

Euclidean Eggs

Freyja Hreinsdóttir, University of Iceland

1 Introduction

Ved hjælp af et computerprogram som GeoGebra er det nemt at lave geometriske konstruktioner. Specielt er der gode værktøjer til at tegne buer og cirkler og stykke disse sammen så man får skabt objekter med forskellige former som f.eks. æg.

2 Buer og cirkler

For at beskrive en cirkel behøver vi to ting: centrum og radius. Hvad skal vi kende for at beskrive en bue? En bue er en del af en cirkel så vi skal kende cirklen, dvs. centrum og radius samt hvor på cirklen buen begynder og hvor den slutter - eller eventuelt hvor den begynder og hvor lang den er.

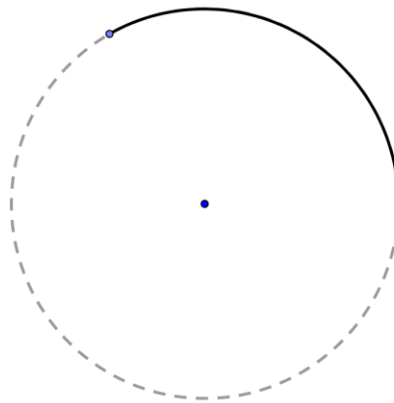


Fig. 1 En bue på en cirkel

I Geogebra er der adskillige værktøjer til at konstruere cirkler og buer:

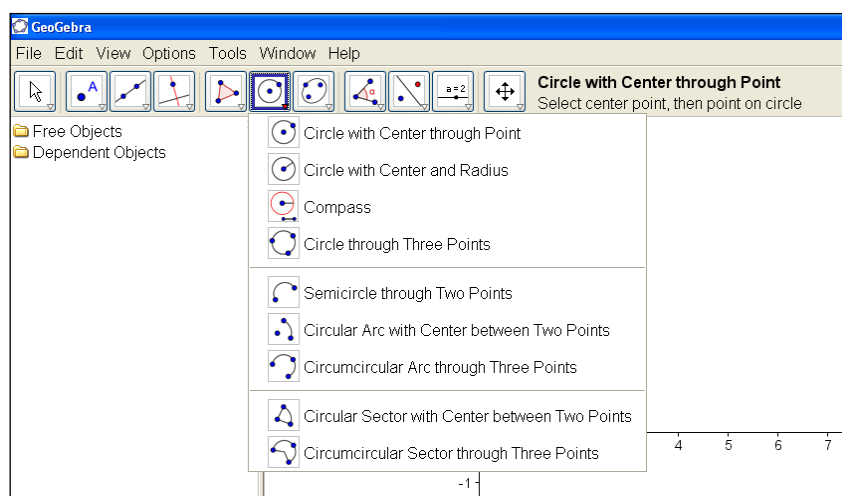


Fig.2 Skærbillede der viser værktøjer til cirkler og buer.

Opgave: Konstruer nogle buer og cirkler med GeoGebra. Lad nogle af buerne fortsætte over i hinanden og brug forskellige udfyldningsfarver for at frembringe et flot billede. For at skifte farve og stil skal du højreklikke på et objekt og vælge "Egenskaber", så åbnes en menu med mange muligheder.

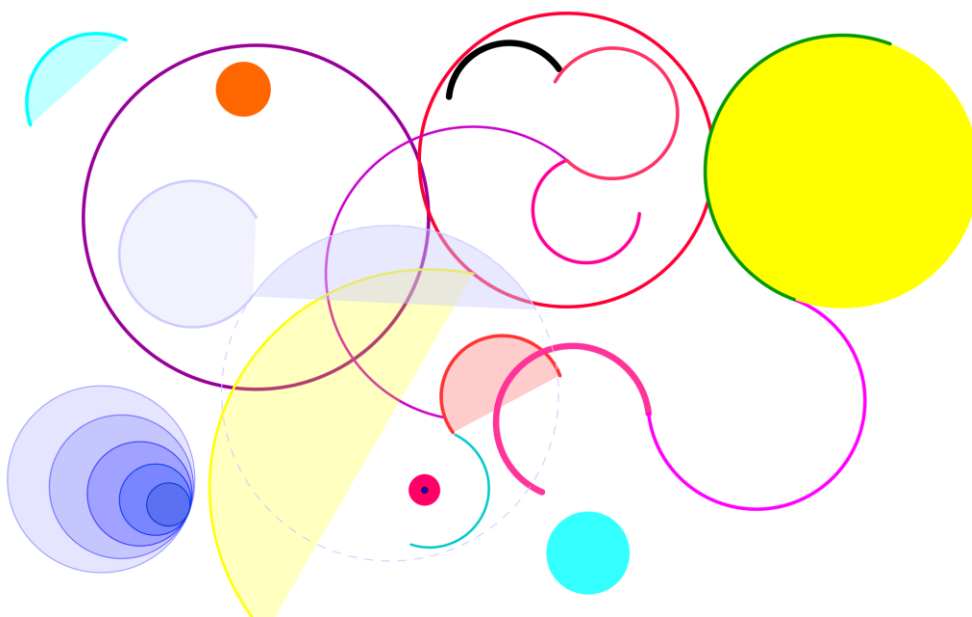


Fig. 3 Her er et billede lavet af buer og cirkler

Bemærk at nogle af de sammensatte buer er sammenføjet så der ikke er knæk - man kalder det en *glat* sammenføjning. Vi skal nu se på hvordan det gøres.

Opgave: Start GeoGebra og lav to buer c og d som mødes i et punkt. Prøv at flytte på punkterne som buerne er konstrueret ud fra indtil sammenføjningen bliver glat. Det bliver nemmere hvis du tegner en hjælpelinje gennem sammensætningspunktet og den ene cirkelbues centrum.

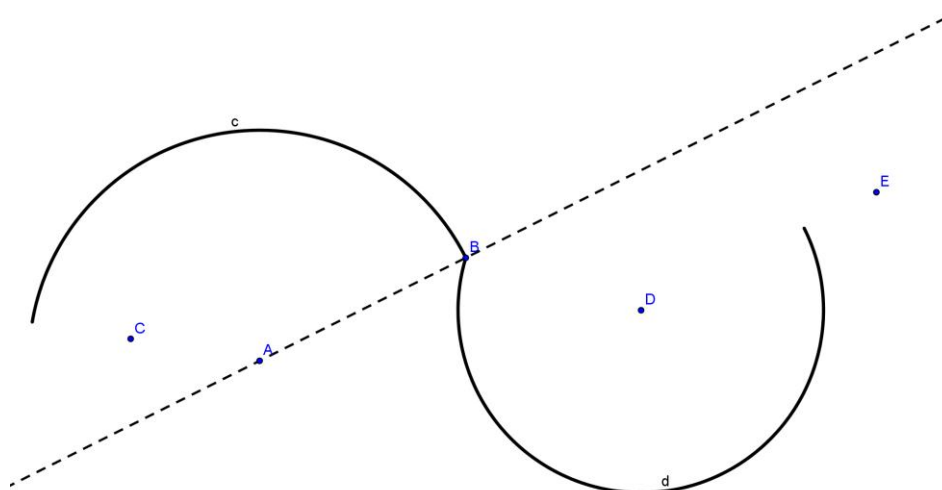


Fig. 4 To cirkelbuer der mødes i et punkt

Ved at flytte rundt med punkt D kan du få buerne til at mødes i en glat sammenføjning i B og få et billedet på Fig. 5.

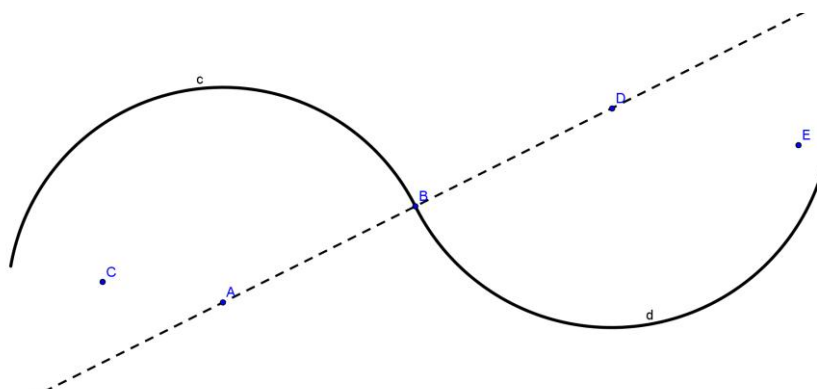


Fig. 5 To cirkelbuer der er mødes i en glat sammenføjning

Du har sandsynligvis opdaget at en nødvendig betingelse for at sammenføjningen er glat er at centrene for de to cirkler som buerne er dele af og sammenføjningspunktet ligger på linje. Denne betingelse er også tilstrækkelig hvis de to buer ligger på hver sin side af linjen.

Ud fra dette princip kan vi konstruere et billede som dette:

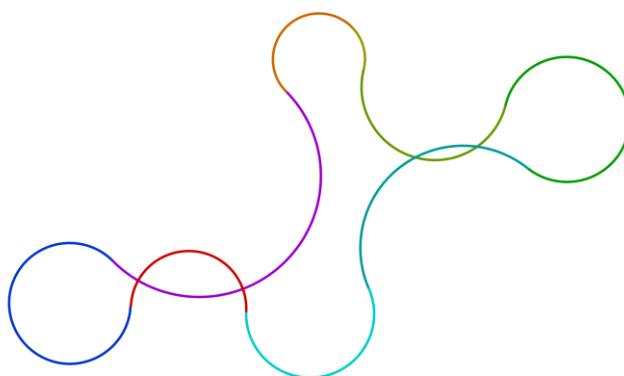


Fig. 6 Mange buer føjet glat sammen

Der er brugt mange hjælpelinjer og cirkler som er skjult på det færdige billede men vist i billedet nedenfor på Fig. 7. På grund af dynamikken i GeoGebra er det muligt at flytte rundt på punkterne og få forskellige billeder med glat sammenføjede kurver så længe man opfylder betingelserne (at de tre punkter skal ligge på linje og de to buer ligger på hver side af linjen - dette skal gælde for hver sammenføjning).

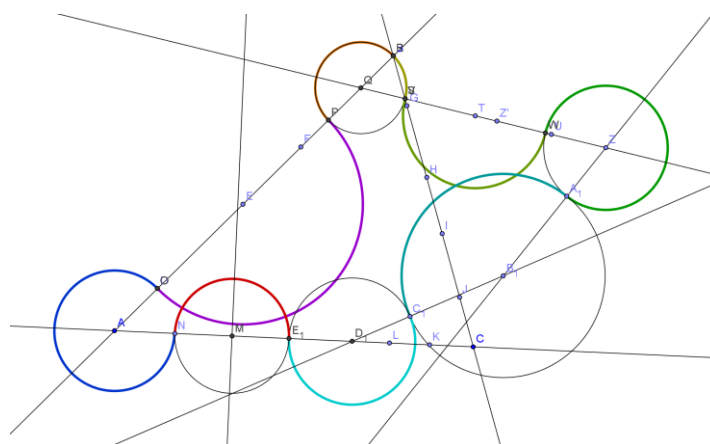


Fig. 7 Mange buer med glatte sammenføjninger konstrueret med de viste hjælpelinjer

Opgave: Lav dit eget billede i stil med det på Fig. 6

4 Æg

Nedenfor ser du et billede af forskellige fugleæg. Som du kan se er de meget forskellige i størrelse men ret ensartede i form, selv om nogle er spidsere end andre.



Fig. 8 Æg (fra [http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_\(biology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_(biology)))

Vi kan bruge buer til at konstruere ægformede figurer som dem på Fig. 9 nedenfor. Hvordan det gøres bliver forklaret i næste afsnit.

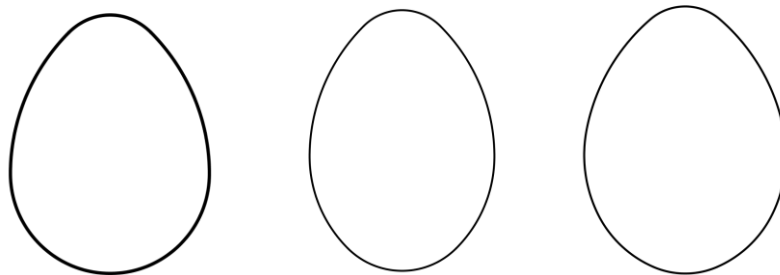


Fig. 9 Et Moss æg, et fire- og et fempunktsæg konstrueret med GeoGebra

5 Euklidiske æg

I den anbefalelsesværdige bog *Mathographics* af Robert Dixon [1] er der et kapitel om ægformede figurer (ovaler) konstrueret med passer og lineal. Forfatteren kalder dem *euklidiske æg* og viser forskellige billeder af forskellige eksempler uden dog at demonstrere hvordan konstruktionerne er udført (Dixon (1987), pp. 3 – 11).

Af buer og cirkler kan vi konstruere disse ægformede kurver der ligner tværsnit af rigtige æg. Det er meget varierende hvor komplicerede konstruktionerne er. Princippet er forholdsvis enkle når først man har gennemskuet dem men til gengæld kan det tage lang tid at udføre dem da der er mange detaljer.

5.1 Moss-æg

Opgave: Prøv at lade dig inspirere af Fig. 10 til at konstruere dit eget Moss-æg.

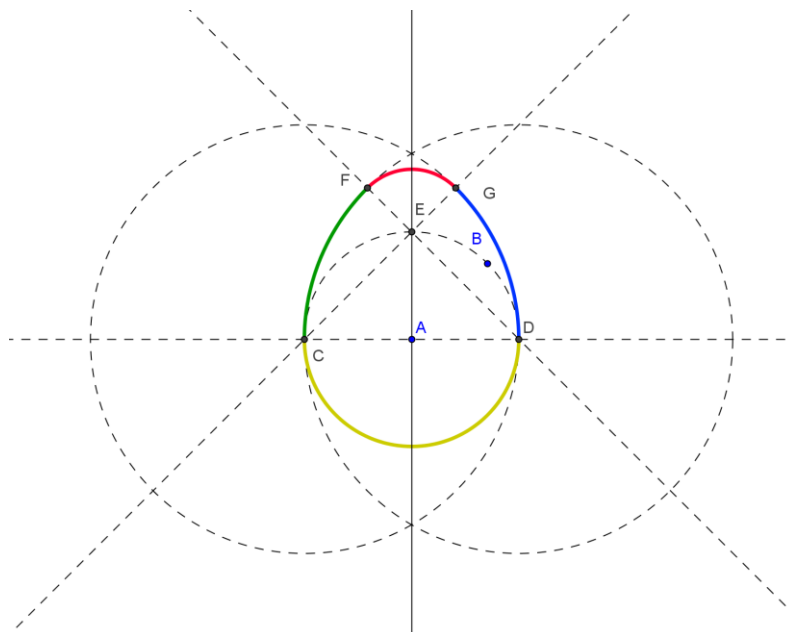


Fig. 10 Moss-æg konstrueret med GeoGebra

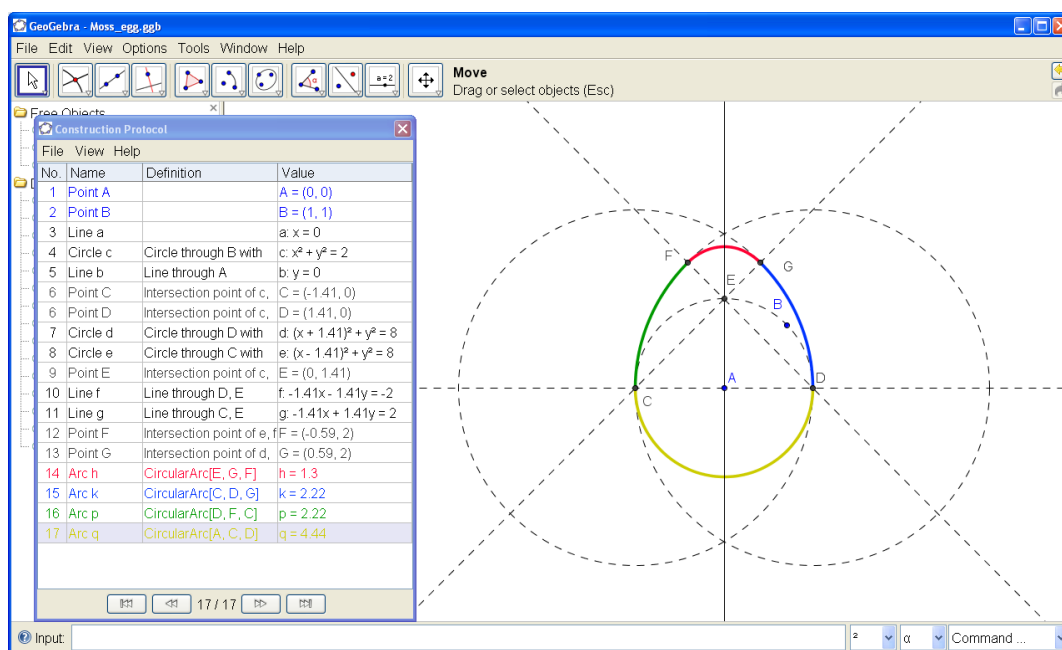


Fig. 11 Skærbillede fra GeoGebra med konstruktionsbeskrivelsen

I konstruktionen på Fig. 11 er radius for de to store cirkler lig med diameteren for den første cirkel der er tegnet. Hvis vi afsætter nye punkter *H* og *I* på diameterlinjen og gennemfører konstruktionen med passende justeringer får vi et æg der ser lidt anderledes ud - se Fig. 12.

Opgave: Lav dig et GeoGebra-dokument hvor du kan variere placeringen af centerpunkterne ovenfor af derved eksperimentere med forskellige former af samme type. (vink: brug en skyder).

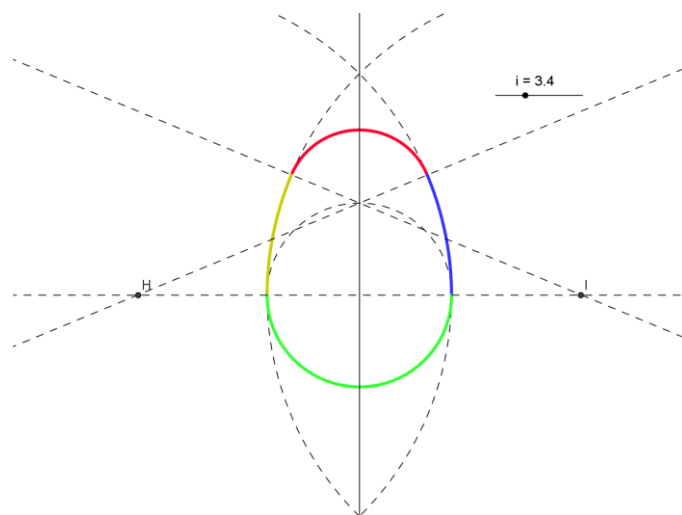


Fig.12 Variationer over Moss-æg

5.2 Firepunktsæg

Vi skal nu se på hvordan man tegner et såkaldt *firepunktsæg*.

Ikon	Konstruktion	Navn
	Det er lettest med en lodret linje, f.eks. y-aksen, selv om koordinater ikke er nødvendige undervejs i konstruktionen.	a
	Afsæt et punkt på a	A
	Oprejs den normalen til a i punktet A	b
	Afsæt et andet punkt på a	B
	Tegn en cirkel gennem B med centrum A	c
	Konstruer det andet skæringspunkt mellem a og c	C
	Tegn en cirkel gennem B med centrum i C	d
	Konstruer skæringspunkterne mellem c og b	D, E
	Tegn en linje gennem D og C	e
	Tegn en linje gennem D og E	f
	Konstruer skæringspunkterne mellem d og e	F
	Konstruer skæringspunkterne mellem d og f	G
	Tegn en cirkel gennem F med centrum i D	g
	Tegn en cirkel gennem G med centrum i E	h
	Konstruer skæringspunkterne mellem g og b	H, I
	Konstruer skæringspunkterne mellem h og b	J, K
	Tegn en bue med centrum C gennem G og F	k
	Tegn en bue med centrum D gennem F og I	p

Nu skulle du gerne have en konstruktion der nogenlunde ligner den på Fig. 13.

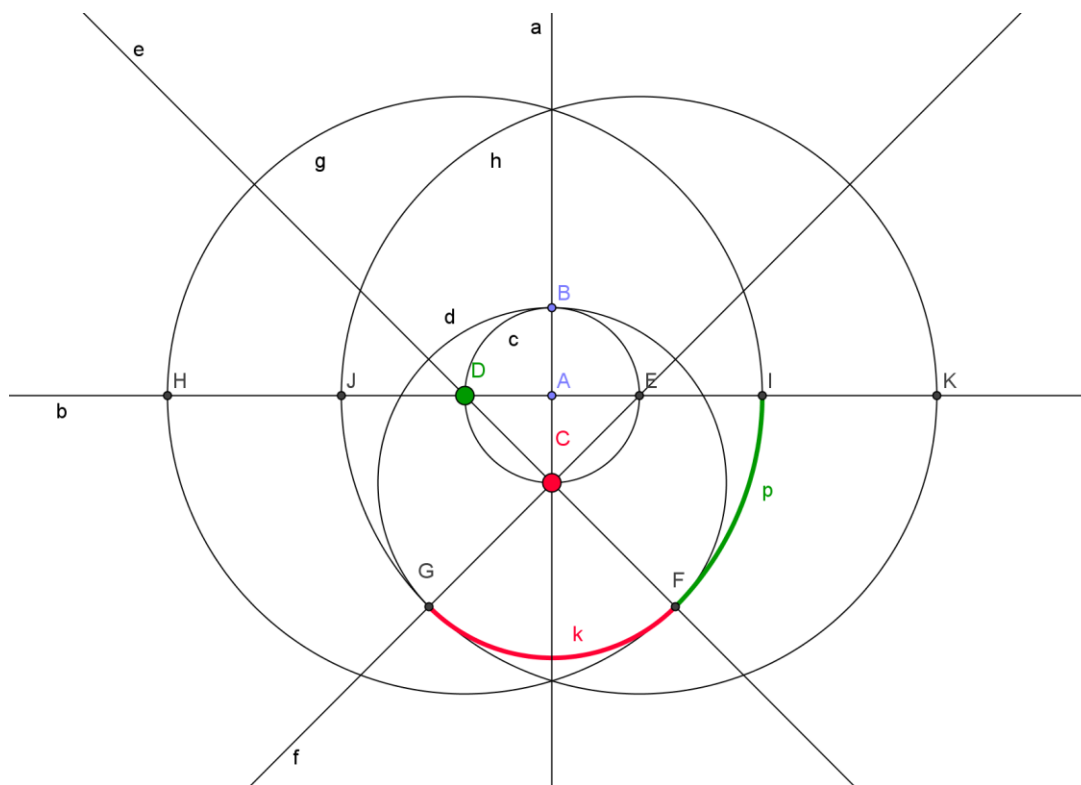


Fig.13 Punkterne C og D er to af de fire punkter der bruges til at konstruere ægget. Den grønne og den røde bue er dele af ægget svarende til de ti punkter.

Vi fortsætter konstruktionen af firepunktsægget.

	Konstruktion	Navn
	Tegn en cirkel med centrum A gennem I og J	q
	Konstruer skæringspunktet mellem a og q	L
	Tegn en linje gennem I og L	i
	Tegn en linje gennem J og L	j
	Tegn en cirkel med centrum J gennem I	r
	Tegn en cirkel med centrum I gennem J	s
	Tegn en cirkel med centrum L gennem B	t
	Konstruer skæringspunktet mellem cirklen r og linjen i	N
	Konstruer skæringspunktet mellem cirklen s og linjen j	P
	Tegn buen med centrum J gennem I og N	c_1
	Tegn buen med centrum L gennem N og P	d_1

Nu er vi næsten færdig med at konstruere firepunktsægget. De fire punkter der bestemmer ægget er C, D, J og L som kan ses på Fig. 14 nedenfor hvor farver er brugt til at fremhæve sammenhængen mellem punkter og buer.

5.3 Fempunktsæg

På Fig. 16 nedenfor ser du et fempunktsæg med alle hjælpelinjer og -cirkler.

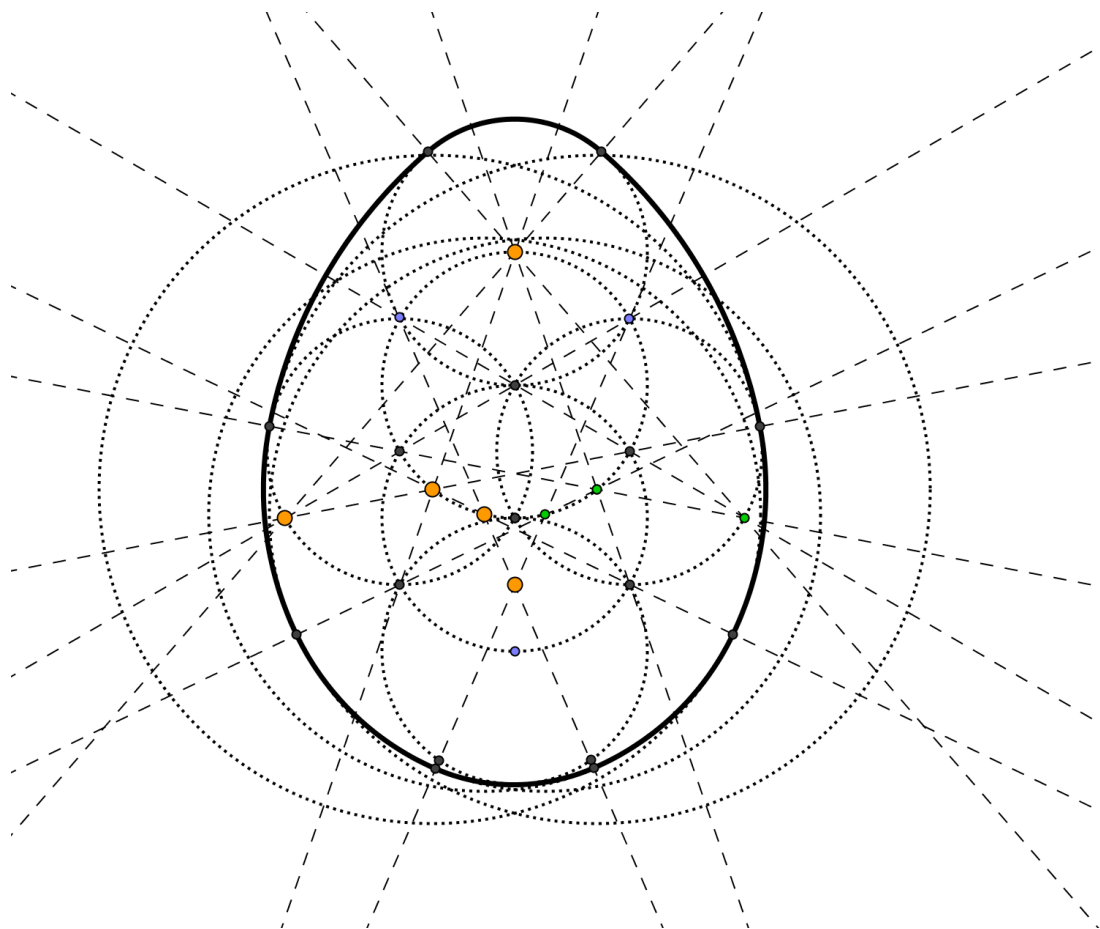


Fig. 16 Fempunktsæg

De fem orange punkter er de fem punkter der skal bruges til at konstruere buerne på æggets højre side medens de grønne punkter er dem der skal bruges til venstre side. Hvis vi skjuler alle cirkler og linjer, erstatter nogle linjer med linjestykker får vi billedet på Fig. 17 med de fem punkter til højre side af ægget.

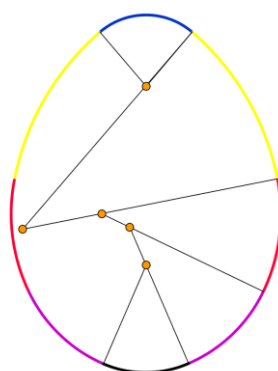


Fig. 17 Førdigt fempunktsæg

Opgave: Brug GeoGebra eller et andet dynamisk geometriprogram til at konstruere et fempunktsæg. Prøv at trække i punkter for at se hvorledes formen af ægget ændres.

Bemærkning: Hvis ægget er konstrueret korrekt vil alle sammenkoblinger af buestykker forblive glatte efter at der er trukket i punkterne.

Ekspirerter

Den nederste halvdel af fempunktsægget viser et konstruktionsprincip der kan fortsættes, dvs. man kan vælge flere punkter på linjestykkerne og skabe en spiralagtig figur som denne:

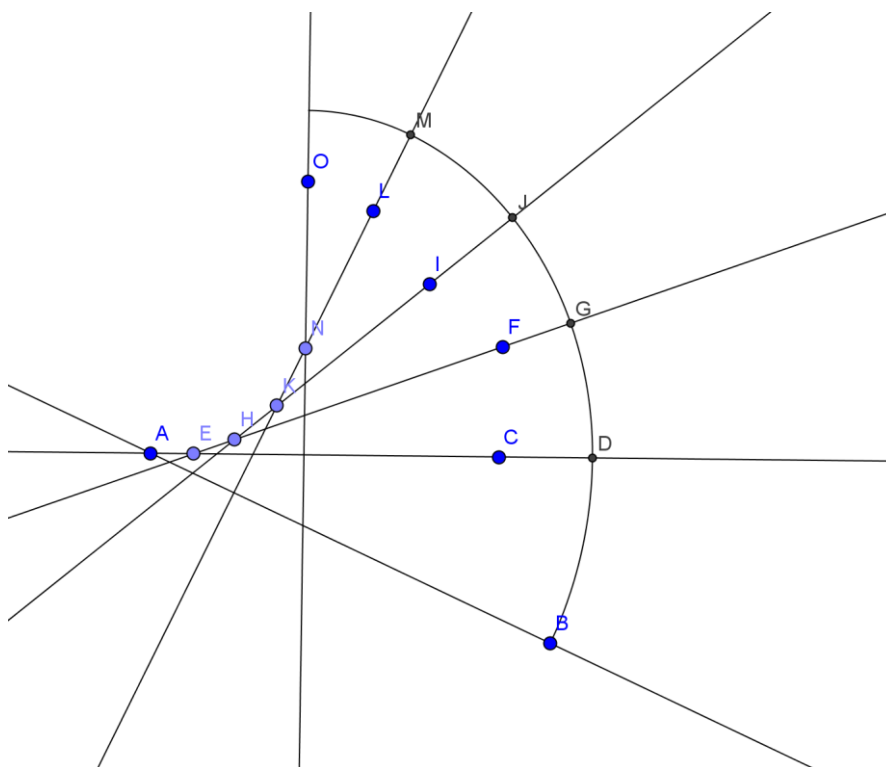


Fig.18 En spiral

Konstruktionen på Fig. 18 er udført alene med værktøjerne til linjer og buer og de to punktværktøjer. Vi kan trække i alle de blå punkter og ændre konstruktionen. Skjuler man linjer og tilføjer linjestykker får man denne:

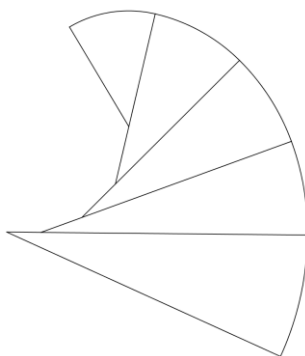


Fig. 19 Spiralen fra Fig. 18 med linjer og etiketter skjult.

Opgave: Konstruer spiralen ovenfor. Ekspirerter med farver for at få et pænere billede.

Opgave: På <http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html> er der et billede af Thom's æg [3]. Konstruer de to æg ved hjælp af cirkler, buer og linjer.

Opgave: Led efter "golden egg" på internettet for at finde et billede af Det gyldne Æg og konstruer det ved hjælp af cirkler, buer og linjer (et billede kan også findes i Dixons bog [1])

Opgave: Ekspirerter med lignende konstruktioner og lave dine egne.

Referencer

- [1] Dixon, R. *Mathographics*. Basic Blackwell Limited, Oxford, England, 1987.
- [2] GeoGebra, downloadable from <http://www.geogebra.org>.
- [3] [Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html) "Thom's Eggs." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html>

