

# Egg að hætti Evklíðs

## Freyja Hreinsdóttir

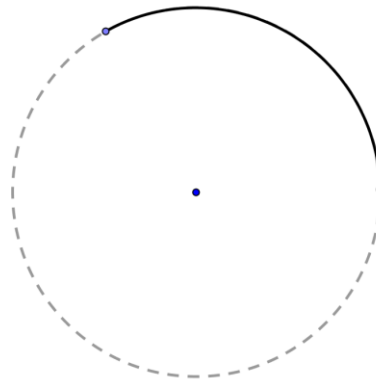
Háskóli Íslands

### 1 Inngangur

Með kviku rúmfræðiforriti eins og GeoGebra er mjög auðvelt að gera teikningar með reglustiku og hringfara. Það er sér í lagi auðvelt að teikna hringboga og hringi og með ákveðnum samsetningum þeirra má búa til myndir með allskonar lögun t.d. egglega myndir.

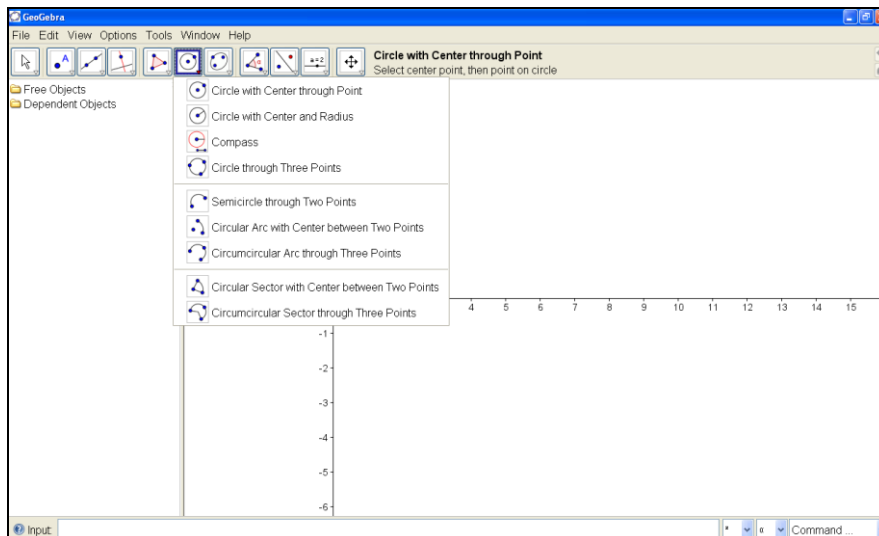
### 2 Hringbogar og hringir

Til að skilgreina hring þurfum við tvær stærðir, hnit miðpunktsins og geislann. Hvað þurfum við til þess að skilgreina hringboga? Þar sem hringbogi er hluti hring þurfum við sömu upplýsingar til að vita um hvaða hring er að ræða en einnig upplýsingar um lengd bogans og hvar á hringnum hann er staðsettur þ.e.a.s. gefinn hringurinn þurfum við að vita hvar hringboginn byrjar og hvar hann endar.



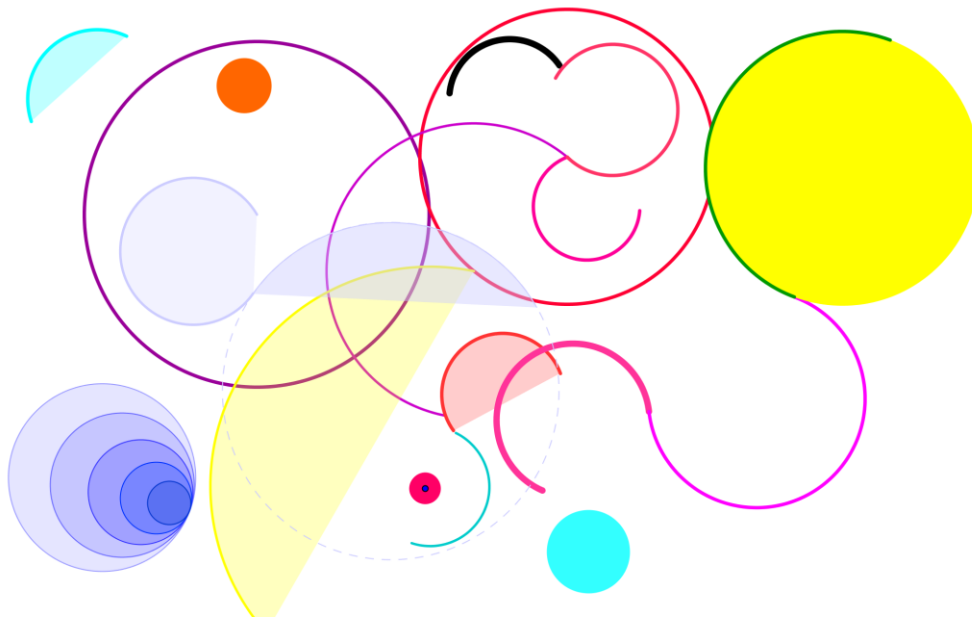
Mynd 1 Hringbogi á hring

Í GeoGebra eru nokkur verkfæri til að búa til hringboga og hringi:



Mynd2 Skjámynd sem sýnir þau verkfæri GeoGebra sem notuð eru fyrir hringboga og hringi

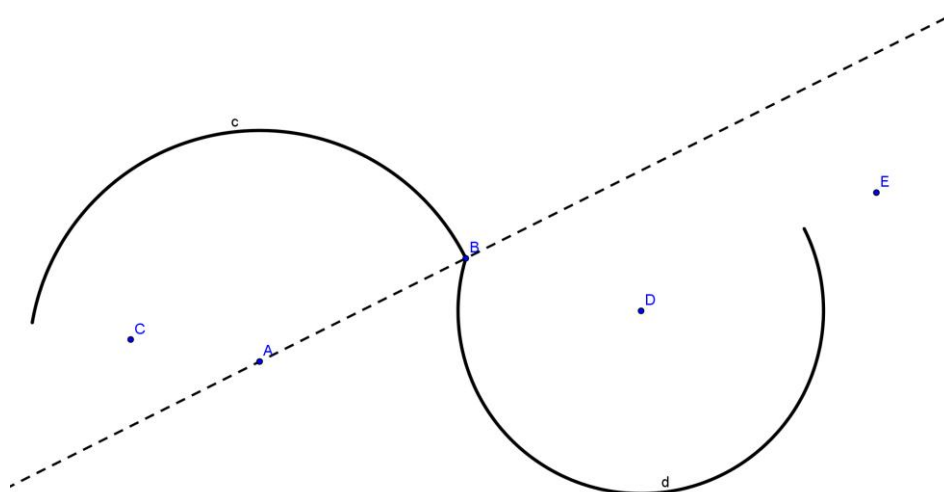
*Verkefni:* Búðu til nokkra hringboga og hringi í GeoGebra. Láttu suma hringbogana tengjast öðrum hringbogum og notaðu mismunandi lit og hönnun til að gera fallega mynd. Til að breyta lit og hönnun hlutar í GeoGebra er hægrismellt á hlutinn og valið *Eiginleikar* í valmynd sem opnast.



**Mynd 3** Mynd sem búin var til með hringbogum og hringjum

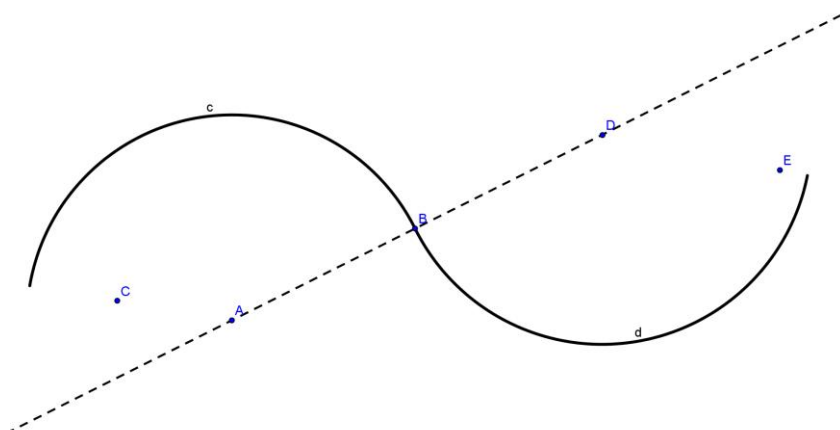
Takið eftir að sumir bogarnir á myndinni eru tengdir á *þjál*an hátt, það er að segja það er ekki brot þar sem þeir mætast. Við skoðum nú hvernig þetta er gert.

*Verkefni:* Opnið GeoGebra og búið til tvo hringboga  $c$  og  $d$  sem mætast í punkti. Prófið að flytja til punktana sem skilgreina bogana þannig að samskeytin verði þjál. Það er auðveldara að gera þetta ef þið teiknið línu gegnum samskeytin og þann miðpunkt sem skilgreinir annan hringbogann.



**Mynd 4** Tveir hringbogar sem mætast í punkti.

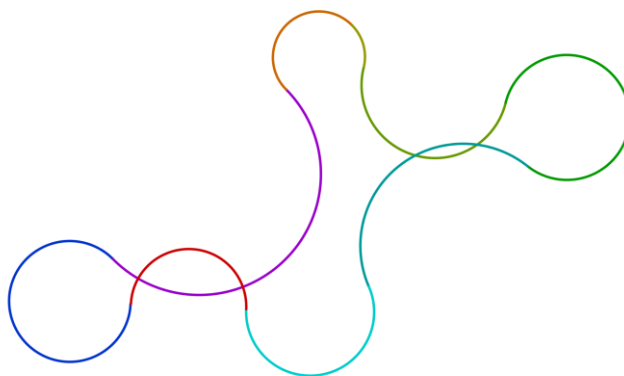
Hægt er að flytja punktinn  $D$  þannig að samskeyti hringboganna verði þjál eins og sýnt er á næstu mynd.



**Mynd 5** Hringbogar með þjál samskeyti

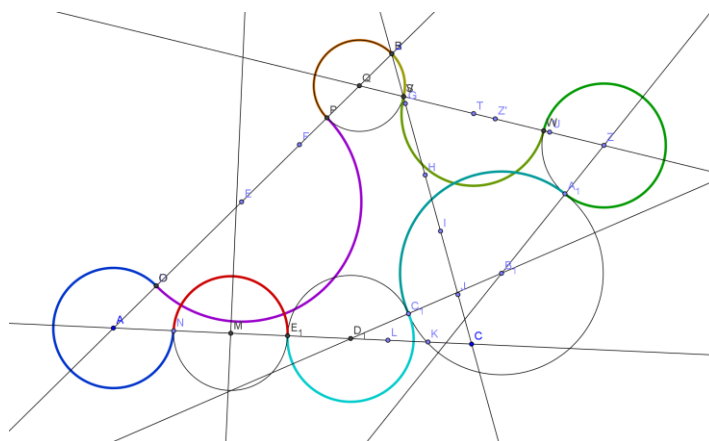
Þið hafið væntanlega tekið eftir því að nauðsynlegt skilyrði þess að samskeytin séu þjál er að **miðpunktur hringjanna tveggja (sem skilgreina hringbogana) og samskeytin liggja á beinni línu**. Þetta skilyrði er líka nægjanlegt ef hringbogarnir liggja sitt hvoru megin við línuna.

Með því að notfæra okkur þetta getum við búið til myndir eins og hér fyrir neðan:



**Mynd 6** Margir hringbogar með þjál samskeyti

Þessi mynd var búin til með því að nota margar hjálparlínur og hringi sem búið var að fela í lokaútgáfu myndarinnar. Kvíkir eiginleikar GeoGebra gera það að verkum að hægt er að draga punktana til og fá mismunandi myndir þar sem öll samskeyti eru þjál svo fremi sem skilyrðið er uppfyllt (fyrir sérhver samskeyti eru miðpunktur og samskeyti á beinni línu og hringbogarnir liggja sitt hvoru megin við línuna).



**Mynd 7** Hjálparlínur og hringir sýndir.

Verkefni: Búðu til þínar eigin myndir líkt og sýnt er hér fyrir ofan

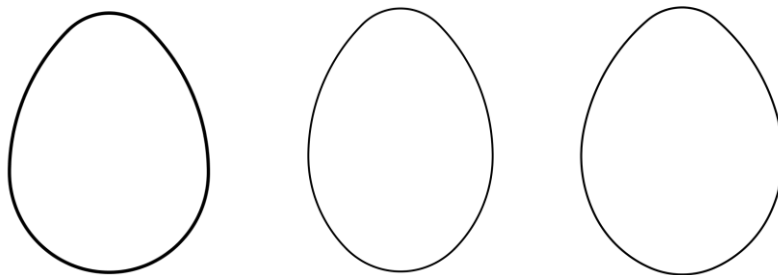
## 4 Egg

Hér fyrir neðan er mynd af eggjum nokkurra fugla. Greinilega sést að stærðin er mjög mismunandi en lögunin svipuð þótt sum séu oddmjórri en önnur.



Mynd 8 Egg (af [http://en.wikipedia.org/wiki/Egg\\_\(biology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_(biology)) )

Við getum notað hringboga til að búa til eggлага myndir eins og sýnt er hér fyrir neðan. Í næsta kafla er útskýrt hvernig þetta er gert.



Mynd 9 Moss egg, fjögurra punkta egg og fimm punkta egg sem búin voru til með aðstoð GeoGebra

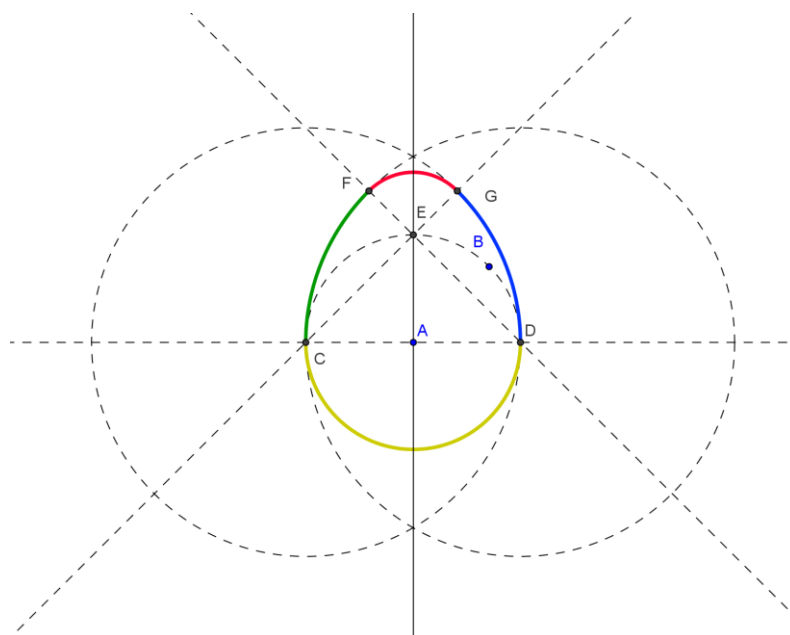
## 5 Evklíðsk Egg

Í mjög skemmtilegri bók *Mathographics* eftir Robert Dixon [1] er kafli um eggлага flatarmyndir sem búnar eru til með reglustiku og hringfara. Höfundur kallar þær *Evklíðsk egg* og gefur nokkrar myndir af slíkum eggjum en nákvæm lýsing á því hvernig þau eru búin til er hins vegar ekki gefin (Dixon (1987), pp. 3 – 11).

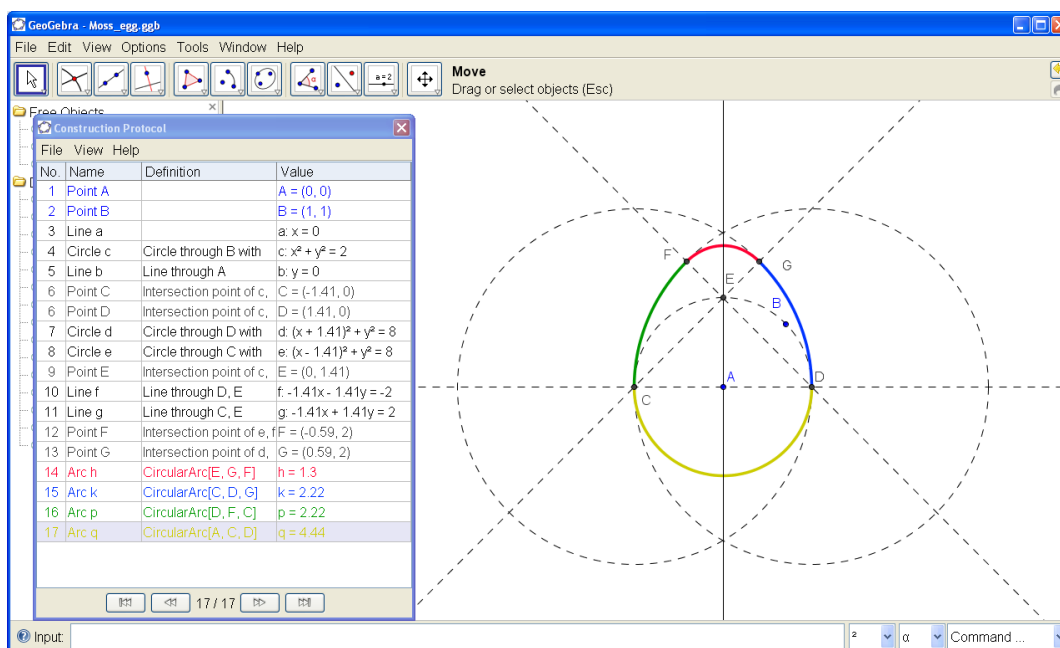
Með því að nota hringboga og hringi í GeoGebra getum við búið til þessar flatarmyndir en flækjustigið á því er mismikið. Þegar búið er að átta sig á aðferðinni í megindrátum eru slíkar teikningar frekar auðveldar en eru gerðar í mörgum skrefum og taka þó nokkurn tíma.

### 5.1 Moss egg

Verkefni: Notið myndina hér fyrir neðan til að búa til ykkar eigin Moss egg:



Mynd 10 Moss egg sem búið var til í GeoGebra




Mynd 11 Skjámynd úr GeoGebra með verklýsingu myndsmíðar

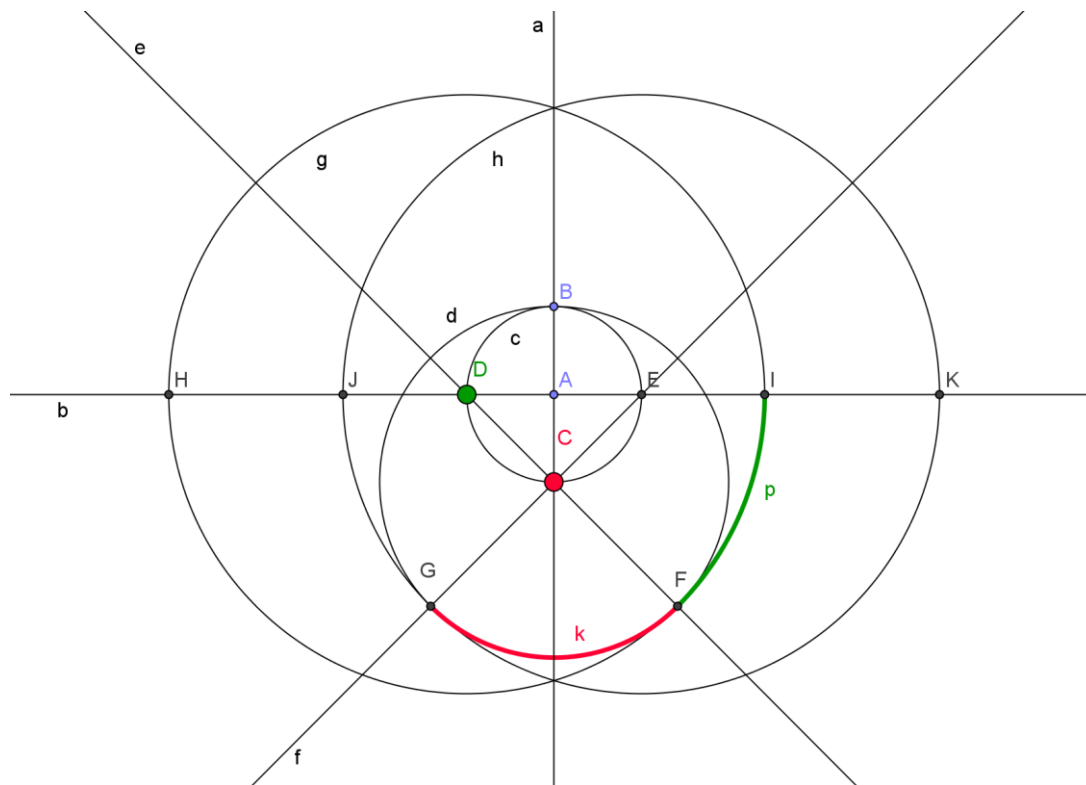
Á myndinni fyrir ofan er geisli stóru hringjanna tveggja jafn þvermáli fyrsta hringsins. Ef við breytum þessu með því að búa til nýja (mið)punkta  $H$  og  $I$  á láréttu línunni og förum því næst gegnum öll skrefin fáum við egg sem er örlítið öðruvísi.

*Verkefni:* Búið til vinnublað í GeoGebra þannig að hægt sé að breyta staðsetningu miðpunkta stóru hringjanna tveggja og þannig fá fram breytanlega lögun á egginu (leiðbeining: notið rennistku) sem talað er um hér fyrir ofan.



	Teiknið hringboga með miðju C gegnum G og F	k
	Teiknið hringboga með miðju D gegnum F og I	p

Nú ætti myndin ykkar að líta út svipað og sýnt er hér fyrir neðan.



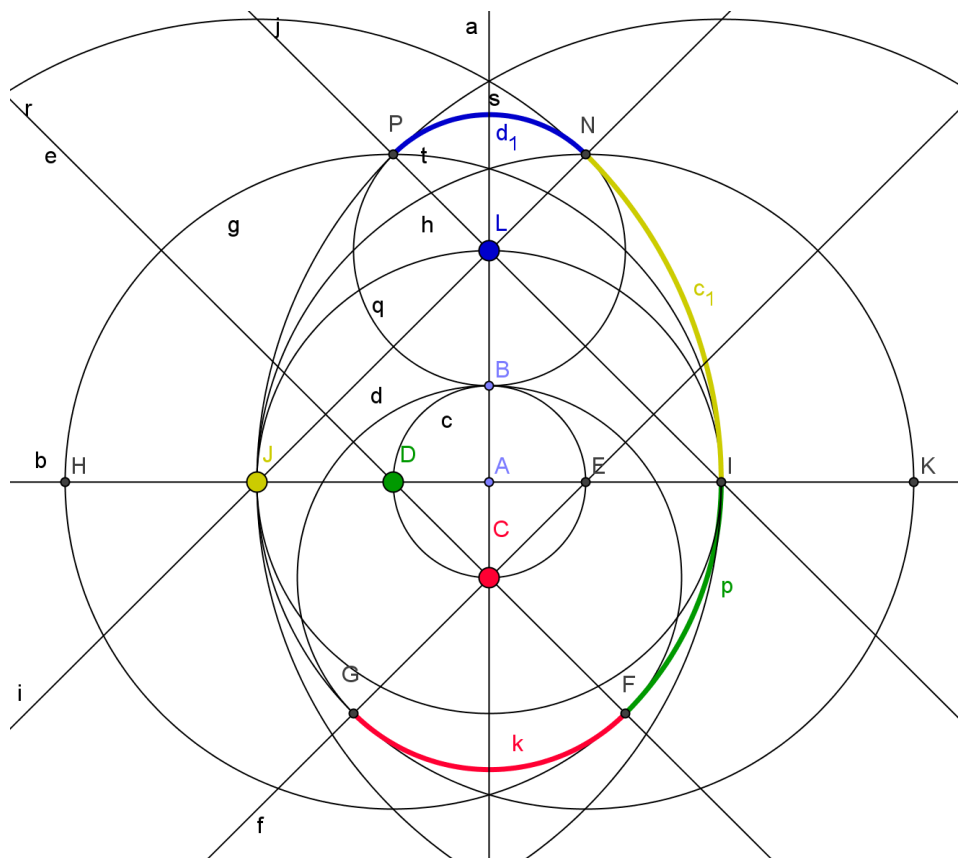
**Mynd 13** Punktarnir C og D eru tveir af fjórum punktum sem skilgreina fjögurra punkta eggid. Græni og rauði hringboginn eru þeir hlutar eggisins sem svara til þessara tveggja punkta.

Fjögurra punkta egg, framhald

	Myndsmíð	Nafn
	Teiknið hring með miðpunkt í A, gegnum I og J	q
	Merkið skurðpunkt a og q	L
	Teiknið línu gegnum I og L	i
	Teiknið línu gegnum J og L	j
	Teiknið hring með miðpunkt J gegnum I	r
	Teiknið hring með miðpunkt I gegnum J	s
	Teiknið hring með miðpunkt L gegnum B	t
	Merkið skurðpunkt hringsins r og línunnar i	N
	Merkið skurðpunkt hringsins s og línunnar j	P
	Teiknið hringboga með miðpunkt J gegnum I og N	c <sub>1</sub>
	Teiknið hringboga með miðpunkt L gegnum N og P	d <sub>1</sub>

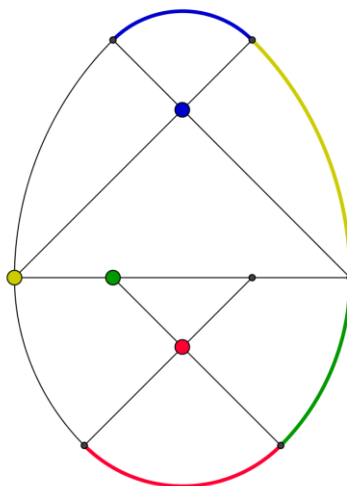


Við höfum næstum lokið við gerð fjögurra punkta eggisins. Punktarnir fjórir sem skilgreina eggjið eru  $C$ ,  $D$ ,  $J$  og  $L$  eins og sést á myndinni hér fyrir neðan þar sem mismunandi litir eru notaðir til að sýna hvaða hringbogi svarar til hvaða punkts.



**Mynd 14** Punktarnir fjórir og mótsvarandi hringbogar.

Þeir hringbogar sem eftir eru, frá  $G$  til  $J$  og frá  $J$  til  $P$  eru teiknaðir út frá samhverfu. Ef við felum allar merkingar, hringi og flestar línur (setjum strik í stað sumra þeirra) fæst lokamyndin af egginu hér fyrir neðan.



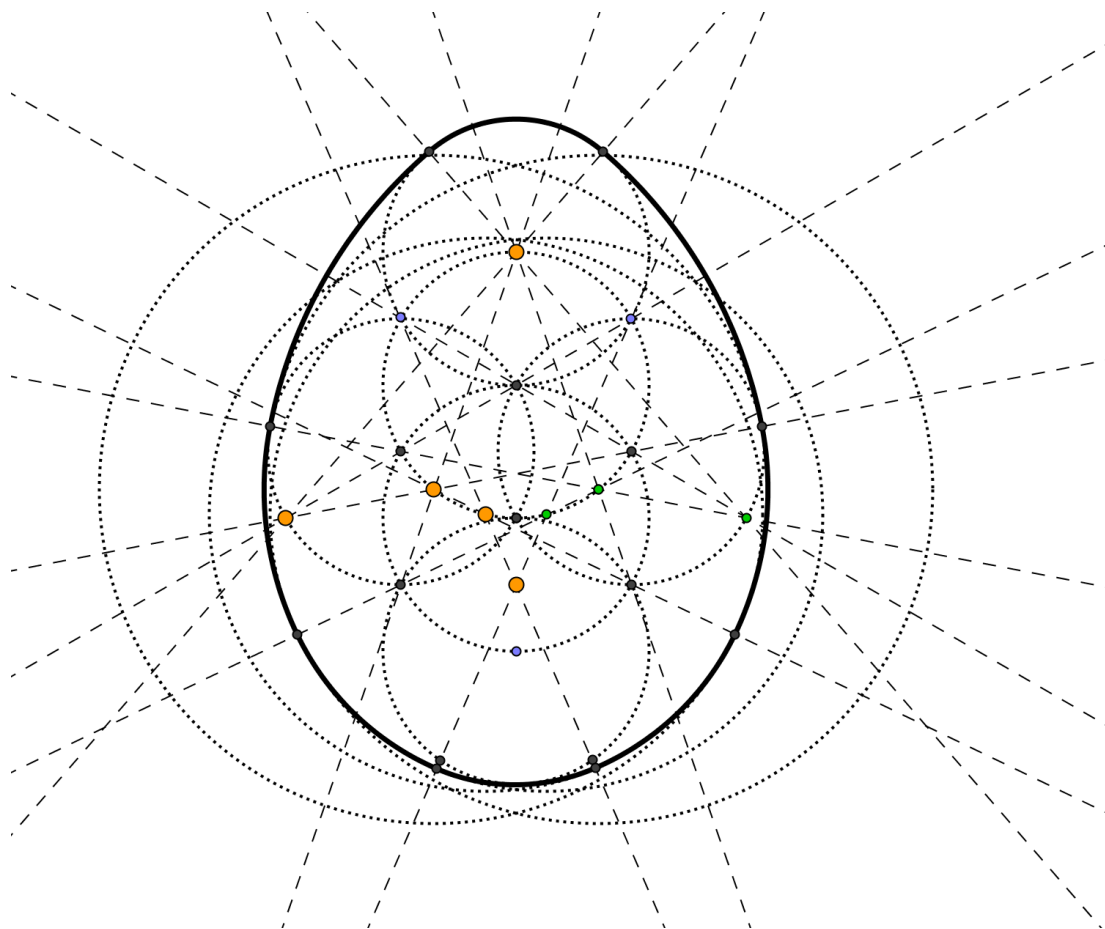
**Mynd 15** Fjögurra punkta eggjið



Athugasemd: það er ekki nauðsynlegt að teikna alla hringina, sem notaðir voru hér fyrir ofan, því í sumum tilfellum er hægt að teikna hringbogana beint.

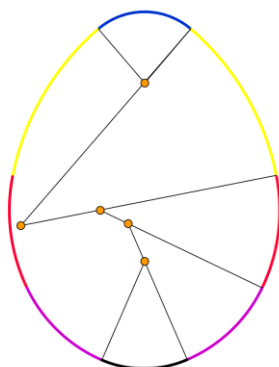
### 5.3 Fimm punkta eggjö

Hér fyrir neðan er mynd af fimm punkta eggjö þar sem allar hjálparlínur og hringir eru sýnd.



Mynd 16 Fimm punkta egg

Appelsínugulu punktarnir fimm eru þeir punktar sem skilgreina hægri hlið eggjans og grænu punktarnir eru punktarnir sem notaðir eru til að teikna þá boga, sem vantar vinstra megin, út frá samhverfu. Ef við felum alla hringi og flestar línur (setjum línustrik í stað sumra þeirra), þá fáum við myndina hér fyrir neðan.

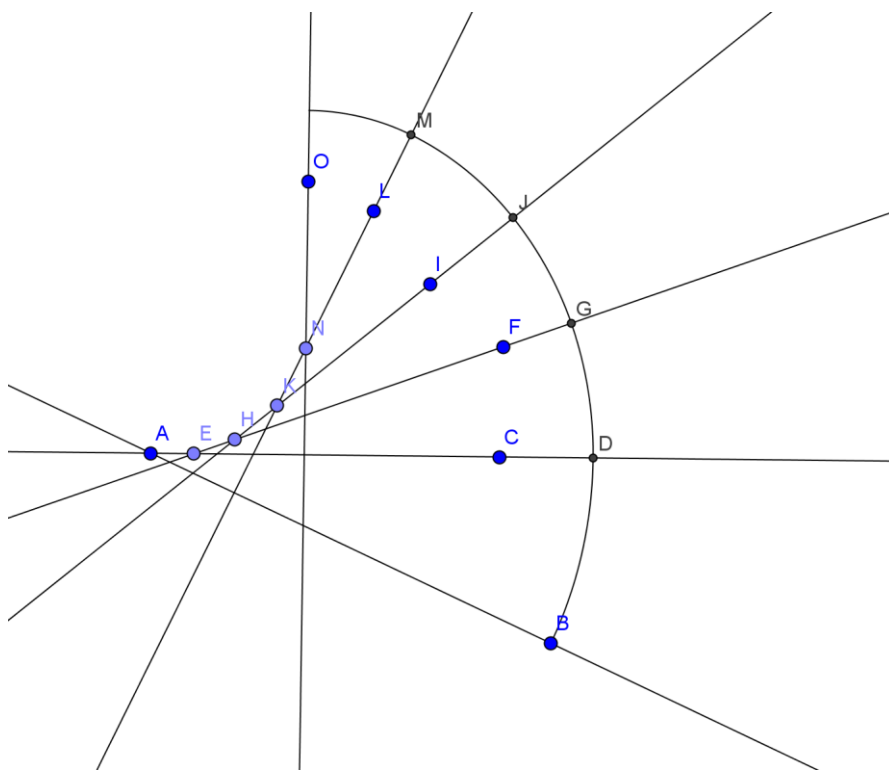


Mynd 17 Fimm punkta egg

Verkefni: Notið GeoGebra til að búa til fimm punkta egg. Prófið að draga punktana til og skoða hvernig lögun eggisins breytist. Athugið að ef allt er rétt teiknað þá ættu öll samskeyti hringboga að haldast þjál þótt punktar séu dregnir til.

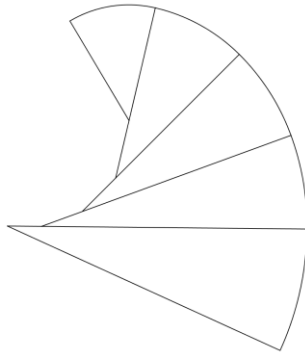
## Tilraunir

Ef horft er á neðri helming fimm punkta eggisins sést mynstur sem auðvelt er að halda áfram með, þ.e.a.s. við getum valið fleiri punkta á línustrikunum og haldið áfram og búið til kuðungsferil eins og sést hér fyrir neðan:



Mynd 18 Kuðungsferill

Þetta var gert með því að nota aðeins línuverkfæri, hringbogaverkfæri og tvö punktaverkfæri. Við getum dregið bláu punktana til og þannig breytt myndinni. Með því að teikna línustrik og fela línurnar fæst myndin hér fyrir neðan:



**Mynd 19** Kuðungsferill eftir að línur og merkingar hafa verið faldar

*Verkefni:* Búið til ferilinn sem sýndur er á myndinni hér fyrir ofan. Gerið tilraunir með mismunandi liti til að fá fallegri mynd.

*Verkefni:* Á vefsíðunni <http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html> eru myndir af eggjum sem kallast Thoms egg [3]. Búið til myndir af eggjunum tveimur með því að nota hringi, hringboga og línur.

*Verkefni:* Leitið að “Golden Egg” á netinu til að finna myndir af Gullna egginu og búið það til með því að nota hringi, hringboga og línur (það má líka finna mynd í bók Dixons [1]).

*Verkefni:* Gerið tilraunir með svipaðar myndsmíðar og búið til ykkar eigin egg.

## Heimildir

- [1] Dixon, R. *Mathographics*. Basic Blackwell Limited, Oxford, England, 1987.
- [2] GeoGebra, niðurhal á <http://www.geogebra.org>.
- [3] [Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html) "Thom's Eggs." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html>

