

Euklidovské vajce

Freyja Hreinsdóttir

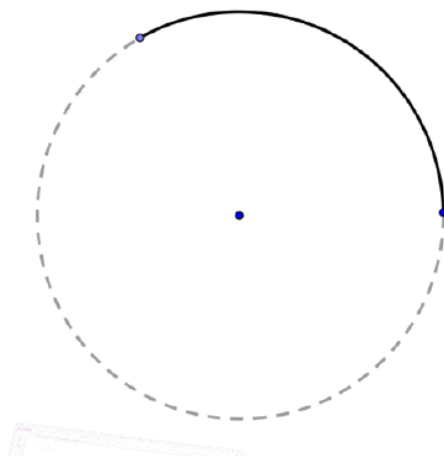
Slovenská verzia: Soňa Čeretková, Gabriela Galliková

Úvod

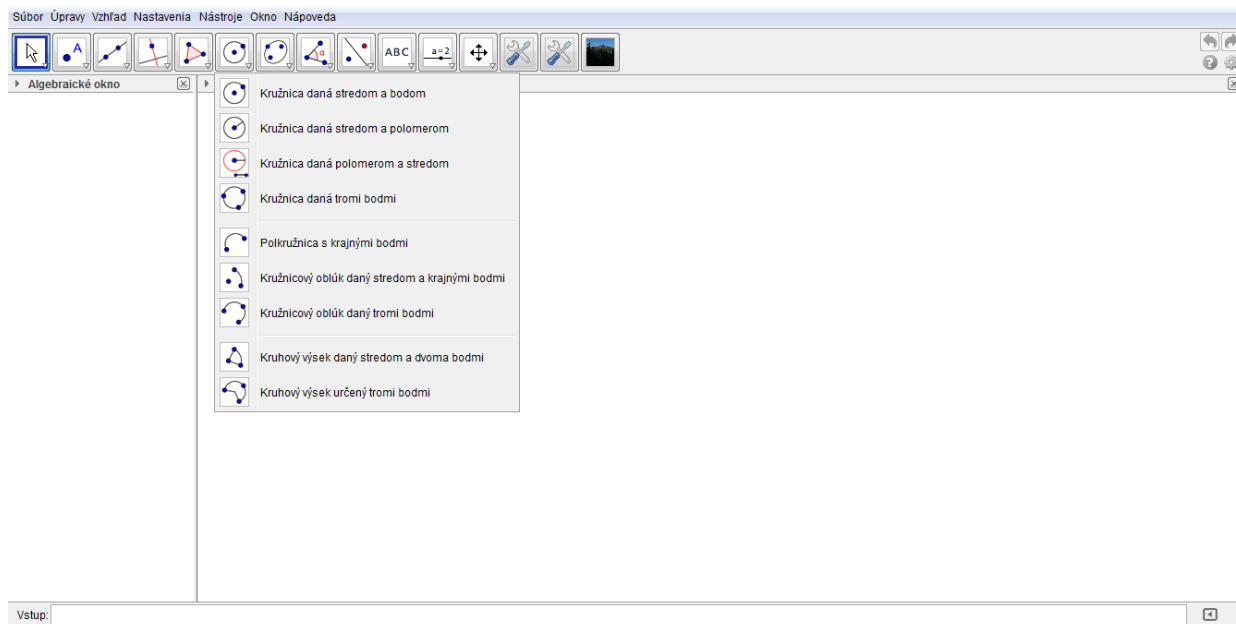
Dynamický geometrický softvér (DGS) GeoGebra je vhodný na rysovanie jednoduchých dynamických konštrukcií. GeoGebra má nástroj na rysovanie oblúkov a kružníc, ktoré sa môžu spájať a vytvárať „oblúkové“ útvary rôznych tvarov. V článku vysvetlíme, ako pomocou DGS GeoGebra kresliť geometrické tvary pripomínajúce pozdĺžny rez vajítkom.

Oblúky a kružnice

DGS GeoGebra poskytuje niekoľko nástrojov na vytváranie kružníc a oblúkov. Na definíciu kružnice potrebujeme, napríklad, dva parametre: stred a polomer. Aké parametre potrebujeme na definovanie oblúka? Oblúk je časťou kružnice, takže pravdepodobne potrebujeme rovnaké parametre, aby sme vedeli oblúk definovať. Potrebujeme však tiež informácie, o dĺžke a umiestnení oblúka na kružnici. Predstavme si, že máme danú kružnicu a je zrejmé, že potrebujeme vedieť v ktorom bode kružnice oblúk začína a v ktorom bode kružnice oblúk končí.

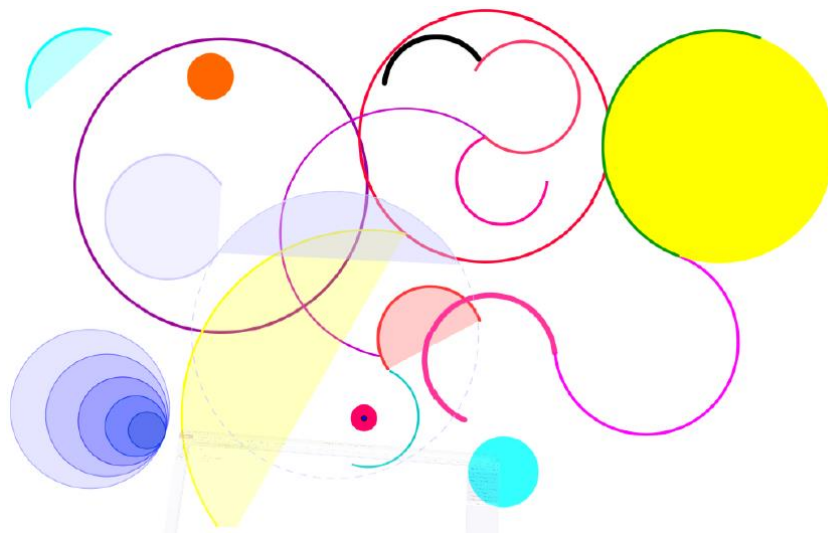


Obrázok 1. Oblúk na kružnici



Obrázok 2. Nástroje na konštrukciu oblúkov a kružníc v DGS GeoGebra

Úloha: Vytvorte niekoľko oblúkov a kružníc v GeoGebre. Niektoré oblúky pospájajte a potom použite rôzne farby a štýly na vyfarbenie čiar a na vyplnenie kružníc, aby vznikol pekný obrázok. Farby a štýly sa menia kliknutím pravého tlačidla myši na útvar a v menu ktoré sa otvorí, je potrebné vybrať príkaz *vlastnosti útvaru*.

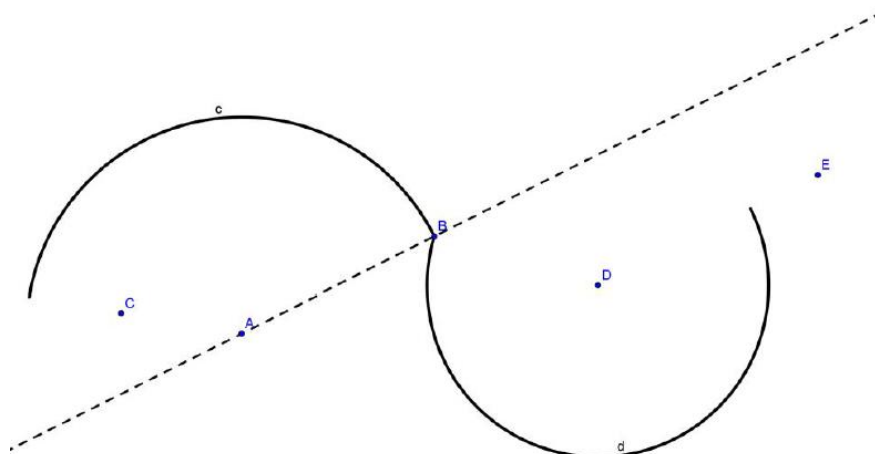


Obrázok 3. Obrázok z oblúkov a kružníc

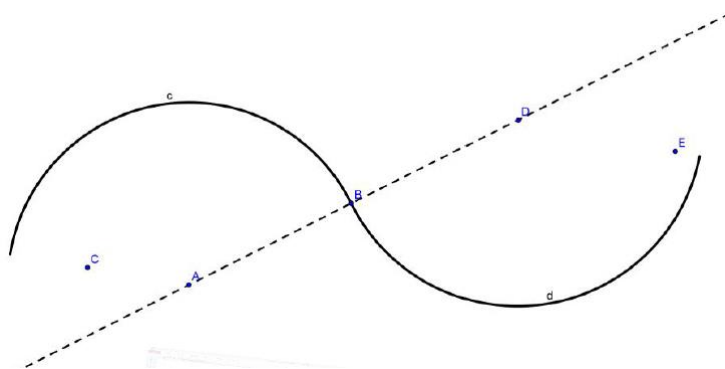
Všimnite si, že oblúky na obrázku sa plynulo prelínajú. Na obrázku nie sú viditeľné zlomy, v ktorom sa oblúky stretávajú. Skúmajte, ako sa dá plynulé prelínanie oblúkov zostrojiť.

Úloha: Otvorte program GeoGebra a vytvorte dva oblúky c a d, ktoré sa stretávajú v jednom bode. Skúšajte pohybovať bodmi ktoré určujú oblúky tak, aby miesto ich spojenie bolo

plynulé. Úloha je jednoduchšia, ak narysujete priamku danú bodom, v ktorom sa oblúky stretávajú, a stredom kružnice, na ktorej leží jeden z oblúkov.

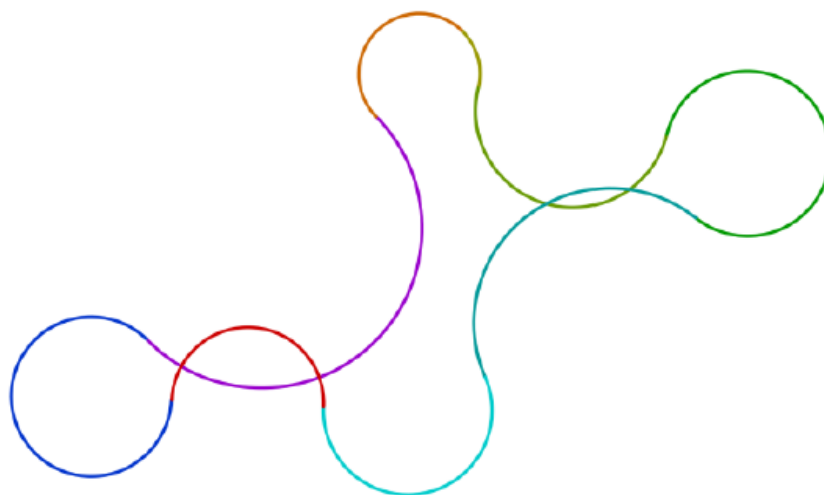


Obrázok 4. Dva oblúky, ktoré sa stretávajú v jednom bode, ostrý prechod
 Bodom D môžeme pohybovať tak, aby sa oblúky spojili plynulým spôsobom. Dostávame obrázok nižšie.



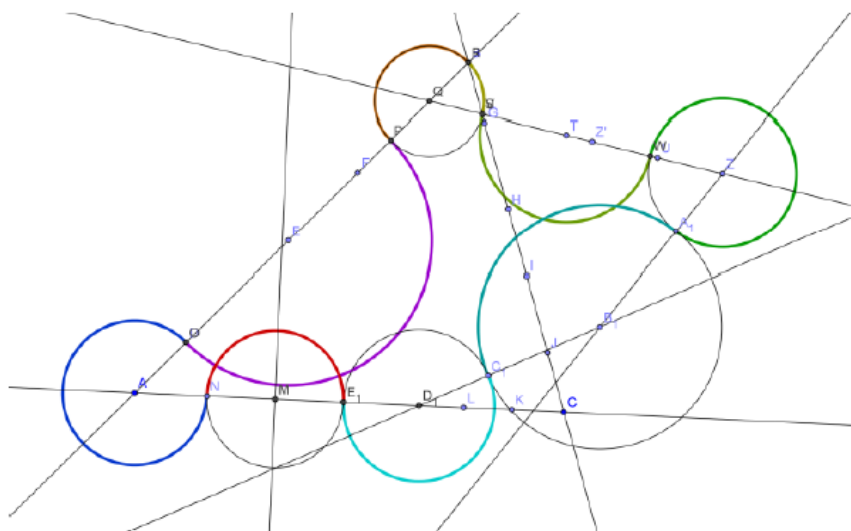
Obrázok 5. Dva oblúky, ktoré sa stretávajú v jednom bode, plynulý prechod

Pravdepodobne ste si všimli, že nutnou podmienkou pre plynulý prechod oblúkov je, aby stredy kružníc, na ktorých ležia oblúky a bod v ktorom sa oblúky spájajú ležali na jednej priamke. Využitím tohto princípu dokážeme vytvárať obrázky viacerých spojených oblúkov.



Obrázok 6. Plynulo spojené oblúky

Obrázok 6 sme vytvorili pomocou viacerých pomocných priamok a kružníc, ktoré sú vo výslednom obrázku skryté. Na obrázku 7 sú všetky pomocné priamky zobrazené. Vďaka dynamickým vlastnostiam DGS GeoGebra je možné pohybovať bodmi tak, aby sme dostali obrázky s plynulými prechodmi všetkých oblúkov. Všimnite si body ležiace na jednej kružnici a oblúky ležiace v opačných polrovinách tvorených jednou priamkou na obrázku 3.



Obrázok 7. Viac oblúkov spojených plynulým spôsobom, pomocné priamky sú zobrazené.

Úloha: Vytvorte vlastný obrázok podobný obrázku 7.

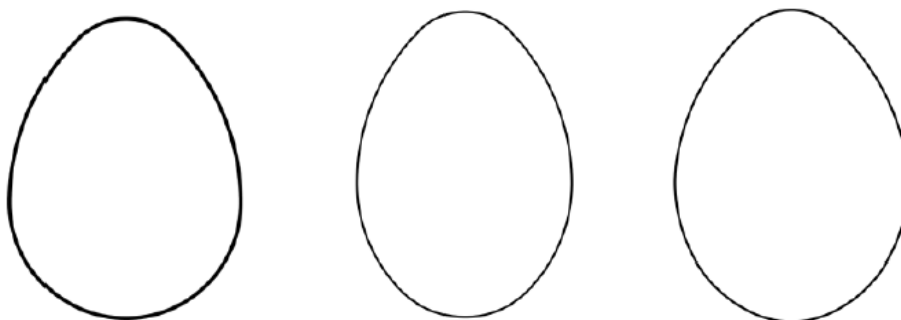
4. Vajcia

Na obrázku 8 môžete vidieť niekoľko vtáčích vajec. Ako vidno, vajcia majú rôznu veľkosť ale majú podobný tvar. Niektoré sú „špicatejšie“ a iné „oblejšie“.



Obrázok 8: Vtáčie vajcia (prevzaté z [http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_\(biology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_(biology)))

V ďalšej časti vysvetlíme a popíšeme konštrukciu geometrických útvarov v tvare pozdĺžne prekrojeného vajca; sú to napríklad útvary na obrázku nižšie. Je zrejmé, že pri konštrukciách použijeme plynulo spojené oblúky.



Obrázok 9: Geometrické útvary v tvare vajca konštruované s využitím DGS GeoGebra

5. Euklidovské vajce

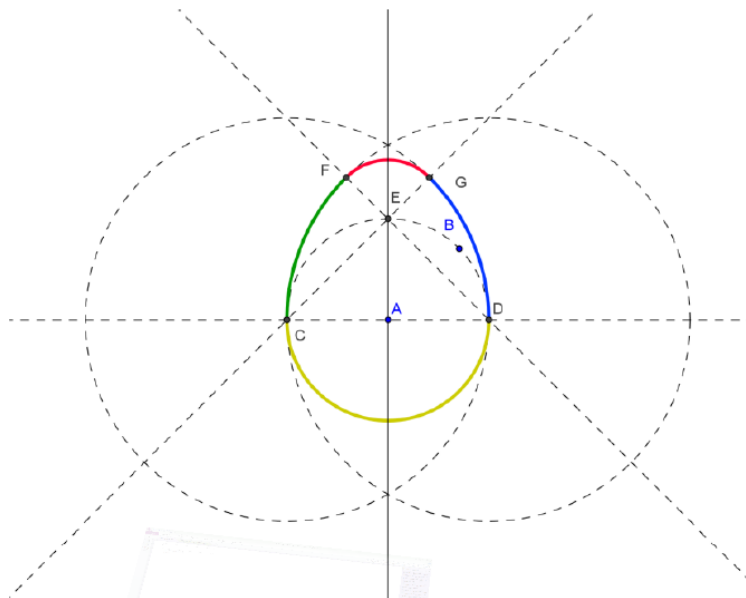
Vo veľmi peknej publikácii Róberta Dixona [1] je kapitola o ováloch v tvare pozdĺžne prekrojeného vajca. Autor ich, na základe konštrukcie iba pomocou pravítka a kružidla, pomenoval Euklidovské vajcia. V publikácii môžeme nájsť aj obrázky niekoľkých takýchto vajec, hoci detaily konštrukcie nie sú uvedené.

Použitím oblúkov a kružníc dokážeme v DGS GeoGebra skonštruovať krivky v tvare vajca, ktoré sa podobajú tvarom skutočných vtáčích vajec. Konštrukcie jednotlivých tvarov sa veľmi

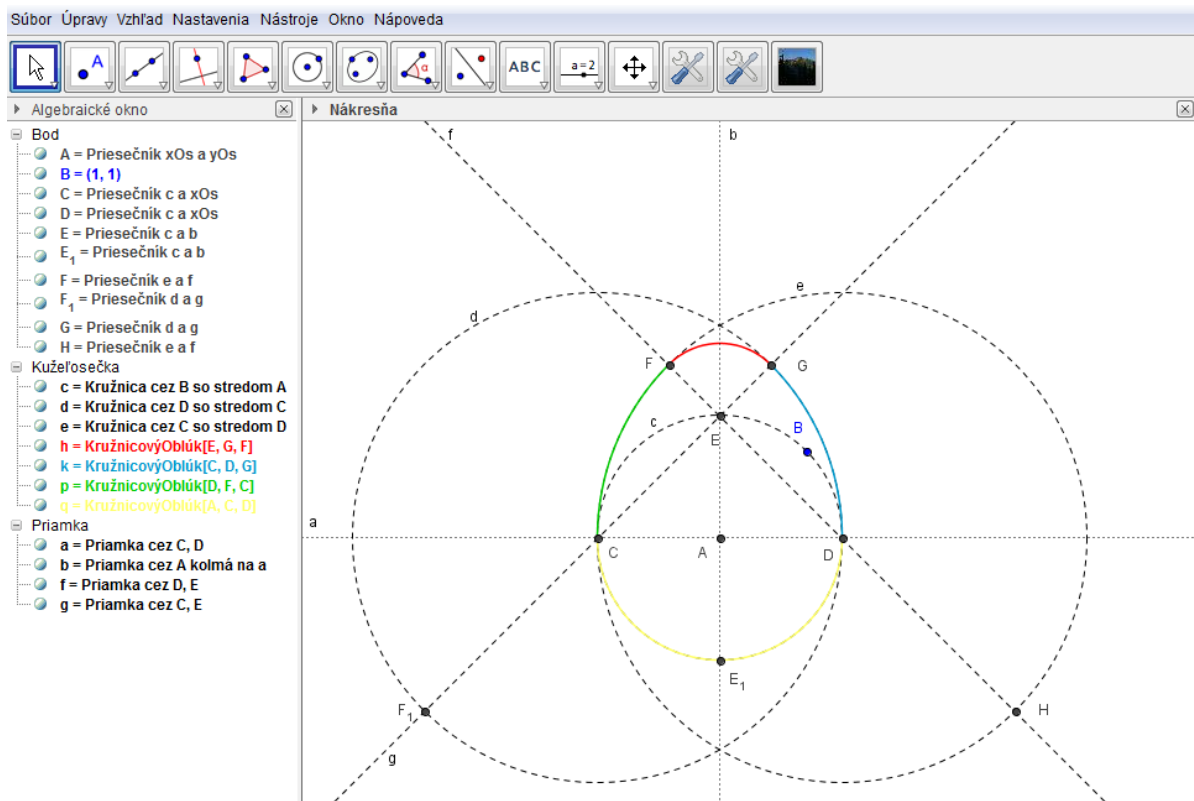
líšia. Po objasnení základného princípu sú konštrukcie relatívne jednoduché, ale samotná konštrukcia každého samostatného tvaru má veľa krokov a je časovo náročná.

5.1. Moss vajce

Úloha: Pokúste sa použiť obrázok 10 pri konštrukcii obrázku vajca s názvom *Moss vajce*.



Obrázok 10: Moss vajce skonštruované v DGS GeoGebra



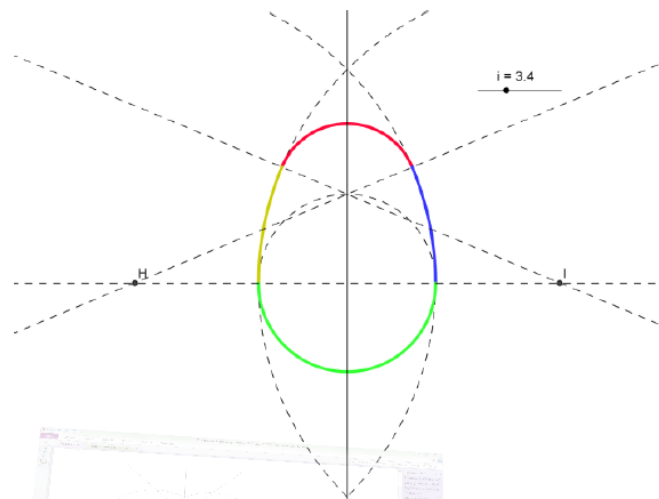
č.	Názov	Definícia	Hodnota
1	Bod A	Priesečník xOs a yOs	A = (0, 0)
2	Bod B		B = (1, 1)
3	Kružnica c	Kružnica cez B so stredom A	c: $x^2 + y^2 = 2$
4	Bod C	Priesečník c a xOs	C = (-1.41, 0)
4	Bod D	Priesečník c a xOs	D = (1.41, 0)
5	Priamka a	Priamka cez C, D	a: $y = 0$
6	Priamka b	Priamka cez A kolmá na a	b: $x = 0$
7	Kružnica d	Kružnica cez D so stredom C	d: $(x + 1.41)^2 + y^2 = 8$
8	Kružnica e	Kružnica cez C so stredom D	e: $(x - 1.41)^2 + y^2 = 8$
9	Bod E	Priesečník c a b	E = (0, 1.41)
9	Bod E	Priesečník c a b	E = (0, 1.41)
10	Priamka f	Priamka cez D, E	f: $-1.41x - 1.41y = -2$
11	Priamka g	Priamka cez C, E	g: $-1.41x + 1.41y = 2$
12	Bod F	Priesečník d a g	F = (-3.41, -2)
12	Bod G	Priesečník d a g	G = (0.59, 2)
13	Bod H	Priesečník e a f	H = (3.41, -2)
13	Bod F	Priesečník e a f	F = (-0.59, 2)
14	Oblúk h	KružnicovýOblúk[E, G, F]	h = 1.3
15	Oblúk k	KružnicovýOblúk[C, D, G]	k = 2.22
16	Oblúk p	KružnicovýOblúk[D, F, C]	p = 2.22
17	Oblúk q	KružnicovýOblúk[A, C, D]	q = 4.44

Vytvorené s [GeoGebrou](#)

Obrázok 11. Snímka obrazovky DGS GeoGebra s postupom konštrukcie

V konštrukcií na obrázku 11 je polomer dvoch veľkých kružníc rovný priemeru prvej narysovanej kružnice. Ak na priamke prechádzajúcej priemerom zvolíme dva nové body H a I a vytvoríme konštrukciu, dostaneme vajce, ktoré je trochu odlišné.







Úloha: V DGS GeoGebra vytvorte pracovný list tak, aby ste mohli meniť polohu stredov kružníc a experimentovať tak s rôznymi tvarmi tohto typu vajca (pomôcka: použite posuvník).



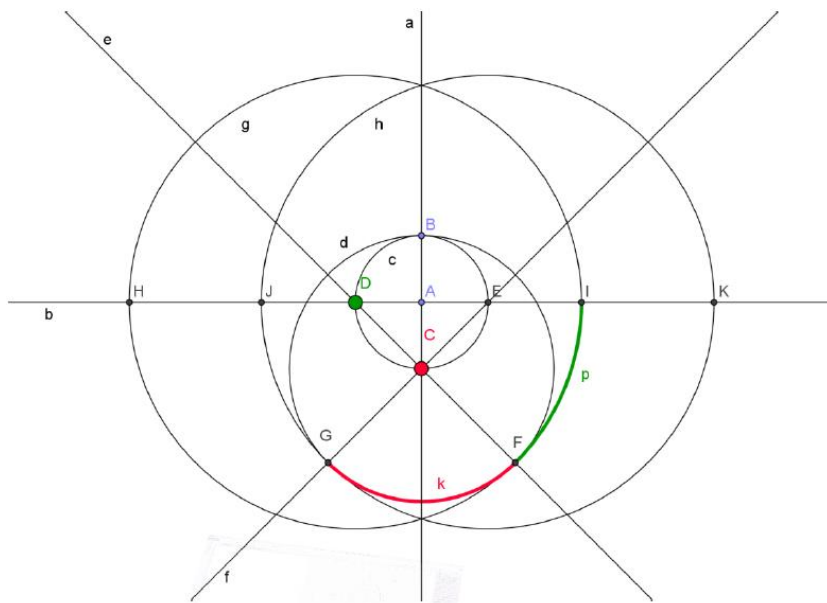
Obrázok 12. Variácie Moss vajca

5.2. Vajce dané štyrmi bodmi

Nasledujúci text popisuje konštrukciu vajca daného štyrmi bodmi.

ikony	konštrukcia	názov
	narysujte priamku, najvhodnejšie je narysovať zvislú priamku, ktorá pripomína os y , hoci pri tejto konštrukcie nebudeme potrebovať súradnice	a
	zvoľte bod na priamke a	A
	bodom A narysujte kolmicu na priamku a	b
	zvoľte ďalší bod na priamke a	B
	narysujte kružnicu so stredom v bode A a prechádzajúcu bodom B	c
	označte C priesečník priamky a a kružnice c	C
	narysujte kružnicu so stredom v bode C prechádzajúcu bodom B	d
	označte písmenami D,E priesečníky priamky b a kružnice c	D, E
	zostrojte priamku danú bodmi C a B	e
	zostrojte priamku f danú bodmi E a C	f
	označte písmenom F priesečník kružnice d a priamky e	F
	označte písmenom G priesečník kružnice d a priamky f	G
	zostrojte kružnicu g so stredom v bode D prechádzajúcu bodom F	g
	zostrojte kružnicu h so stredom v bode G prechádzajúcu bodom H	h
	označte písmenami H, I priesečníky kružnice g a priamky b	H, I
	označte písmenami J,K priesečníky kružnice h a priamky b	J, K
	narysujte oblúk k so stredom v bode C prechádzajúci cez body G a F	k
	narysujte p oblúk so stredom v bode D prechádzajúci cez body F a I	p

Konštrukcia by sa mala podobieť konštrukciám na obrázku 13.

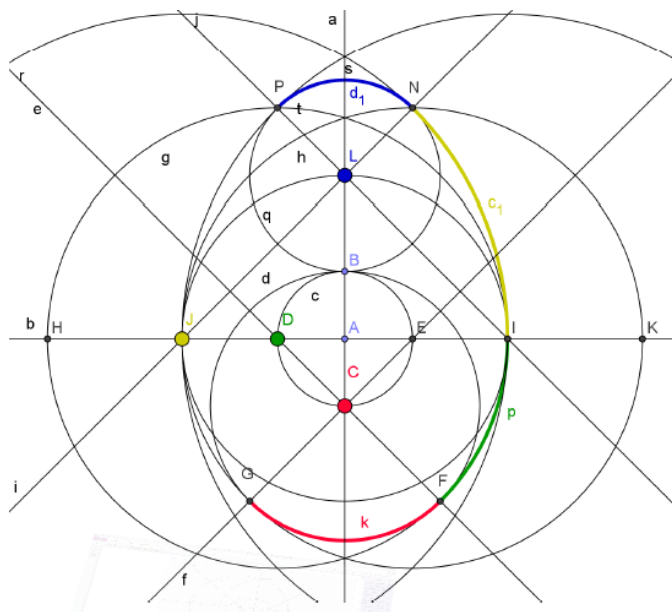


Obrázok 13. Body C a D sú dva zo štyroch bodov, ktoré určujú vajce. Zelený a červený oblúk sú časti vajca odpovedajúce týmto dvom bodom.

Pokračovanie konštrukcie vajca daného štyrmi bodmi.

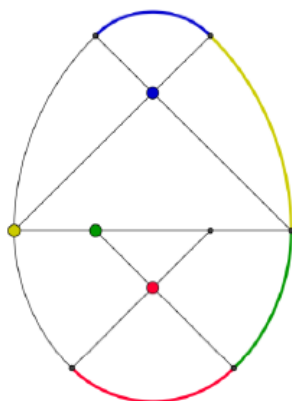
postup	názov
narysujte kružnicu q so stredom v bode A prechádzajúcu cez body I a J	q
označte písmenom L priesečník priamky a a kružnice q	L
narysujte i priamku prechádzajúcu bodmi I a L	i
narysujte j priamku prechádzajúcu bodmi J a L	j
narysujete kružnicu r so stredom v bode J prechádzajúcu bodom I	r
narysujete s kružnicu so stredom v bode I prechádzajúcu cez bod J	s
narysujete kružnicu t so stredom v bode L prechádzajúcu cez bod B	t
označte písmenom N priesečník kružnice r a priamky i	N
označte písmenom P priesečník kružnice s a priamky j	P
zostrojte oblúk c_1 so stredom v bode J prechádzajúce cez body I a N	c_1
zostrojte oblúk d_1 so stredom v bode L prechádzajúce cez body N a P	d_1

Konštrukcia vajca daného štyrmi bodmi je takmer hotová. Štyri body, ktoré určujú vajce, sú body C, D, J a L. Na obrázku 14 sú oblúky a im odpovedajúce stredy zafarbené tou istou farbou.



Obrázok 14. Štyri body a im odpovedajúce oblúky.

Ostatné oblúky tvoriace vajce sú zostrojené pomocou osovej súmernosti a keď skryjeme všetky názvy, kružnice a väčšinu priamok (niektoré z nich nahradíme úsečkami), dostávame konečnú podobu vajca daného štyrmi bodmi na obrázku 15.

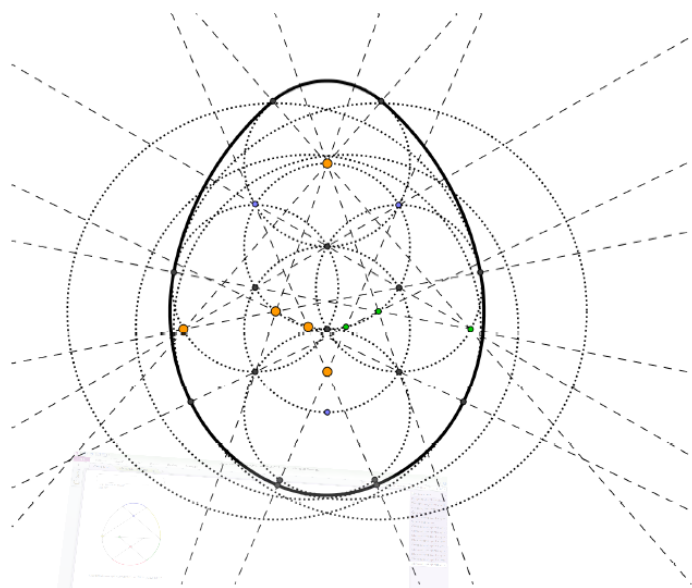


Obrázok 15. Vajce dané štyrmi bodmi

Poznámka: Nie je potrebné zostrojovať všetky kružnice použité v konštrukcií keďže v niektorých prípadoch vieme oblúk zostrojiť priamo.

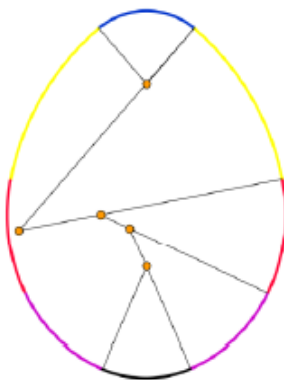
5.3. Vajce dané piatimi bodmi

Na obrázku nižšie je vajce dané piatimi bodmi so všetkými pomocnými priamkami a kružnicami, ktoré sú potrebné na jeho narysovanie.



Obrázok 16. Vajce dané piatimi bodmi

Päť oranžových bodov je päť bodov, ktoré určujú oblúky na pravej strane vajca a zelené body sú body potrebné na dorysovanie ľavej strany. Keď skryjeme všetky kružnice a priamky, pričom niektoré z nich nahradíme úsečkami, dostaneme obrázok 17 na ktorom je zobrazených aj päť bodov potrebných na konštrukciu pravej strany vajca



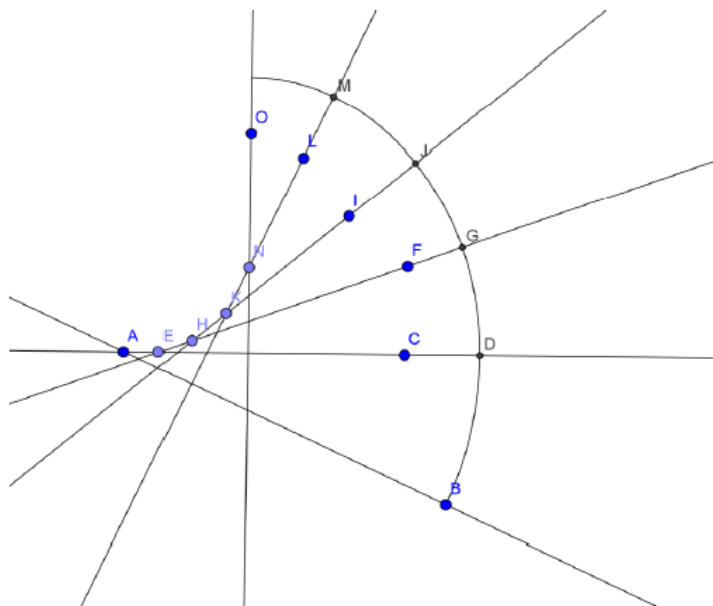
Obrázok 17. Vajce dané piatimi bodmi

Úloha: Použite DGS GeoGebra alebo iný dynamický geometrický softvér, zostrojte vajce dané piatimi bodmi. Skúste posúvať polohu bodov aby ste videli, ako sa tvar vajca mení.

Poznámka: Ak je vajce narysované správne, všetky body v ktorých sa oblúky spájajú by mali zostať pri posúvaní plynulo spojené.

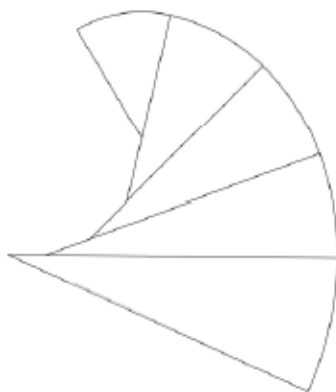
Experimentovanie

Spodná časť vajca daného piatimi bodmi je vytvorená konštrukciou, v ktorej by sme mohli pokračovať. Vyberieme viac bodov na priamkach a vytvoríme špirálu na obrázku 18.



Obrázok 18. Špirála

Konštrukcia na obrázku 18 bola vytvorená iba použitím nástrojov: priamka, oblúk a dva body. Modré body môžeme posúvať, čím zmeníme konštrukciu. Narysovaním úsečiek a skrytím pomocných priamok a bodov dostávame obrázok 19.



Obrázok 19. Špirála so skrytými pomocnými prvkami

Úloha: Narysujte vyššie znázornenú špirálu. Experimentujte s farbami, aby ste vytvorili čo najkrajší obrázok.

Úloha: Na web stránke <http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html> sú obrázky Thom vajec [3]. Zostrojte dve vajcia len s využitím kružníc, oblúkov a priamok.

Úloha: Na internete nájdite obrázok zlatého vajca a zostrojte ho s využitím nástrojov DGS GeoGebra: kružnica, oblúk a priamka. (Obrázok môžete nájsť aj publikácií od Dixona [1].)

Úloha: Experimentujte s podobnými konštrukciami a vytvorte vlastné obrázky .

Literatúra

[1] Dixon, R. *Mathographics*. Basic Blackwell Limited, Oxford, England, 1987.

[2] GeoGebra, downloadable from <http://www.geogebra.org>.

[3] Weisstein, Eric W. "Thom's Eggs." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html>

