Евклидови яйца

Фрейя Хрейнсдотир

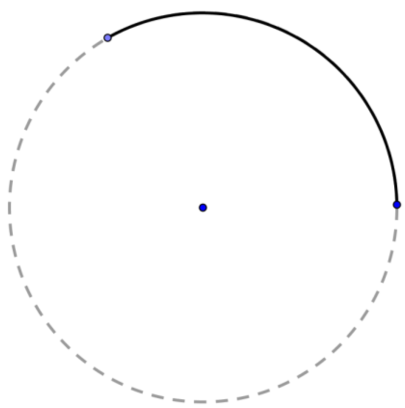
Исландски университет

1 Въведение

С компютърни програми като *GeoGebra* е лесно да се създават конструкции с линия и пергел. В частност, лесно е да се чертаят дъги и окръжности и като се съединяват по определени начини – да се получават различни фигури, наподобяващи яйца.

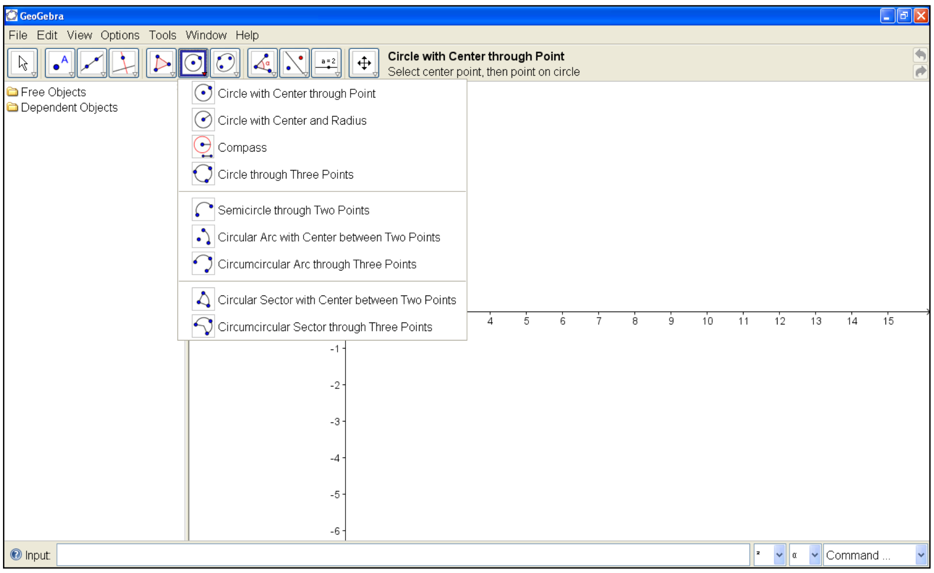
2 Дъга и окръжност

За построяване на окръжност се нуждаем от център и радиус. Какви данни са необходими за построяване на дъга на окръжност? Тя е част от окръжност, затова са необходими както данните за окръжността, така и информация за дължината и позицията на дъгата като част от окръжността, т.е. за началото и края й.



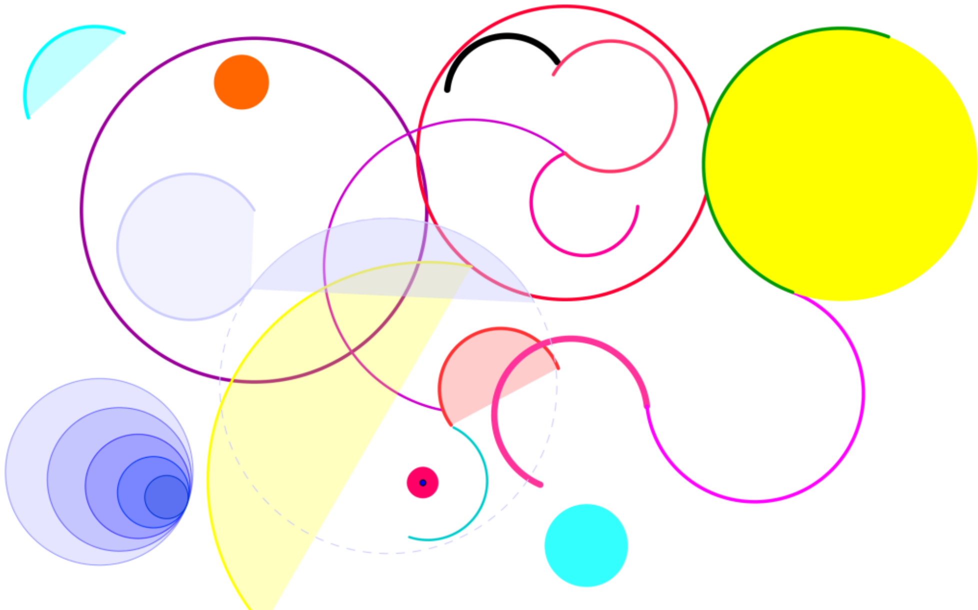
Фиг. 1 Дъга на окръжност

В *GeoGebra* има няколко инструмента за построяване на окръжности и дъги:



Фиг. 2 Инструменти в *GeoGebra* за построяване на окръжности и дъги

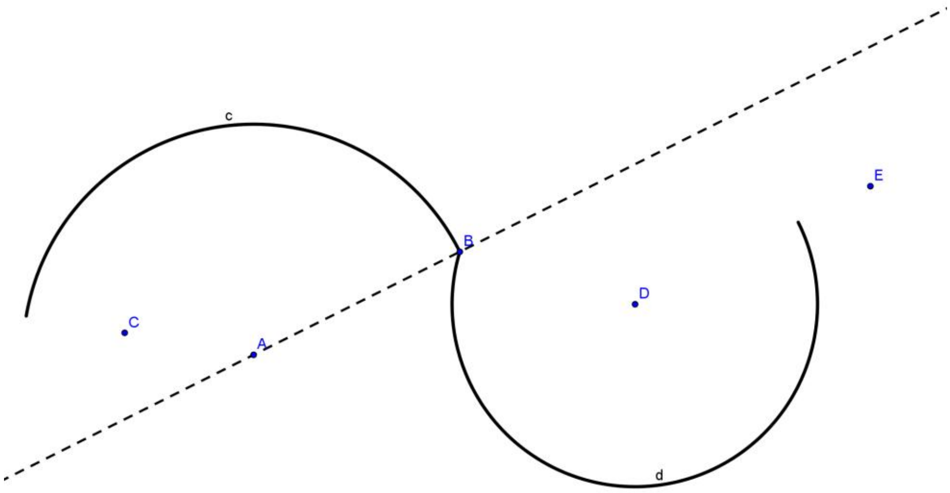
Задача: Създай няколко окръжности и дъги в *GeoGebra*. Направи художествена композиция с тях – премествай ги, използвай различни цветове и стилове (запълване; дебелина и стил на линията) [1]**.** За да промениш цвят или стил, можеш да кликнеш с десен бутон върху обекта и да използваш менюто, което се отваря.



Фиг. 3 Композиция от дъги и окръжности

Забележи, че някои от дъгите в композицията са съединени плавно (без чупка) и не личи къде е връзката между тях. Сега ще открием как се реализира това.

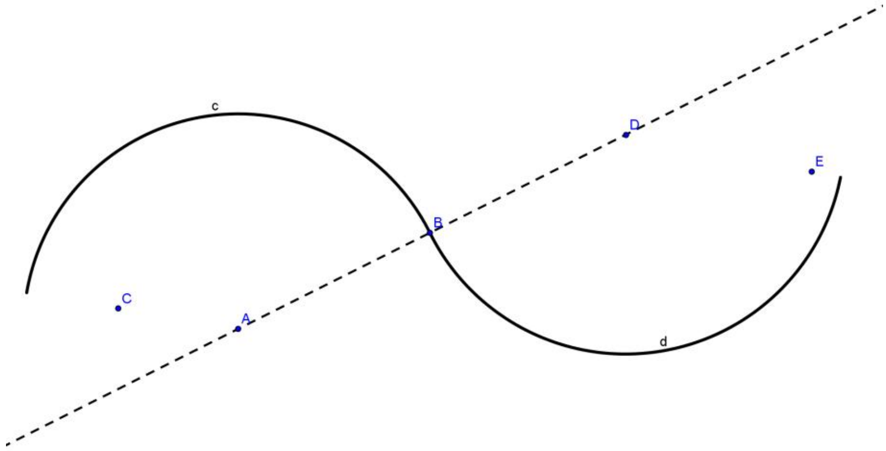
Задача: В *GeoGebra* създай две дъги *c* и *d*, които се свързват в една точка. Опитай да преместиш точките, определящи дъгите, така че свързването да е плавно. За улеснение построй през единия център и общата точка помощна права и наблюдавай взаимното й положение с другия център.



Фиг. 4 Две дъги, свързани в една точка

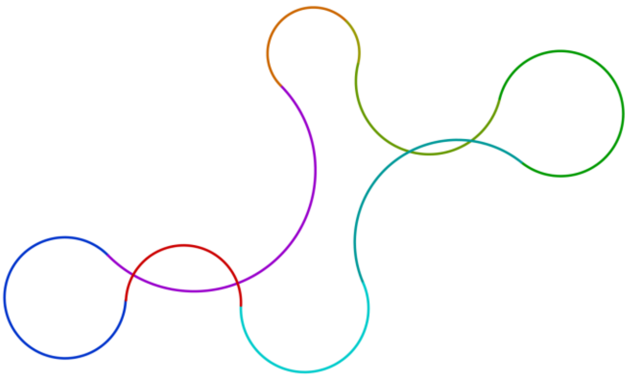
Движи точката D, докато дъгите се свържат гладко, както е на фиг. 5.

[1] С промяната на стила се получават съответно кръг и сегмент.



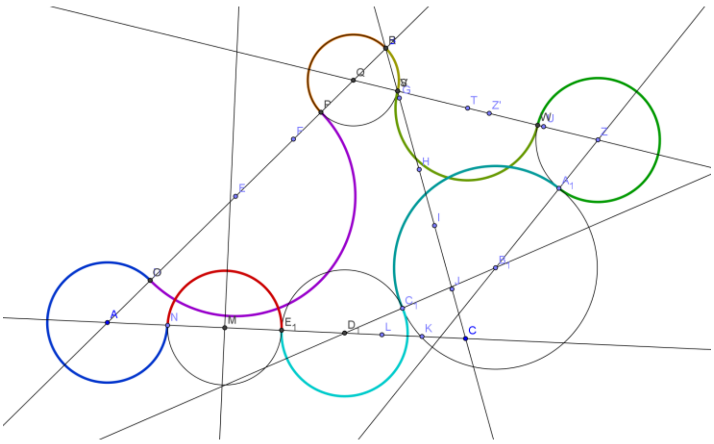
Фиг. 5 Две гладко свързани дъги

Вероятно ще забележиш, че необходимо условие за гладкостта на свързване е двата центъра и свързващата точка да лежат на една права. Това условие е достатъчно, в случай че двете дъги са разположени в различните полуравнини, определени от тази права. Като използваме този принцип, можем да получим фигура като на фиг.6.



Фиг. 6 Множество от гладко свързани дъги

Тя е създадена с помощта на няколко прави, които са скрити във финалната картина, но можеш да ги видиш на фиг.7. Конструкцията е динамична, т.е. с преместване на точки се получават нови композиции от гладко свързани дъги, защото са спазени условията: трите точки лежат на една права и дъгите са в различни полуравнини, определени от нея.



Фиг. 7 Множество от гладко свързани дъги и помощните прави

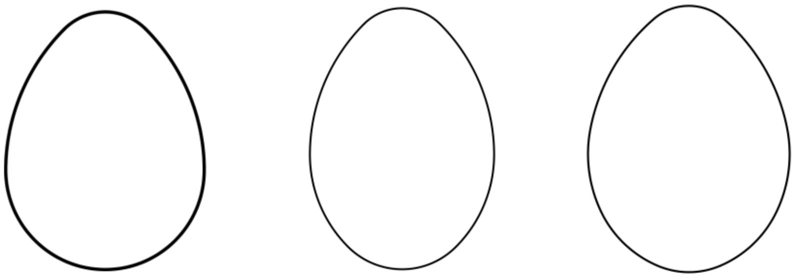
Задача: Създай своя картина с гладко свързани дъги.

4 Яйца

Долу виждаш снимка на няколко птичи яйца. Те са различни по големина, но близки по форма, въпреки че някои са по-заоблени от други.

Фиг. 8 Яйца (от http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_(biology))

Можем да използваме дъги, за да конструираме яйцеподобни фигури като тези на фиг.9. Как да направим това?



Фиг. 9 Яйцето на Мос, четириточково яйце и петточково яйце, създадени с *GeoGebra*

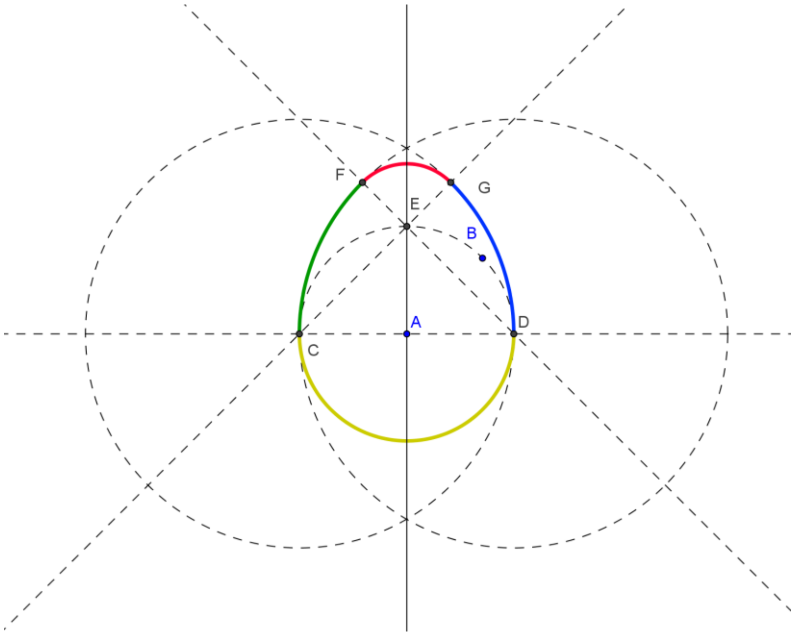
5 Евклидови яйца

В прекрасната книга на Робърт Диксън [1] има част за яйцевидни овали, построени с линия и пергел. Авторът ги нарича *евклидови яйца* и показва изображения на някои от тях, без да уточнява детайлите по построяването им (Dixon (1987), с. 3-11).

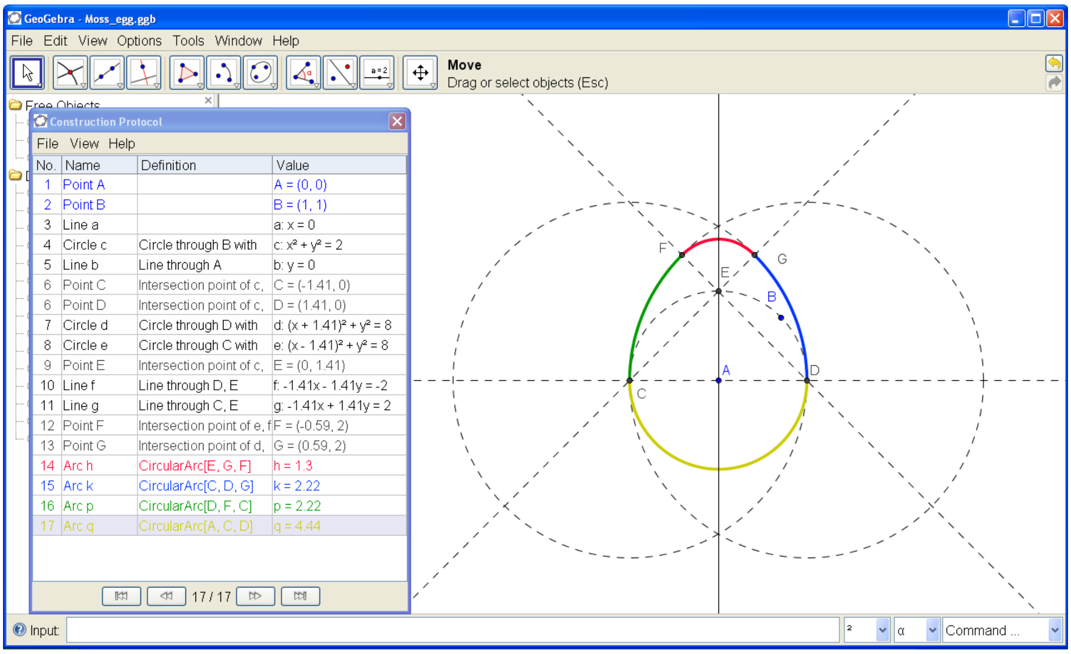
С дъги и окръжности можем да конструираме яйцеподобни фигури. Сложността на тези конструкции варира много. След като принципът е разбран, построението е лесно, но съдържа много стъпки и изисква време.

5.1 Яйцето на Мос

Задача: Опитай да използваш фиг. 10, за да построиш динамичен модел на яйцето на Мос:



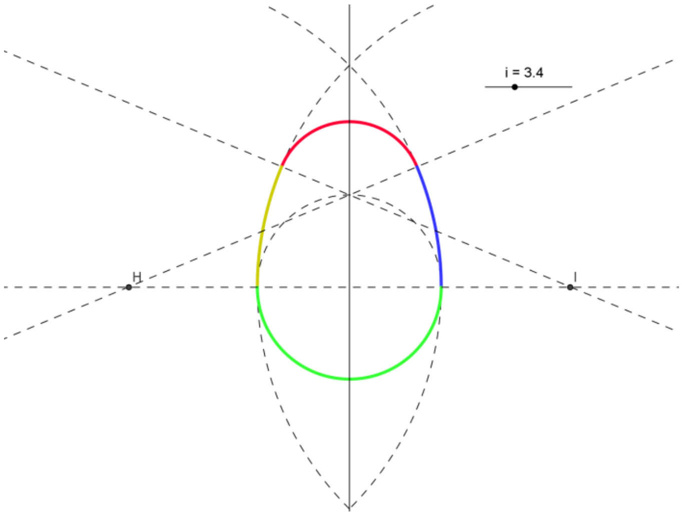
Фиг. 10 Яйцето на Мос, построено с *GeoGebra*



Фиг. 11 Яйцето на Мос и конструкционният протокол в *GeoGebra*

В конструкцията на фиг.11 общият радиус на двете големи окръжности е диаметър на малката окръжност. Ако изберем за центрове на големите окръжности други точки *H* и *I* от правата, съдържаща диаметъра на малката окръжност, ще получим друго яйце.

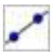
Задача: Създай в *GeoGebra* динамичен модел като описания горе, с който да експериментираш чрез промяна на центровете на големите окръжности.
Помощ: В конструкцията на фиг. 12 е използван плъзгач за местене на тези центрове.



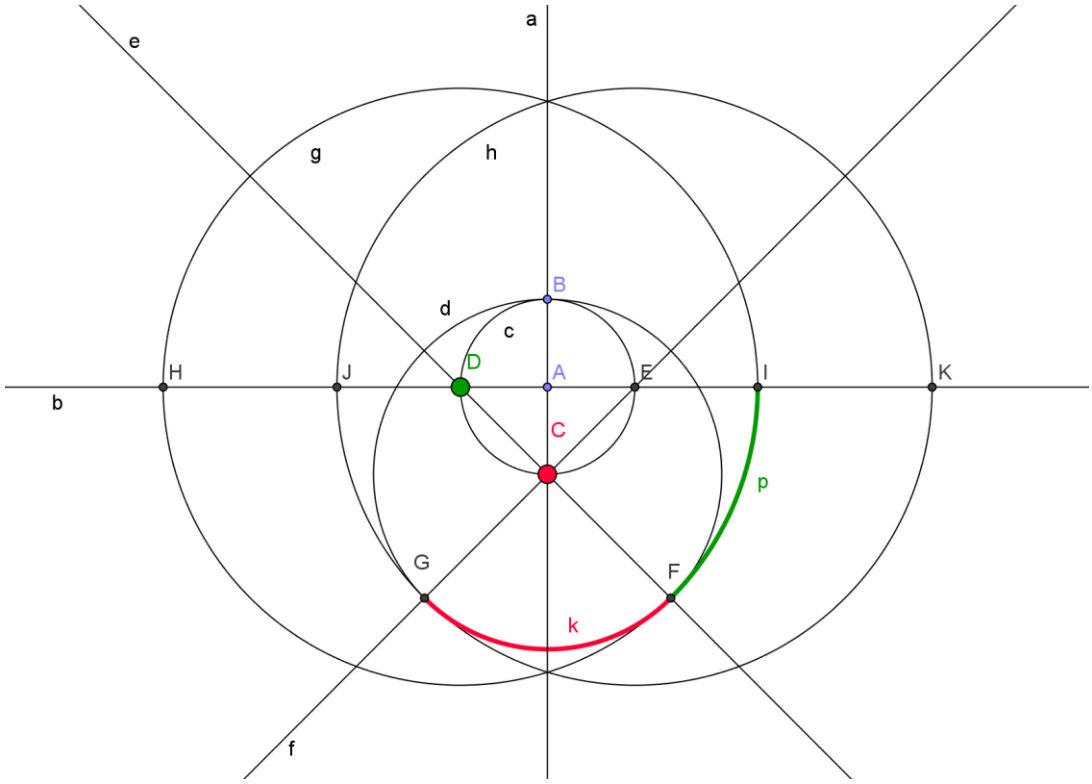
Фиг. 12 Вариации на яйцето на Мос

5.2 Четириточково яйце

Да начертаем т.н. *четириточково яйце*.

Икона	Действие	Име
	Построяваме права (за удобство - вертикална)	**a**
	Избираме точка върху правата **a**	**A**
	Построяваме права през точка **A**, перпендикулярна на *a*	**b**
	Избираме друга точка от **a**	**B**
	Построяваме окръжност през **B** с център **A**	**c**
	Маркираме пресечните точки на **a** и **c**	**C**
	Построяваме окръжност през **B** с център **C**	**d**
	Маркираме пресечните точки на **c** и **b**	**D, E**
	Построяваме права през **D** и **C**	**e**
	Построяваме права през **E** и **C**	**f**
	Маркираме пресечните точки на **d** и **e**	**F**
	Маркираме пресечните точки на **d** и **f**	**G**
	Построяваме окръжност през **F** с център **D**	**g**
	Построяваме окръжност през **G** с център **E**	**h**
	Маркираме пресечните точки на **g** и **b**	**H, I**
	Маркираме пресечните точки на **h** и **b**	**J, K**
	Построяваме дъга с център **C** от **G** до **F**	**k**
	Построяваме дъга с център **D** от **F** до **I**	**p**

Сега конструкцията ни ще се доближи до показаната на фиг. 13.

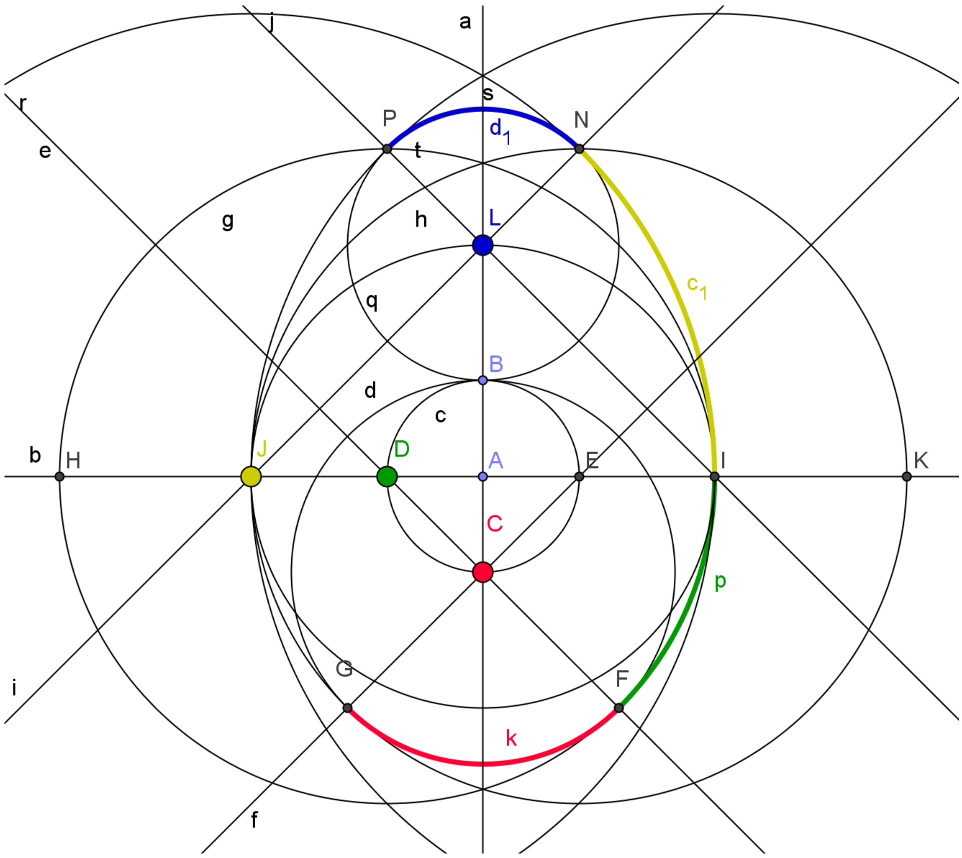


Фиг. 13 Точките *C* и *D* са две от четирите, определящи яйцето. Зелената и червената дъга са части от яйцето, които им съответстват.

Продължение на конструкцията за четириточково яйце

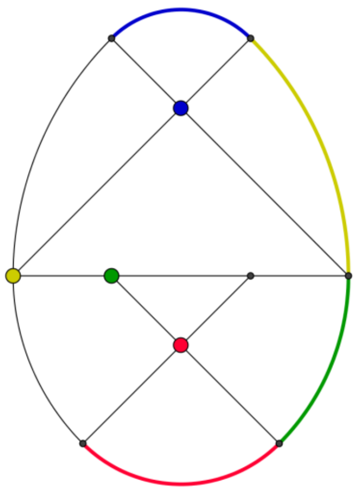
	действие	име
	Построяваме окръжност с център **A** от **I** до **J**	**q**
	Маркираме пресечните точки на **a** и **q**	**L**
	Построяваме права през **I** и **L**	**i**
	Построяваме права през **J** и **L**	**j**
	Построяваме окръжност с център **J** through **I**	**r**
	Построяваме окръжност с център **I** through **J**	**s**
	Построяваме окръжност с център **L** through **B**	**t**
	Маркираме пресечните точки на **r** и **i**	**N**
	Маркираме пресечните точки на **s** и **j**	**P**
	Построяваме дъга с център **J** от **I** до **N**	c_1
	Построяваме дъга с център **L** от **N** до **P**	d_1

Почти сме завършили построяването на четириточково яйце. Четирите точки *C*, *D*, *J* и *L*, дефинират яйцето и с цветове сме откроили съответните им дъги.



Фиг. 14 Четирите точки и съответните им дъги

Използваме симетрията за построяване на останалите дъги и скриваме помощните елементи до получаване на яйцето на фиг.15.

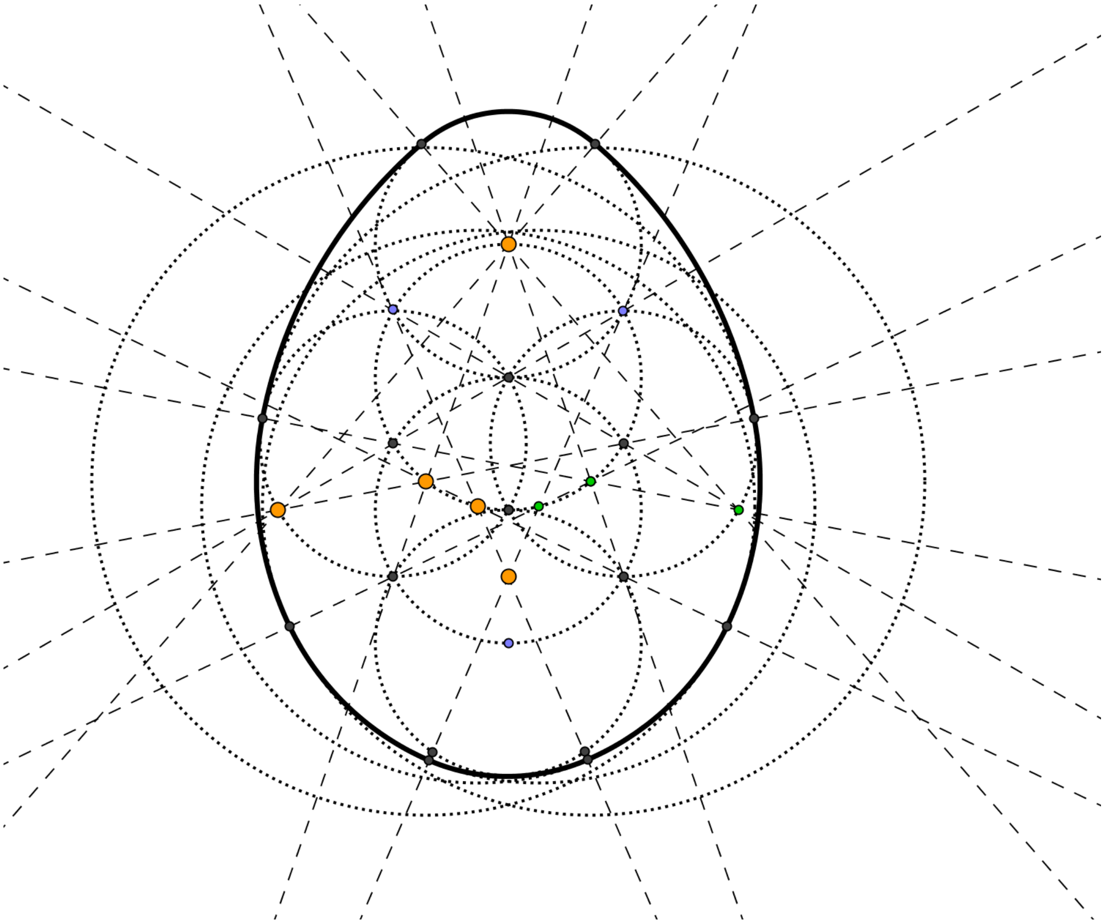


Фиг. 15 Четириточково яйце

Забележка: Не е необходимо да се построяват всички окръжности, описани горе. В някои случаи могат да се построят направо дъгите.

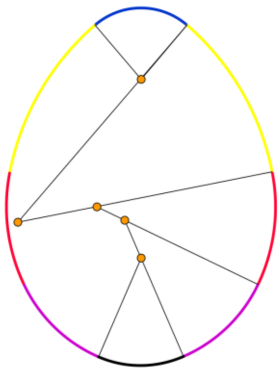
5.3 Петточково яйце

На фиг. 16 е изобразено петточково яйце с помощните обекти. Петте оранжеви точки дефинират дъгите на дясната страна на яйцето, а чрез зелените точки се получава лявата страна.



Фиг. 16 Петточково яйце и помощните обекти

Скриваме помощните елементи и получаваме яйцето с петте образуващи точки на фиг. 17.



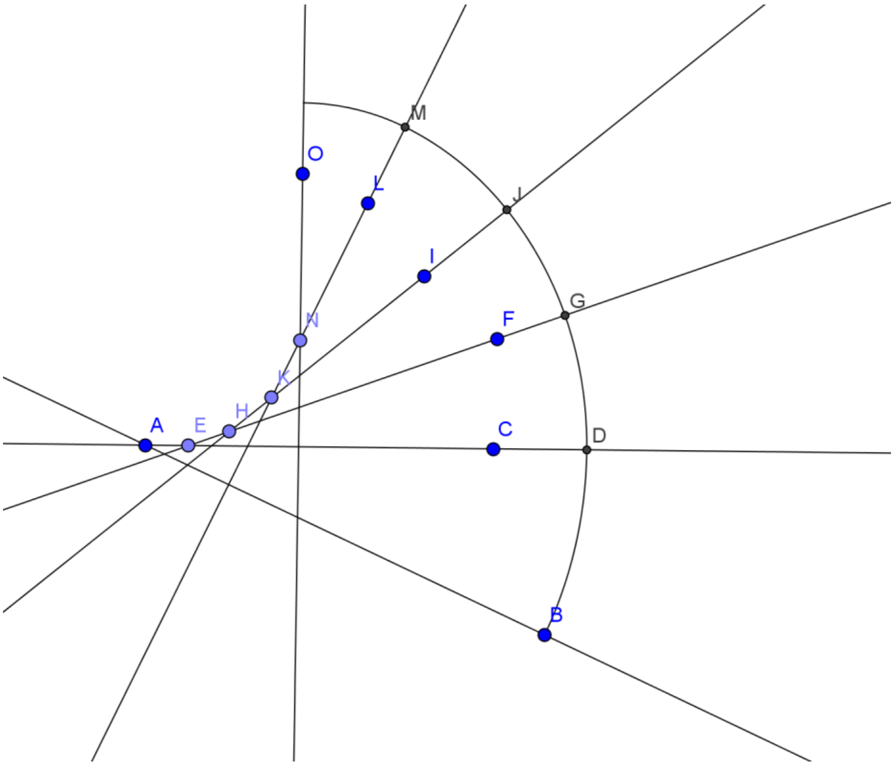
Фиг. 17 Петточково яйце

Задача: С *GeoGebra* (или с друг динамичен софтуер) създай петточково яйце. Премествай точките и наблюдавай изменението на формата на яйцето.

Забележка: Динамичното яйце осигурява гладко свързване на дъгите при преместване на точки.

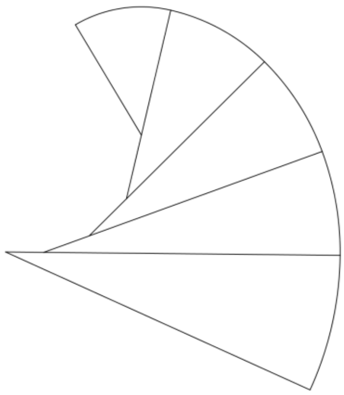
Експеримент

На фиг.18 е показано как може да се използва тази идея за построяване на спирала.



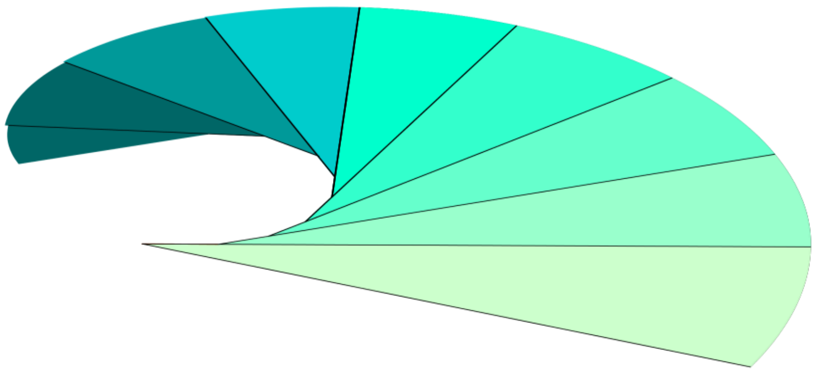
Фиг. 18 Спирала

Динамичността на конструкцията позволява с преместване на точки да получим различни варианти на спирала. Скриваме помощните обекти и стигаме до изображението на фиг. 19.



Фиг. 19 Спиралата след скриване на помощните обекти

Задача: Построй спиралата горе. С цветове опитай да създадеш картина, например като на фиг.20.



Фиг. 19 Спиралата след промяна на цвят и стил

Задача: Виж *Яйцата, конструирани от Том*, на адрес http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html [3].

Направи им динамични модели.

Задача: Потърси в интернет т. нар. *Златно яйце* и създай динамичен модел. Снимка на *Златно яйце* можеш да намериш и в книгата на Диксън [1].

Задача: Създай свое динамично яйце.

Литература

[1] Dixon, R. *Mathographics*. Basic Blackwell Limited, Oxford, England, 1987.

[2] GeoGebra, downloadable from http://www.geogebra.org.

[3] Weisstein, Eric W. "Thom's Eggs." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html