Euklidische Eier

Freyja Hreinsdóttir

Universität Island

1 Einleitung

Mit Hilfe von Geometrie Computer Programmen wie etwa GeoGebra ist es sehr leicht Konstruktionen mit Lineal und Zirkel auszuführen. Im Besonderen ist es leicht Kreisbögen und Kreise zu zeichnen und diese zusammenzufügen um Objekte mit verschiedenen Formen zu kreieren wie zum Beispiel ein Ei.

2 Kreisbögen und Kreise

Um einen Kreis zu definieren braucht man zwei Parameter, den Mittelpunkt und den Radius. Was benötigen wir um einen Kreisbogen zu definieren? Ein Kreisbogen ist im Grunde ein Teil eines Kreises, daher brauchen wir dieselben Informationen um zu wissen von *welchem* Kreis der Kreisbogen ein Teil ist. Aber wir benötigen auch Informationen über die *Länge* und die *Position* des Bogens auf dem Kreis, das heißt wir müssen wissen wo auf dem gegebenen Kreis der Bogen beginnt und wo er endet.

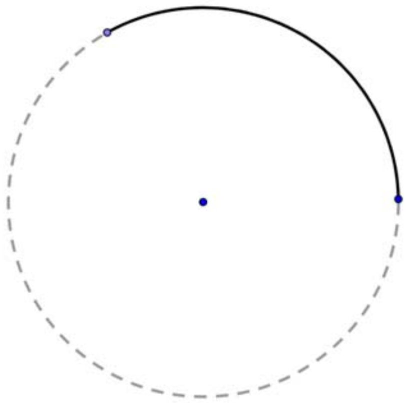


Abb. 1 Bogen eines Kreises

In GeoGebra gibt es mehrere Werkzeuge um Kreise und Kreisbögen zu konstruieren:

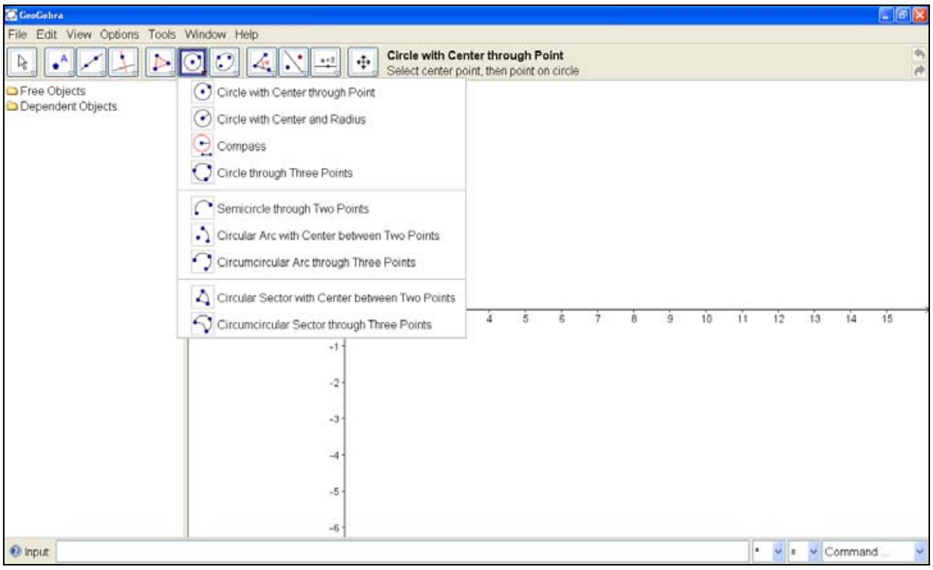


Abb.2 Screenshot der Werkzeuge in GeoGebra für die Konstruktion von Kreisbögen und Kreisen

Aufgabe: Konstruiere mehrere Bögen und Kreise in GeoGebra. Verbinde ein paar Kreisbögen miteinander und verwende verschiedene Farben und Füllungen um ein schönes Bild zu kreieren. Die Farben und den Stil verändert man mit einem Rechtsklick direkt auf das Objekt und wählt „Eigenschaften" in dem sich öffnenden Menü aus.

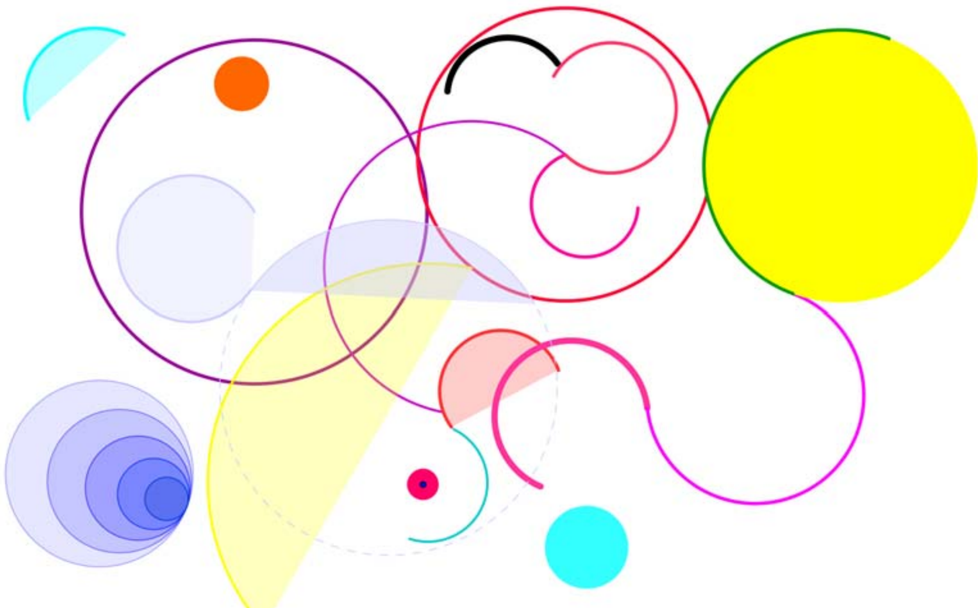


Abb. 3 Bild aus Bögen und Kreisen

Dabei sieht man, dass einige der Bögen *glatt* verbunden sind, das heißt ohne Biegung oder Bruch am Verbindungspunkt. Nun untersuchen wir wie das gemacht wird.

Aufgabe: Öffne GeoGebra und konstruiere zwei Kreisbögen c und d die sich in einem Punkt treffen. Versuche die Punkte, welche die Bögen definieren, so zu verschieben damit die Verbindung glatt ist. Diese Aufgabe ist leichter, wenn man eine Gerade durch den Verbindungspunkt und den Mittelpunkt eines Kreisbogens legt.

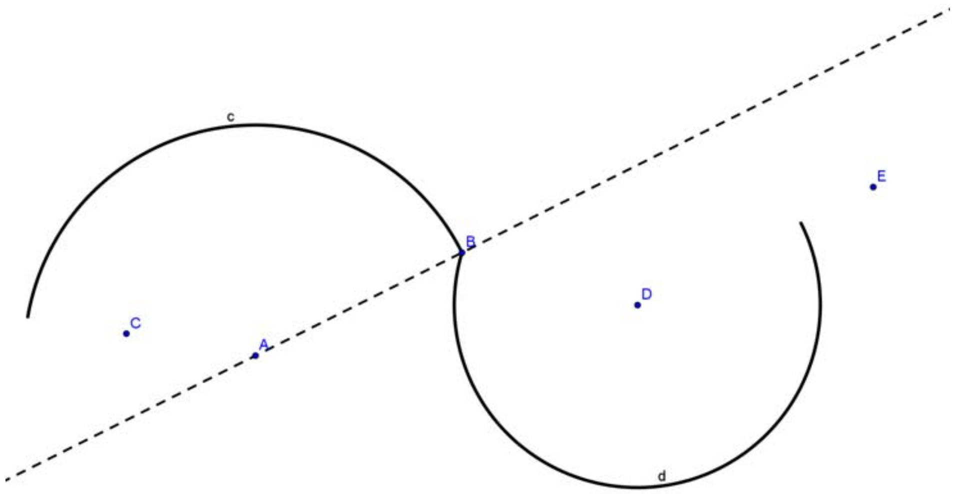


Abb. 4 Zwei Bögen die sich in einem Punkt treffen

Der Punkt *D* kann so bewegt werden damit sich die beiden Kreisbögen glatt treffen, wie in Abb. 5.

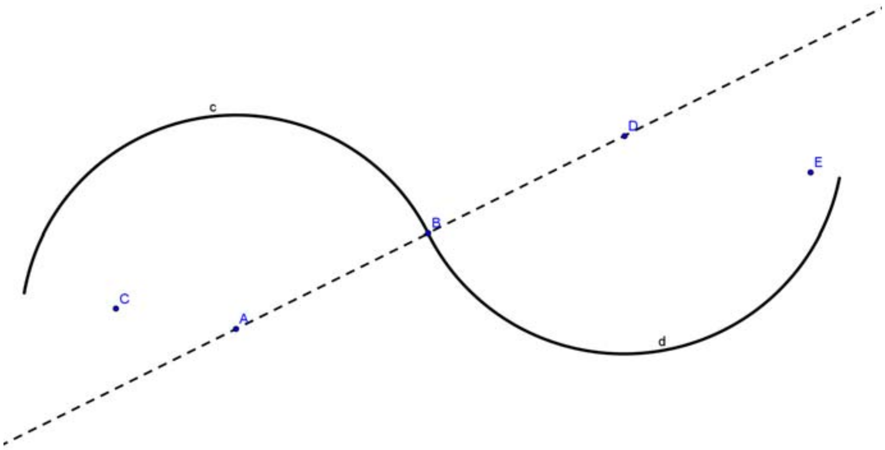


Abb. 5 Zwei Kreisbögen, die glatt verbunden sind

Dabei fällt auf, dass eine notwendige Bedingung für einen glatten Übergang ist, dass die **zwei Mittelpunkte (auf den Kreisen, welche die beiden Bögen definieren) und der Treffpunkt auf einer Geraden liegen**. Diese Bedingung ist also ausreichend, wenn wie in Abb.5 die beiden Bögen auf den gegenüberliegenden Seiten der Geraden liegen.

Mit Hilfe dieses Prinzips können wir Bilder wie das folgende kreieren:

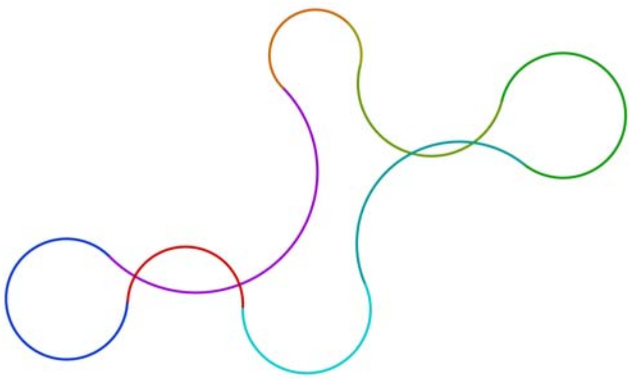


Abb. 6 Mehrere Bögen haben einen glatten Übergang

Dieses Bild wird mit Hilfe vieler Linien und Kreise konstruiert welche im endgültigen Bild versteckt sind, aber in Abb.7 zu sehen sind. Durch die dynamischen Eigenschaften von GeoGebra ist es möglich die Punkte zu verschieben um verschiedene glatte Bilder zu erhalten so lange bis die Anforderungen erfüllt sind (die drei Punkte sind auf der selben gerade und die Kreisbögen sind jeweils auf der gegenüberliegenden Seite der jeweiligen Geraden).

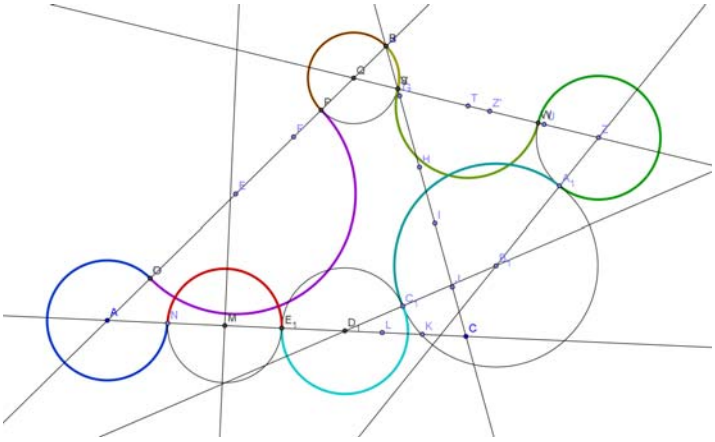


Abb. 7 Mehrere Kreisbögen glatt verbundene Kreisbögen mit den Hilfskonstruktionen

Aufgabe: Kreiere dein eigenes Bild ähnlich dem obigen.

4 Eier

Auf dem Bild unten sind mehrere Vogeleier zu sehen. Wie man sehen kann, sind sie alle verschieden groß aber die Form ist ähnlich, obwohl manche mehr und andere weniger gewölbt sind.

Abb. 8 Eier (von http://en.wikipedia.org/wiki/Egg_(biology))

Wir können Kreisbögen benutzen um Ei-förmige Objekte wie in Abb.9 zu konstruieren. Die einzelnen Konstruktionsschritte werden im nächsten Abschnitt erklärt.

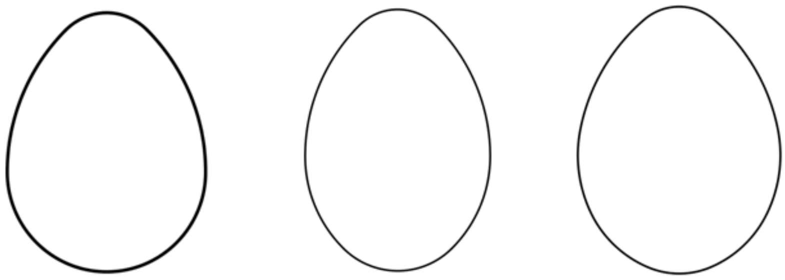


Abb. 9 Moss Ei, Vier-Punkt Ei und Fünf-Punkt Ei konstruiert mit GeoGebra

5 Euklidische Eier

In dem sehr netten Buch *Mathographics* von Robert Dixon [1] gibt es einen Abschnitt über Eiförmige Ovale konstruiert mit Lineal und Zirkel. Der Autor nennt sie *Euklidische Eier* und zeigt Bilder einiger solcher Eier obwohl die Details für die Konstruktion nicht angeführt werden (Dixon (1987), Seiten 3 – 11).

Mit Kreisbögen und Kreisen können wir diese Eiförmigen Kurven konstruieren welche sich kreuzenden Teilen richtiger Eier ähneln. Die Komplexität dieser Konstruktionen variiert stark. Sie sind relativ leicht, wenn das Prinzip einmal verstanden wurde, aber die Konstruktionen werden in mehreren Schritten durchgeführt und sind ziemlich zeitintensiv.

5.1 Moss Ei

Aufgabe: Versuche mit Hilfe des Bildes unten dein eigenes Moss Ei zu konstruieren:

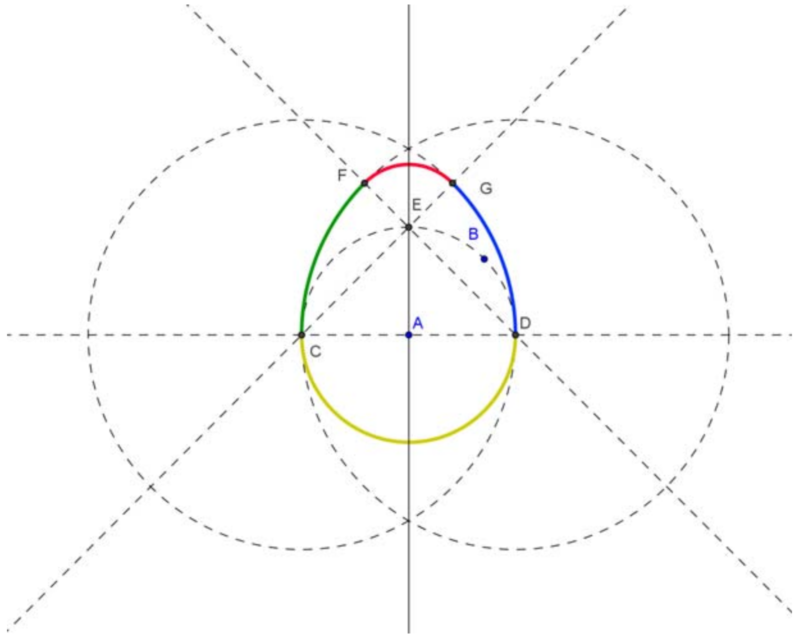


Abb. 10 Moss Ei konstruiert in GeoGebra

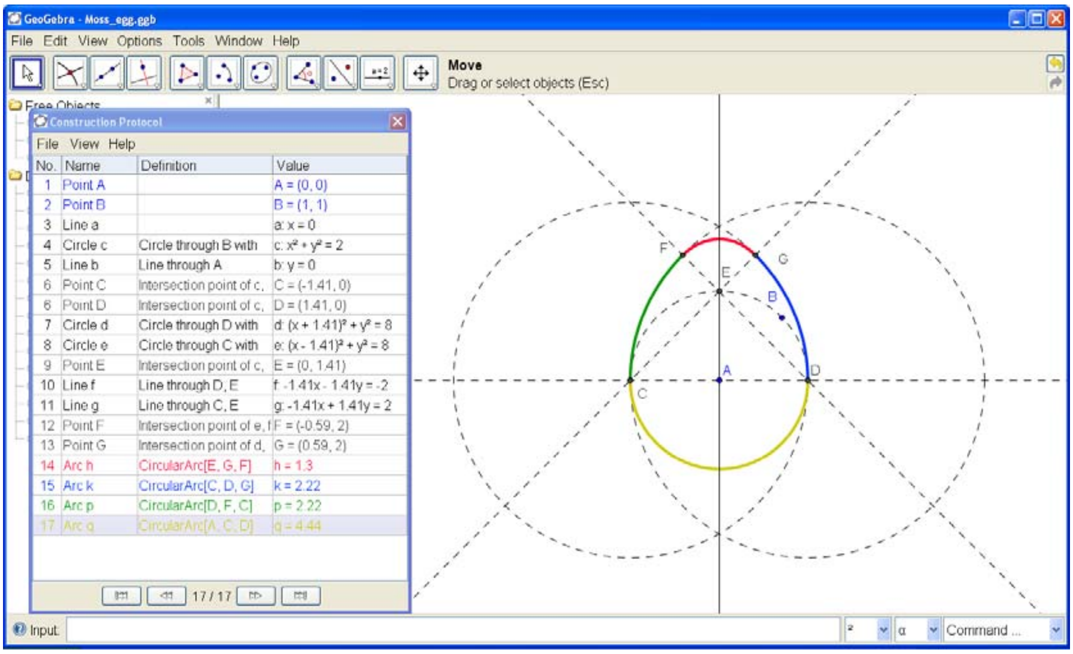


Abb. 11 Screenshot von GeoGebra mit dem Konstruktionsprotokoll

In der Konstruktion oben ist der Radius der zwei großen Kreise gleich dem Durchmesser des ersten gezeichneten Kreises. Wenn wir neue Punkte *H* und *I* auf der Durchmesser Geraden kreieren und durch die Konstruktionsschritte gehen erhalten wir ein Ei, das ein bisschen anders aussieht.

Aufgabe: Erstelle ein GeoGebra Arbeitsblatt damit du den Ort der oben erwähnten Mittelpunkte variieren und dadurch mit verschiedenen Formen eines ähnlichen Typs eines Ei experimentieren kannst (Tipp: verwende Schieber).

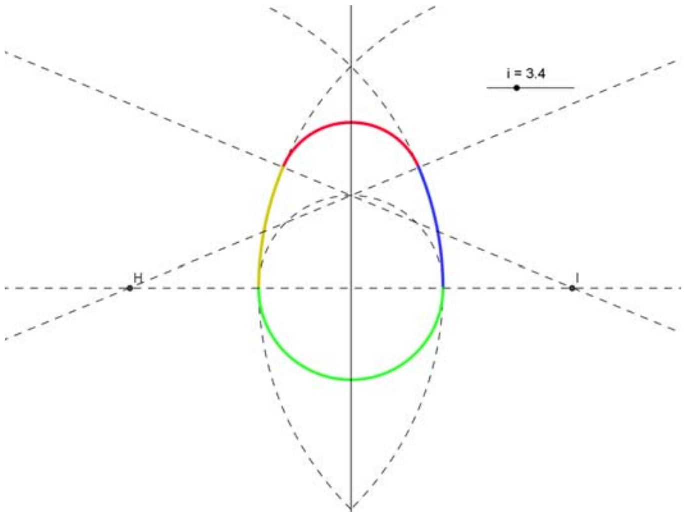
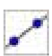
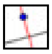
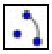


Abb.12 Variationen eines Moss Ei

5.2 Vier-Punkt Ei

Jetzt werden wir das sogenannte *Vier-Punkt Ei* zeichnen.

Symbol	Konstruktion	Name
	Zeichne eine Gerade. Am leichtesten ist es eine vertikale Gerade zu zeichnen z.B. die y-Achse obwohl man die Koordinaten für diese Konstruktion	a

	nicht braucht.	
	Definiere einen Punkt auf a.	A
	Zeichne eine Gerade durch den Punkte A rechtwinkelig zur Geraden a.	b
	Definiere einen zweiten Punkt auf a.	B
	Zeichne einen Kreis durch B mit A als Mittelpunkt.	c
	Markiere den weiteren Schnittpunkt auf a und c.	C
	Zeichne einen Kreis durch B mit C als Mittelpunkt.	d
	Markiere die Schnittpunkte auf c und b.	D, E
	Zeichne eine Gerade durch D und C.	e
	Zeichne eine Gerade durch E und C.	f
	Markiere den Schnittpunkt von d und e.	F
	Markiere den Schnittpunkt von d und f.	G
	Zeichne einen Kreis durch F mit D als Mittelpunkt.	g
	Zeichne einen Kreis durch G mit E als Mittelpunkt.	h
	Markiere die Schnittpunkte von g und der Geraden b.	H, I
	Markiere die Schnittpunkte von h und b.	J, K
	Zeichne einen Bogen mit C als Mittelpunkt durch G und F.	k
	Zeichne einen Bogen mit D als Mittelpunkt durch F und I.	p

Jetzt sollte deine Konstruktion in etwa so wie auf dem Bild unterhalb aussehen.

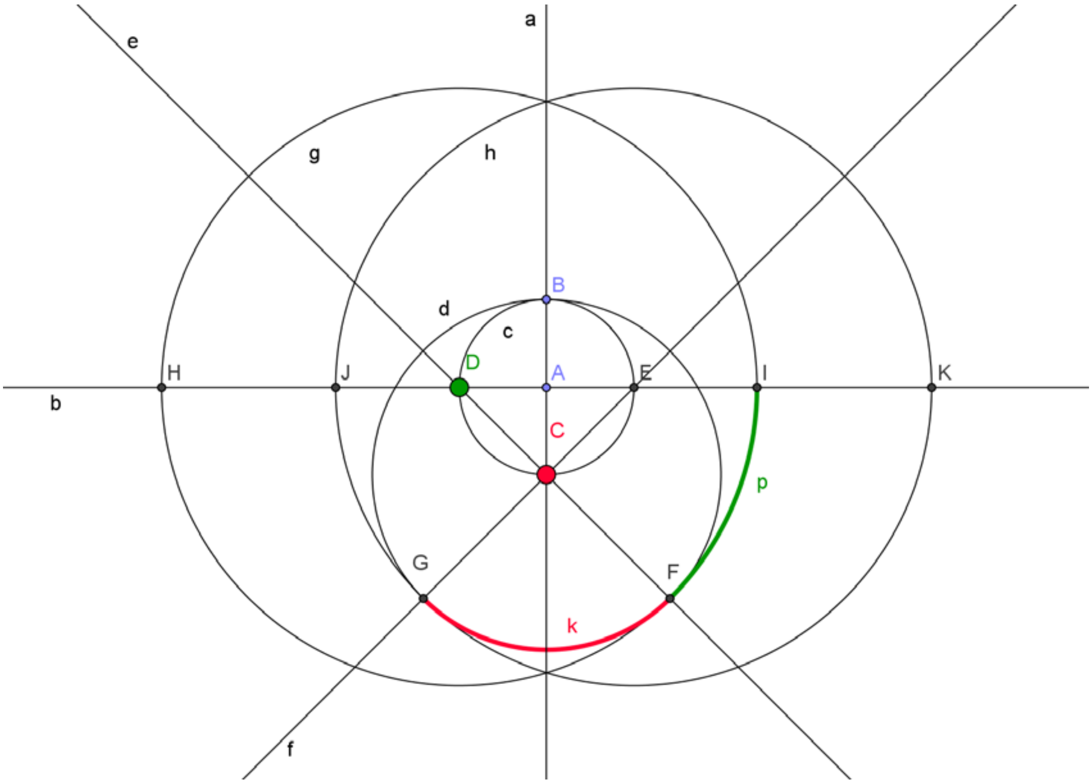


Abb.13 Die Punkte *C* und *D* sind zwei der vier Punkte, welche das Ei definieren. Der grüne und der rote Bogen sind Teile des Ei entsprechend den zwei Punkten.

Fortsetzung des Vier-Punkt Ei

	Konstruktion	Name
	Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A durch I und J.	q
	Markiere den Schnittpunkt von a und q.	L
	Zeichne eine Gerade durch I und L.	i
	Zeichne eine Gerade durch J und L.	j
	Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt J durch I.	r
	Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt I durch J.	s
	Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt L durch B.	t
	Markiere den Schnittpunkt des Kreises r und der Geraden i.	N
	Markiere den Schnittpunkt des Kreises s und der Geraden j.	P
	Zeichne den Kreisbogen mit Mittelpunkt J durch I und N.	c_1
	Zeichne den Kreisbogen mit Mittelpunkt L durch N und P.	d_1

Wir haben nun fast die Konstruktion des Vier-Punkt Ei geschafft. Die vier Punkte, die das Ei definieren, sind *C*, *D*, *J* und *L*, wie man in dem nächsten Bild sehen kann wobei Farben dazu verwendet wurden um die Übereinstimmung zwischen den Kreisbögen und den Punkten zu zeigen.

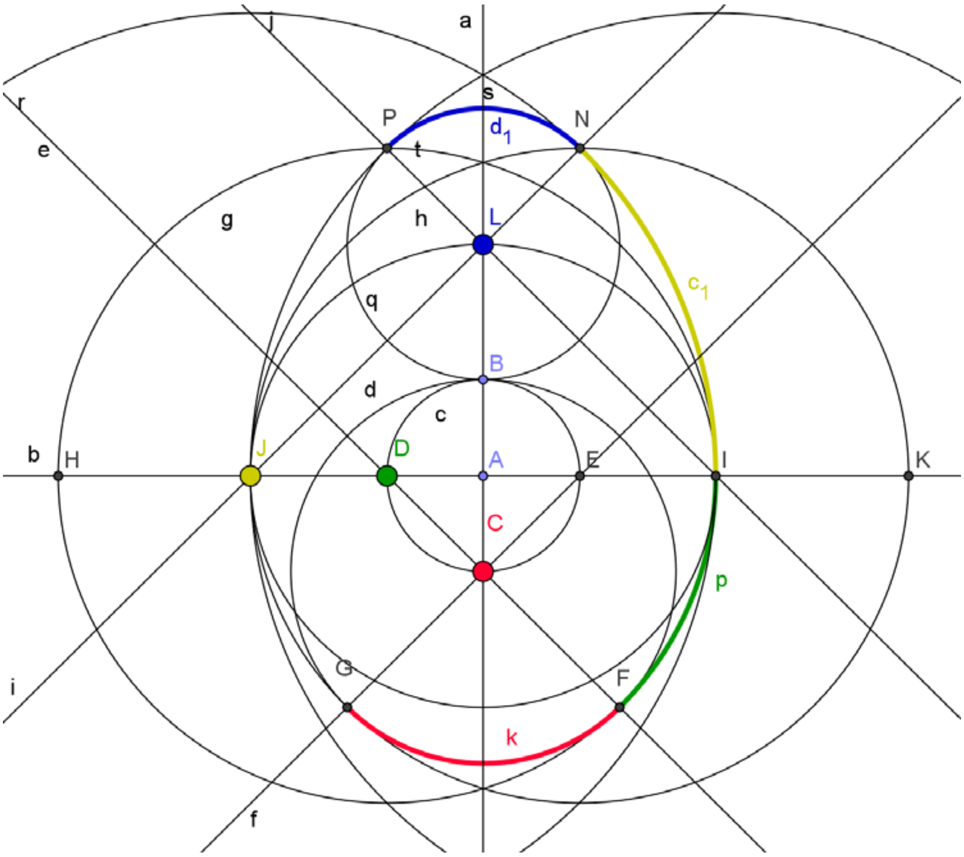


Abb. 14 Die vier Punkte und die entsprechenden Bögen.

Die übrigen Kreisbögen des Ei sind symmetrisch und wenn wir alle Beschriftungen, Kreise und einen Großteil der Geraden verstecken (und den Rest mit Segmenten ersetzen) erhalten wir das endgültige Ei wie man in Abb.15 sehen kann.

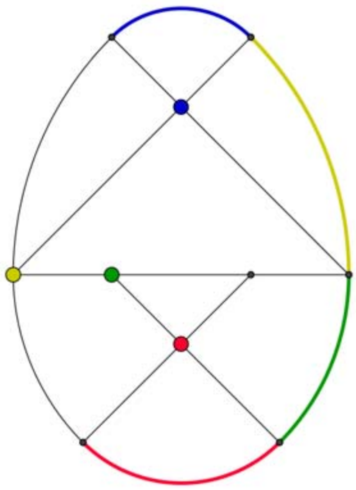


Abb. 15 Das Vier-Punkt Ei

Beachte: Es ist nicht wirklich notwendig alle Kreise in der Konstruktion oben zu zeichnen, da wir in manchen Fällen den Kreisbogen direkt zeichnen können.

5.3 Das Fünf-Punkt Ei

Unten sehen wir ein Bild eines Fünf-Punkt Ei mit allen notwendigen Hilfslinien und Kreisen um das Ei zu zeichnen.

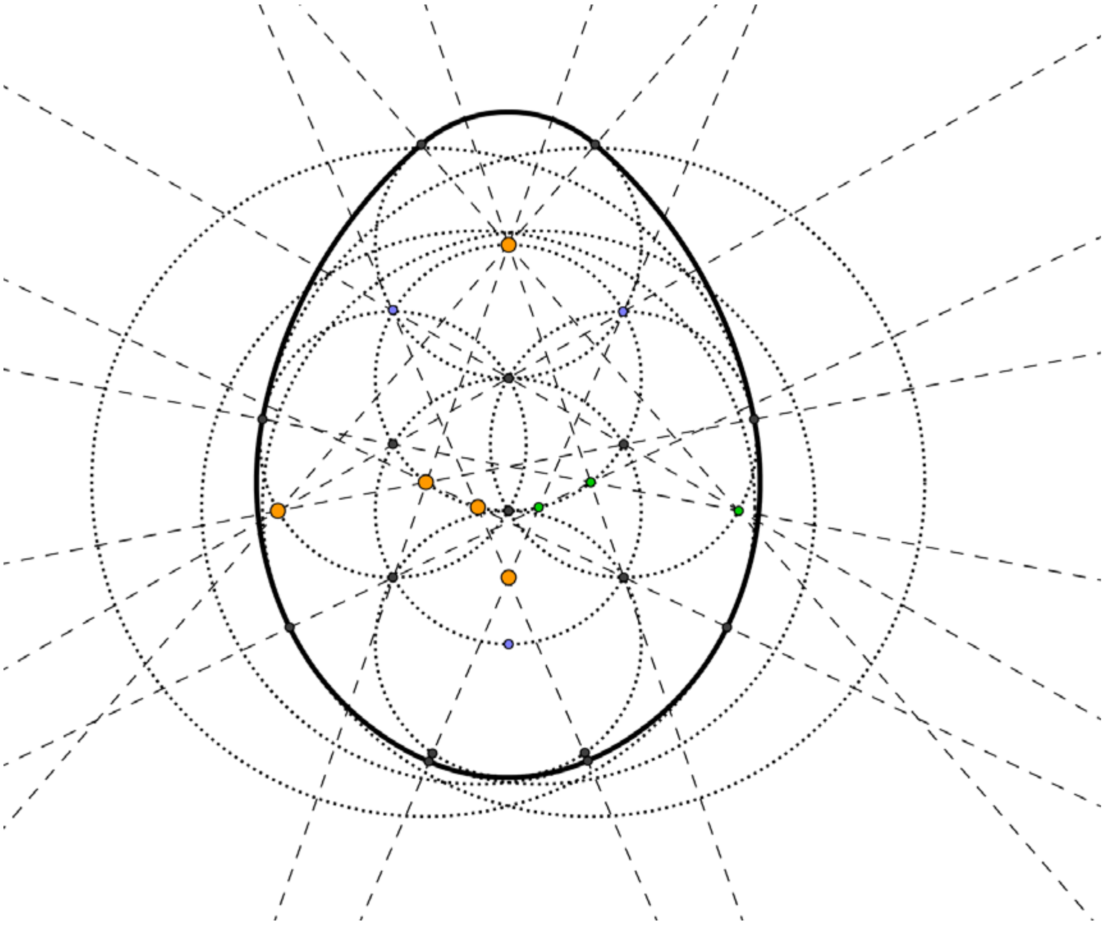


Abb. 16 Fünf-Punkt Ei

Die fünf orangen Punkte sind die fünf Punkte, die die Kreisbögen auf der rechten Seite des Eis definieren und die grünen Punkte werden benötigt um die linke Seite zu zeichnen. Wenn wir alle Kreise und Geraden verstecken, einige mit Segmenten ersetzen erhalten wir das folgende Bild, welches die fünf für die rechte Seite des Ei notwendigen Punkte zeigt.

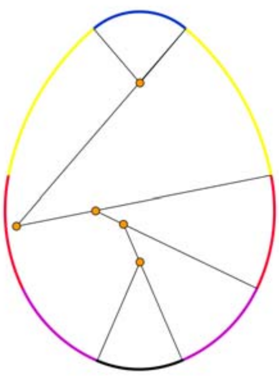


Abb. 17 Das Fünf-Punkt Ei

Aufgabe: Verwende GeoGebra oder eine andere dynamische Geometrie Software um ein Fünf-Punkt Ei zu konstruieren. Versuche die Punkte in verschiedene Richtungen zu ziehen um zu sehen wie sich die Form des Eis verändert. Beachte: Wenn das Ei richtig gezeichnet wurde, sollten alle Übergänge der Kreisbögen nach dem verschieben glatt bleiben.

Experimentieren

Die untere Hälfte des Fünf-Punkt Ei demonstriert eine Konstruktion die leicht fortgesetzt werden kann, das heißt wir können mehr Punkte auswählen und eine spiralförmige Figur kreieren:

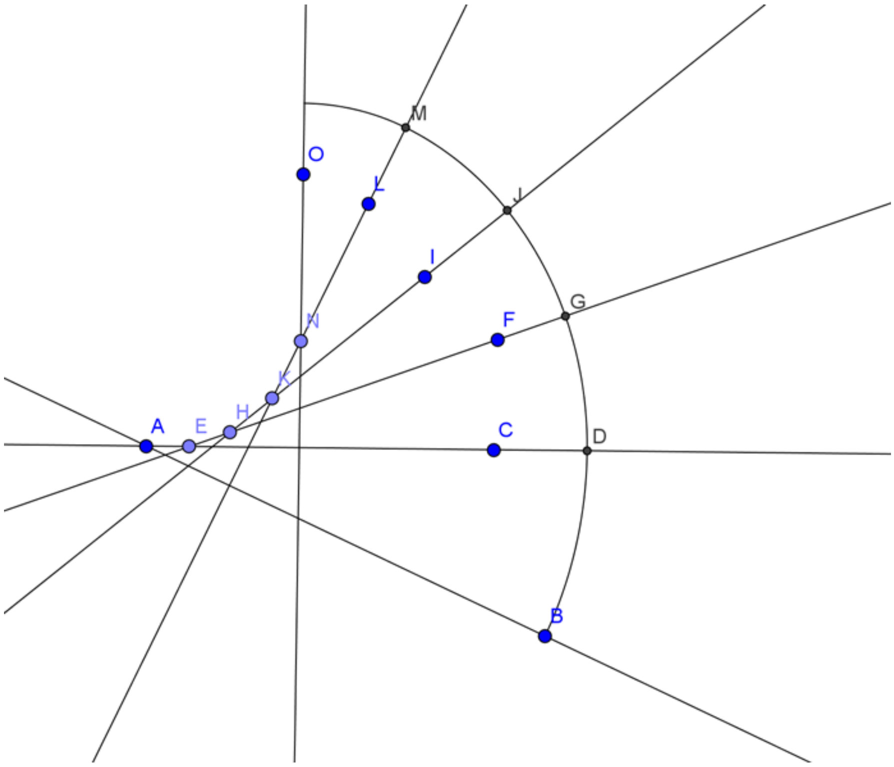


Abb.18 Eine Spirale

Das wurde nur mit dem Geraden Werkzeug, dem Kreisbogen Werkzeug und den zwei Punkte Werkzeug konstruiert. Wir können alle blauen Punkte ziehen um die Konstruktion zu verändern. Durch zeichnen von Segmenten und verstecken der Linien und Punkte erhalten wir das Bild unten:

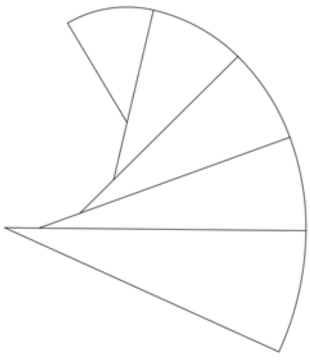


Abb. 19 Spirale ohne Linien und Beschriftungen

Aufgabe: Konstruiere die obige Spirale. Experimentiere mit Farben um ein schöneres Bild zu bekommen.

Aufgabe: Auf http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html gibt es Bilder von Thoms Eiern [3]. Konstruiere zwei Eier mithilfe von Kreisen, Bögen und Geraden.

Aufgabe: Suche nach „Golden Egg“ im Internet um ein Bild zu finden und es mit Hilfe von Kreisen, Bögen und Geraden zu konstruieren (auch in Dixons Buch [1] ist ein Bild zu finden).

Aufgabe: Experimentiere mit ähnlichen Konstruktionen und erstelle deine eigene.

Literatur

[1] Dixon, R. *Mathographics*. Basic Blackwell Limited, Oxford, England, 1987.

[2] GeoGebra, downloadable from http://www.geogebra.org.

[3] Weisstein, Eric W. "Thom's Eggs." Von *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ThomsEggs.html