of making light visible. To show the path of light in materials, you need special equipment – smoke

Passo dopo passo diamo risposte che presentano alcuni Lemmi che possono essere verificati senza difficoltá. T_{mincorta}

Figure 3: When A_0A_1 is tangent to e_1 ?.

Lemma 1. Data l'ellisse e_1 : $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ si puo trovare la condizione neccesaria e sufficente tale che la linea y – y₀ = k(x – x₀) attraverso i punti $A_0(x_0, y_0)$ e' tangente al e₁ come segue

$$
(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2 a_1^2.
$$

Lemma 2. Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(x_0, y_0)$ sulla circonferenza di raggio 1 sia

$$
t: y - y_0 = k(x - x_0)
$$

qualsiasi retta che passa atraverso A_0 e sia $A_1(x_1, y_1)$ é il punto della seconda intersezione della retta e la circonferenza $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$. Allora abbiamo le relazioni

$$
x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1} y_0,
$$

$$
y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1} x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} y_0.
$$

Dyna MAT

Proof. I punti d'intersezione sono dati dalle equazioni Andreas Ulovec

$$
x^2 + (y_0 + k(x - x_0))^2 = 1.
$$

L'equazione ha due radici x_0 tale che x_1 cosí abbiamo **1 Introduction**

$$
x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1 + k^2}.
$$

Questa relazione implica relazione per x_1 . In modo simile procediamo per ottenere la represen- $\mathcal{L}_{\text{test}}$ relazione implica relazione per x_1 . In modo simile procediamo per ottenere la repres tazione di y_1 . \Box dome disting one piece and putting and putting and putting and putting and y_1 .

Lemma 3. Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ sulla circonferenza $di\;raggio\;uno,\;sia$ **EXEMPLE 3.** Data t ethsse ϵ_1 . \bar{x} / $a_1 + \bar{y}$ / $o_1 = 1$ e u panto $A_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ suita changere.

$$
t:y-y_0=k(x-x_0)
$$

la retta proveniente da A_0 e sia A_1 il secondo punto d'intersezione della retta con la circonferenza $k(O, 1)$: $x^2 + y^2 = 1$, tale che $A_1(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Allora le relazioni del Lemma [2](#page-3-0) si posssano rescrivere come segue

$$
\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},
$$

dove

$$
\theta = \arctan k.
$$

Proof. Abbiamo le relazioni

$$
\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\cos(2\theta), \quad \frac{2k}{k^2 + 1} = \sin(2\theta).
$$

La sostituzione

$$
x_1 = \cos \varphi, y_1 = \sin \varphi
$$

implica la relazione **2.1 Reflection**

$$
\cos \varphi = -\cos(2\theta)\cos\varphi_0 - \sin(2\theta)\sin\varphi_0 =
$$

= $\cos(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 + \sin(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \cos(2\theta + \pi - \varphi_0),$
 $\sin \varphi = -\sin(2\theta)\cos\varphi_0 + \cos(2\theta)\sin\varphi_0 =$
= $\sin(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 - \cos(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \sin(2\theta + \pi - \varphi_0),$

e queste relazioni ci portano alla relazione

$$
2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.
$$

 \Box

Lemma 4. Data l'ellisse e_1 : $x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ sia

$$
t: y - y_0 = k(x - x_0)
$$

la retta atraverso A_0 e sia A_1 il punto d'intersezione della linea con la circonferenza e : $x^2 + y^2 =$ 1, tale che $A_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Allora t e' tangente a e_1 se e solo se abbiamo

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right) = b_1^2 \sin^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) + a_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2) \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2.
$$

Dyna MAT

Proof. Lemma [1](#page-3-1) implica che dobbiamo trasformare $(y_0 - kx_0)^2$ in una funzione di φ e φ_0 . In fatti, abbiamo **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

$$
y_0 - kx_0 = \frac{\cos\theta \sin\varphi_0 - \sin\theta \cos\varphi_0}{\cos\theta} = \frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\cos\theta}.
$$
 (11)

Usnado Identit'a
$$
\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},
$$

del Lemma [1,](#page-3-1) si vede che il numeratore in (11) é

$$
\sin(\varphi_0 - \theta) = \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)
$$

mentre il denominatore si puo rescrivere cosí

$$
\cos \theta = \cos \left(\frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi \right) = (-1)^m \sin \left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right)
$$

otteniamo simulation, the pedagogic value is not quite the same of α it. It can as well be useful as well be useful be useful be useful be useful be useful as well be useful as well be useful as well be useful as well be useful a

$$
\sin^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)(y_0-kx_0)^2=\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right).
$$

Appliccando Lemma [1](#page-3-1) insieme con le relazioni descritti sopra completiamo la dimostrazione del Lemma. ${\rm Lemma}.$

 \Box

Remark 1. Siamo in grado di resrivere le relazioni del Lemma \ddot{A} in modo diverso usando la formula DES IT IT IT DESIRE TO SIMULATE TO SIMULATE THE PROPERTY AND IT IS DESIRED TO USE A LENS WITHOUT ACTUALLY HAVING for the DGS, we need the DGS, we need the simulation in the simulation in the simulation in the simulation in the first place.

$$
\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2},
$$

ottniamo

$$
\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2 \cos(\varphi + \varphi_0) + D,\tag{12}
$$

o

$$
(1 - c2) \cos \varphi \cos \varphi_0 + (1 + c2) \sin \varphi \sin \varphi_0 = D,
$$
\n(13)

dove

$$
c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1.
$$
\n(14)

3 Dimostrazione del Teorema di Poncelet usando le formule trigonometriche

Scegliamo il punto $A_0(cos\varphi_0, sin\varphi_0)$ sulla circonferenza di raggio uno e troviamo due rette tangenti t_1, t_2 through A_0 all'ellisse

$$
e_1 = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.
$$

Cosi troviamo i punti d'intersezione di t_1, t_2 con la circonferenza di raggio uno (vedi la Figura [4\)](#page-6-0) e sia

$$
B_0(cos\varphi_1, sin\varphi_1), C_0(cos\varphi_2, sin\varphi_2)
$$

due punti di intersezione (diversi da A_0)

Figure 4: L'ipotesi $\Delta A_0 B_0 C_0$ é circonscritto a e_1 ?

Prima , l'ipotesi di esistenza di un triangolo $\Delta A_0 B_0 C_0$ iscritto nello circonferenza di raggio uno, cioé $\frac{1}{2}$ reflected and reflective and reflected. For interfaction calculation calculatio ϵ – but the model, and it does well only with this light falling in lens and with ϵ

$$
A_0(\cos\varphi_0\sin\varphi_0), B_0(\cos\varphi_1\sin\varphi_1), C_0(\cos\varphi_2\sin\varphi_2), \quad 0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi
$$

é circoscritta alla e_1 Sicome A_0B_0 e' tangente al e_1 abbiamo: \mathbf{B} even for the DGS, we need the simulation in the first place.

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2\tag{15}
$$

(vedi Lemma [4\)](#page-4-0). In modo simile, il fatto A_0C_0 e B_0C_0 sono tangenti a e_1 , e Lemma [4](#page-4-0) implica

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2. \tag{16}
$$

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) + b_1^2.
$$
 (17)

Cosi' otteniamo

$$
\cos^2\left(\frac{\varphi_j - \varphi_\ell}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j + \varphi_\ell}{2}\right) + b_1^2, \ \ 0 \le j \neq \ell \le 2. \tag{18}
$$

Che coa sappiamo dalle ipotesi del teorema di Poncelet e cosa dobbiamo dimostrare? Prendete un qualsiasi punto $A(cos\psi_0, sin \psi_0)$ e troviamo sulle t_1, t_2

$$
e_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.
$$

Possiamo trovare i punti d'intersezione di t_1, t_2 con la circonferenza di raggio uno (vedi la Figura [5\)](#page-7-0) e possiamo notare i due punti d'intersezione come segue

$$
B(cos\psi_1\,,\sin\psi_1),C(cos\psi_2\,,\sin\psi_2).
$$

Figure 5: Two sides tangent \Rightarrow the third side is also tangent. Figure 5: Two sides tangent \Rightarrow the third side is also tangent.

Sicome AB e' tangente al e_1 abbiamo: become $AD \in$ vangence and refraction calculation calculation calculating the intervals there is an easy equation calculation calculation calculation calculation calculation calculation calculation calculation calculation

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1 + \psi_0}{2}\right) + b_1^2\tag{19}
$$

(vedi Lemma [4\)](#page-4-0). In modo simile troviamo \vec{v} between \vec{v} . In those simulation in the first place.

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_0}{2}\right) + (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_0}{2}\right) = b_1^2.
$$
 (20)

Cosi' (18) , (19) and (20) sono sodisfatti. When a ray of light hits a plane glass surface, a part of it is reflected. The *law of reflection* says that

Che cosa dobbiamo dimostrare?

Avere di nuovo Lemma [4](#page-4-0) wsi vede che dobbiamo verificare che

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + b_1^2.
$$
 (21)

La relazione si puo rescrivere come segue

$$
(1 - c2) cos \psi_2 cos \psi_1 = (1 + c2) sin \psi_2 sin \psi_1 + D,
$$
\n(22)

dove

$$
c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1.
$$
\n(23)

secondo Remark [1.](#page-5-1)

Adesso applichiamo lemma trigonometrico dell'appendice

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1 - c^2)^2(1 + c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1 + c^2)^2}.
$$
 (24)

Dyna MAT

Questa relazione e [\(21\)](#page-7-3) implicano che e' sufficente a verificare **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software** Andreas Ulovec

$$
4D^2 = (1 - c^2)^2 (1 + c^2)^2, \ D^2 = b_1^2 (1 + c^2)^2 \tag{25}
$$

Questa relazione e [\(23\)](#page-7-4) implicano una condizione sufficente $\sum_{i=1}^{n}$ optics when it comes down to show the path of rays of rays or systems or systems or systems or systems of $\sum_{i=1}^{n}$

$$
a_1 + b_1 = 1 \tag{26}
$$

e questo implica \triangle *ABC* e circoscritto intorno a e_1 . glass is expected to the system can usually only be system can usually only be set of \mathcal{L}

La condizione [\(23\)](#page-7-4) ié anche neccessario per la proprietá

• esiste triangolo $\Delta A_0 B_0 C_0$ circoscritto intorno al on e_1 . $\sigma_{\rm s}$ is actually changes. We want to demonstrate how the path of $\sigma_{\rm s}$

Se esiste almeno un triangolo $\Delta A_0 B_0 C_0$ circoscritto intorno al e_1 , allora abbiamo [\(26\)](#page-8-0) e abbiamo \triangle *ABC* é circoscritto intorno a e_1 . reflection and refraction – not *instead* of the actual experiment (if one sees experiments only in

Questo completa la dimostrazione.

4 Appendice: Lemma trigonometricha component of an optical lens, and of an optical lens for mathematics teachers. Well, now where is the mathematics? There is a lot of it in there! If a ray of

Lemma 5. Sia and penetrates the glass and continues the glass and continues the same happens when the

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0, \cos\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \neq 0, \cos\psi_0
$$

$$
\begin{cases} (1 - c^2)\cos\psi_1\cos\psi_0 + (1 + c^2)\sin\psi_1\sin\psi_0 = D \\ (1 - c^2)\cos\psi_2\cos\psi_0 + (1 + c^2)\sin\psi_2\sin\psi_0 = D \end{cases} ; \tag{27}
$$

Allora Ω_{Hence}

$$
(1 - c2) tan \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) = (1 + c2) tan \psi_0
$$
 (28)

e

e

$$
\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1 - c^2)^2(1 + c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1 + c^2)^2}.
$$
 (29)

Proof. Prendendo la differenza tra le ralzioni in [\(27\)](#page-8-1), otteniamo

$$
-(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0+(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0=0.
$$

L'ipotesi

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0
$$

implica

$$
(1 - c2) sin \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) cos \psi_0 = (1 + c2) cos \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) sin \psi_0.
$$

Cosi' [\(28\)](#page-8-2) é verificato. L'altra relazione puo' essere ottenuta secondo il piano

- la prima equazione in $(27) \times \sin \psi_2$ la seconda equazione in $(27) \times \sin \psi_1$;
- la prima equazione in $(27) \times \cos \psi_2$ la seconda equazione in $(27) \times \cos \psi_1$.

Dyna MAT

Cosi' troviamo **Modelling optical lenses with Dynamic Geometry Software**

$$
2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = 2(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,
$$

$$
-2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = -2(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0,
$$

e usando l'ipotesi

$$
\sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0
$$

troviamo

$$
\frac{D}{1-c^2}\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,
$$

$$
\frac{D}{1+c^2}\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0.
$$

Prendendo i quadrati delle identitá, otteniamo for mathematics teachers. Well, now where is the mathematics? There is a lot of it in there! If a ray of

$$
\frac{D^2}{(1-c^2)^2} \cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2} \sin^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)
$$

 ϵ questa equazione implica [\(29\)](#page-8-3). \mathbf{b} – but this is just a model, and with thin lenses and with light falling in lense

experiences etc. But even for the Simulation in the simulation in the first place. In the first place, we need $D = 1$

- [1] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, Poncelet's closure theorem, Expo. Math. **5** (1987), $289 - 364$.
- [2] A. Cayley, Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon, Philosophical magazine 6 (1853), 99102. \mathbf{u} (1699), $\mathbf{3}\pi\mathbf{102}$.
- [3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine 7 (1854), 339345.
- [4] H. Dörrie, 100 great problems in Mathematics. Their history and solutions, Dover Publ., New York, (1965).
- [5] V. Dragovic, M. Radnovic *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, (2011).
- [6] L.Flatto, *Poncelet's Theorem*, AMS, (2008) .
- [7] J. V. Poncelet, Traite sur les Proprietes des Figures, Paris, (1822).
- [8] S.Tabachnikov, Geometry and Billiards, Students Mathematica Library, (2005)