Könnun 2 x 2 fylkja – fyrri hluti

Freyja Hreinsdóttir

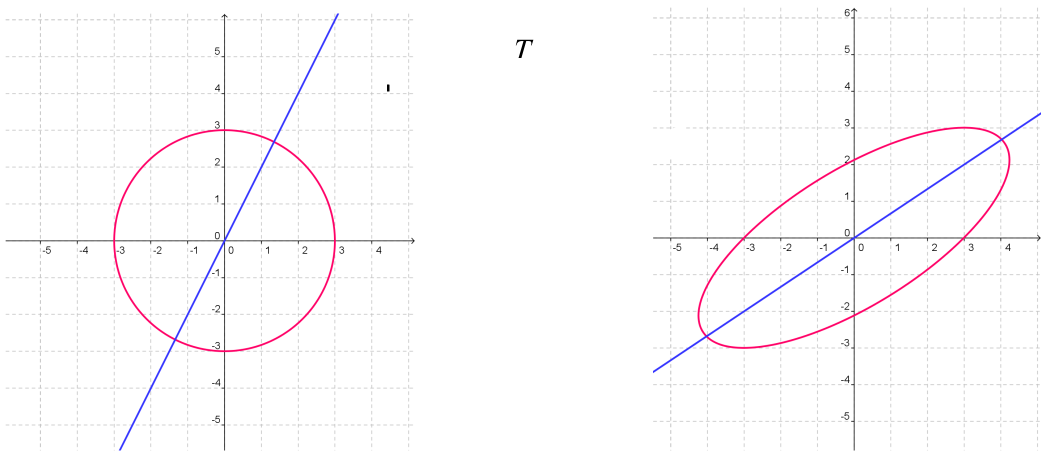
Háskóli Íslands

1 Inngangur

Í GeoGebra 4.0 er hægt að hafa tvö teikniborð opin samtímis í stað aðeins eins. Hægt er að notfæra sér þetta til að skoða varpanir frá planinu yfir í planið. Hér í fyrri hlutanum skoðum við nokkra slíka möguleika og áframhald er í seinni hlutanum *Könnun 2 x 2 fylkja – seinni hluti.* Í eldri útgáfum GeoGebru er notað orðið *Myndagluggi* í stað *Teikniborðs*.

2 Fræði

Þegar við skoðum fall *f* frá R yfir í R þá teiknum við oft graf þess annað hvort í höndunum eða með því að nota tölvuforrit. Graf fallsins er þá mengi allra punkta í planinu sem eru á forminu $(x, f(x))$. Ef við höfum fall $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ þyrftum við í rauninni fjórar víddir til að skoða svipað punktmengi þ.e.a.s. mengið $(x, y, T_1(x, y), T_2(x, y))$, þar sem T_1 gefur fyrra hnit myndarinnar og T_2 það síðara, svo þetta er ekki hægt. Hins vegar, ef við hugsum okkur að við séum með tvö afrit af planinu þá getum við skoðað myndir hluta í öðru planinu í hinu planinu.



Mynd 1 Vörpun $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Fall $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er vanalega kallað *vörpun* frá $\mathbb{R}^2$ yfir í $\mathbb{R}^2$. Sérstaklega áhugaverðar eru varpanir sem hafa eftirfarandi tvo eiginleika fyrir alla vigra *u* og *v* í $\mathbb{R}^2$og allar rauntölur *c*:

a) T(cu) = c T(u)

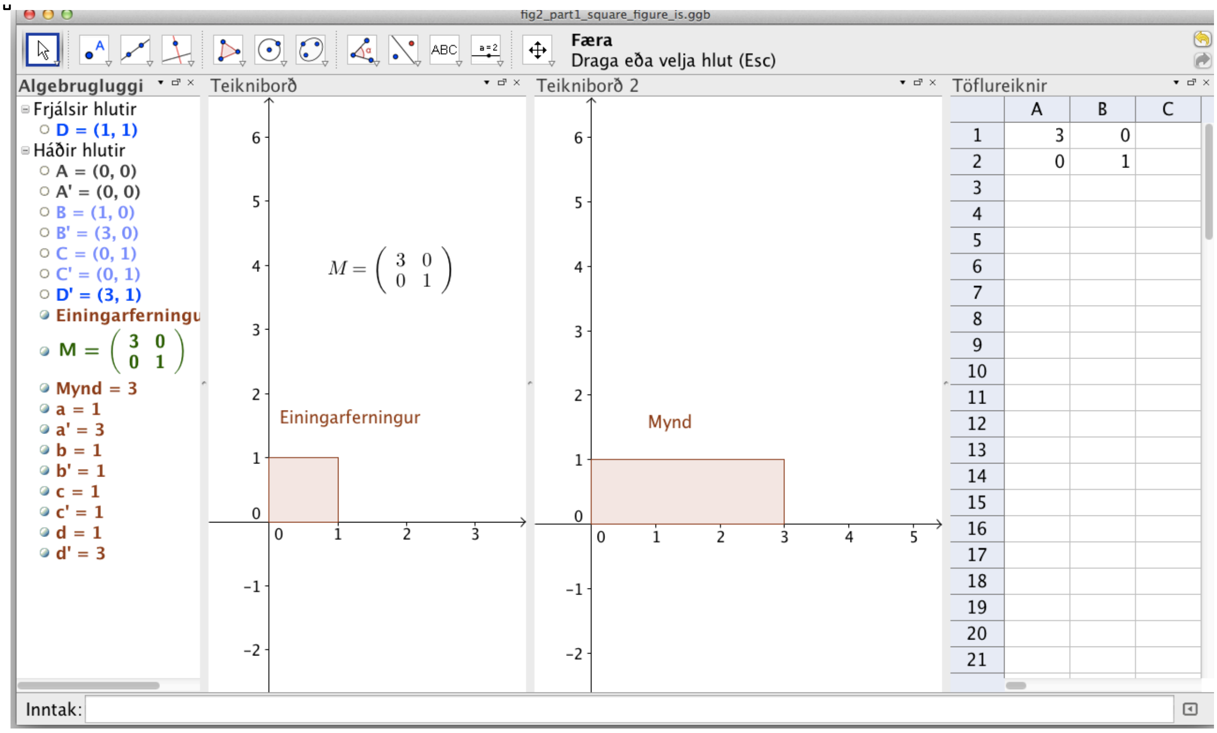
b) T(u + v) = T(u) + T(v)

Slík vörpun kallast *línuleg vörpun* og hefur þann eiginleika að hægt er að lýsa henni með fylki þ.e. til er fylki $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ þannig að $T(u) = Au$. Öfugt, þá höfum við fyrir sérhvert fylki skilgreinda línulega vörpun $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ svo þessi tvo atriði eru jafngild (sjá nánar í hvaða kennslubók, í línulegri algebru, sem er t.d. [1]).

Dæmi um línulegar varpanir eru stríkkanir/herpingar, útvíkkanir/þjappanir, speglanir, snúningar og skekkingar. Þær eru skoðaðar betur í kaflanum *Könnun á 2 x 2 fylkjum – seinni hluti.*

3 Notkun GeoGebra

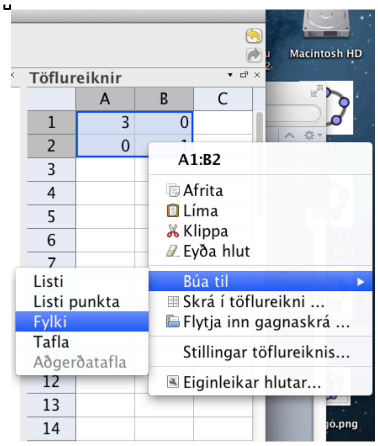
Hér fyrir neðan í skjámynd úr GeoGebra:



Mynd 2 Mynd einingarfernings undir línulegu vörpuninni sem fylkið M skilgreinir.

Teikniborð 2 og töflureiknir fást með því að velja þau undir *skoða*. Hér höfum við skilgreint einingarferninginn með því að nota marghyrningsverkfærið og endurskírt hann svo. Fylkið M var skilgreint með því að nota töflureikninn. Eftir að fylkið hefur verið skilgreint er skipunin *BeitaFylki* notuð til að fá mynd einingafernings undir vörpuninni sem M skilgreinir.

Fylkið er skilgreint með því að slá stök þess inn í töflureikninn, velja þau með músinni, hægrismella og velja *Búa til*. Þá opnast nýr listi og úr honum er valið *Fylki*.

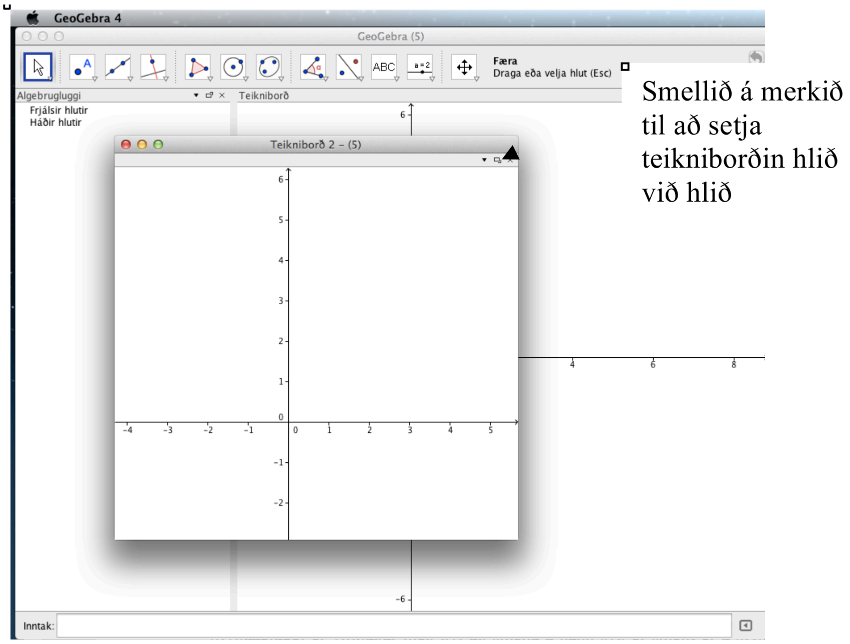


Mynd 3 Fylki búið til með því að nota töflureikni.

Önnur, líklega auðveldari, leið til að skilgreina fylki er að slá það beint inn í inntaksreit sem lista af listum, þ.e. slá inn $\{\{3,0\},\{0,1\}\}$.

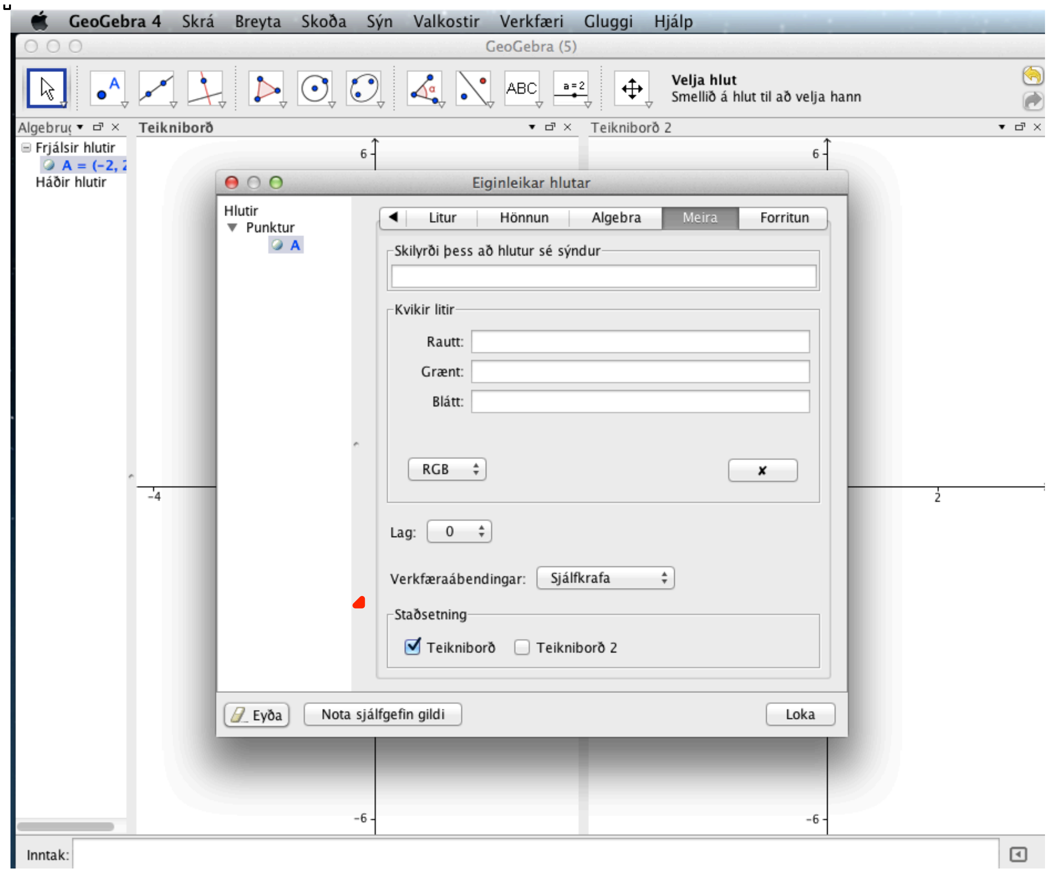
Verkefni: Búið til vinnublað eins og hér fyrir ofan. Prófið að breyta skilgreiningu fylkisins í töflureikninum.

Athugið: eftir að *Teikniborð 2* hefur verið valið undir *Skoða* þá opnast það fyrir framan teikniborðið sem fyrir er.



Mynd 4 Teikniborð 2.

Teikniborðið er virkjað með því að smella á það svo ef smellt er á *Teikniborð 1* og því næst gefin skipun í inntaksreit þá birtist mynd af niðurstöðu á teikniborði 1. Ef mynd lendir óvart á öðru teikniborði en ætlað var þá má breyta þessu undir flipanum *Meira* í eiginleikum hlutar (fæst með því að hægri smella á hlut) svo það er auðvelt að gera leiðréttingar og flytja hluti milli teikniborða eftir á.



Mynd 5 Hlutir fluttir milli teikniborða.

4 Samlagningar-og einsleitnieiginleikar línulegra varpanna

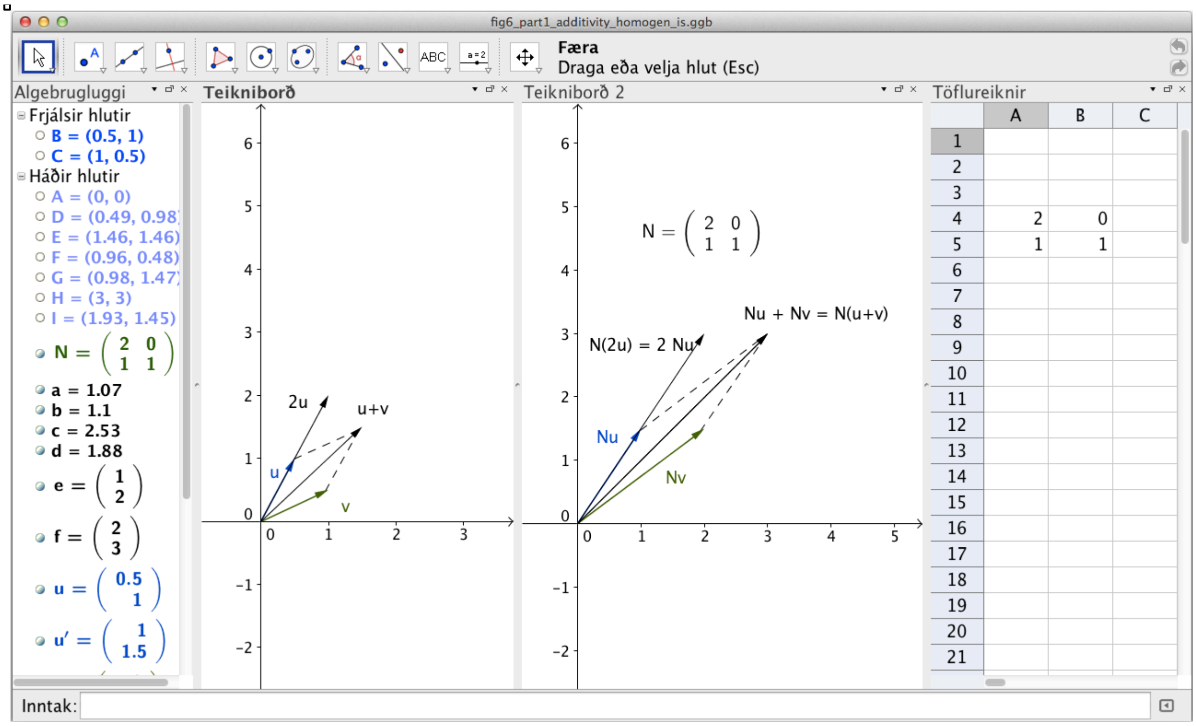
Fyrir sérhverja línulega vörpun T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ höfum við eftirfarandi eiginleika:

a) $T(cu) = c\,T(u)$

b) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

fyrir alla vigra u og v í $\mathbb{R}^2$ og allar rauntölur c.

Þessa eiginleika er auðvelt að skoða með því að nota teikniborðin tvö í GeoGebru:



Mynd 6 Samlagningar-og einsleitnieiginleikar sýndir

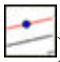
5 Línulegar varpanir og línur

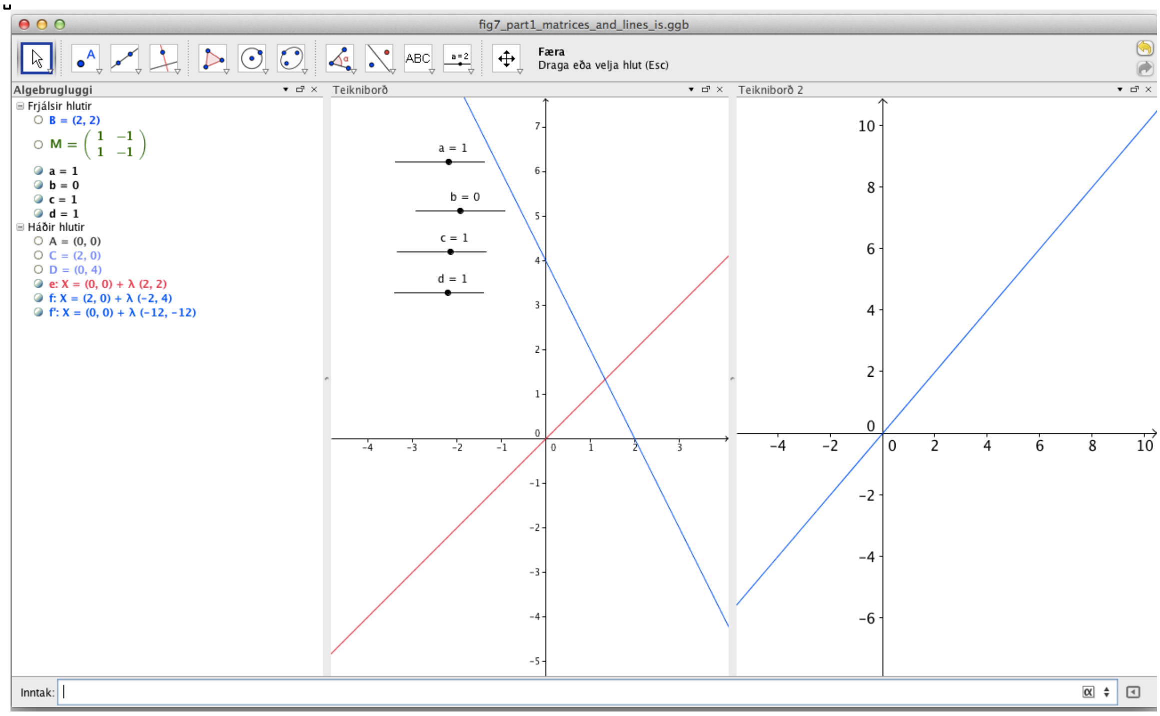
Við skoðum nú áhrif línulegra varpana á línur. Þar sem við viljum geta breytt skilgreiningu fylkisins, sem við notum, þá skilgreinum við það með því að nota rennistikur *a, b, c* og *d*. Þetta er gert með því að velja verkfærið og smella á teikniborðið. Þegar rennistikurnar hafa verið skilgreindar þá skilgreinum við fylkið í inntaksreit með $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$. Þá verður til fylki með nafnið *fylki1* en með því að hægrismella á það í algebruglugga getum við endurskírt það *M*. Við opnum *Teikniborð 2* með því að velja það undir *Skoða*.

Skilgreinum nú línu *e* gegnum punktana (0,0) og (1,1) með því að nota línuverkfærið . Setjum gildi rennistikanna $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, smellum á hreyfiverkfærið og því næst á *Teikniborð 2* til að virkja það. Ef við sláum nú inn í inntaksreit *BeitaFylki[M, e]* þá fáum við mynd af línunni *e* undir vörpuninni sem *M* lýsir á teikniborði 2. Þar sem *M* er hlutlausa fylkið fáum við að sjálfsögðu sömu línu og áður.

Verkefni: Búið til GeoGebruvinnublað eins og lýst er hér fyrir ofan. Gerið tilraunir með að breyta gildum á *a, b, c* og *d* og kannið áhrif þess á mynd línunnar. Prófið sér í lagi að setja *a = 1, b =-1, c = 1* og *d = -1*. Hvaða mynd fáum við í þessu tilviki af línunni?

Skilgreinið nú nýja línu *f*, gegnum punktana (2,0) og (0,4) og beitið fylkinni á hana. Gerið tilraunir með gildi *a, b, c* og *d* eins og áður. Fyrir hvaða gildi á þessum stikum verður línan *Mf* óskilgreind?

Verkefni: Fyrir sömu aðstæður og hér fyrir ofan, skilgreinið tvær línur sem eru samsíða línunni *e* (þetta má auðveldlega gera með því að nota verkfæri fyrir samsíða línur ) og beitið fylkinu á þær. Eftir hverju takið þið varðandi myndir þessara lína?



Mynd 7 Jöfnur línanna sem sjást í *Algebruglugganum* eru hér á *stikaformi*. Hægt er að breyta því á hvaða formi þær eru sýndar með því að hægrismella á jöfnuna og velja mismunandi form.

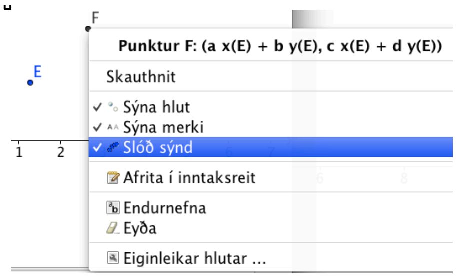
6 Önnur leið til að skoða línulegar varpanir

Hægt er að nota aðra leið til að skoða áhrif línulegra varpanna á línur (eða aðra hluti). Ef við skoðum línulegu vörpunina *T* sem gefin er með fylkinu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ þá má skrifa hana sem

$$T_1(x, y) = ax + by$$

$$T_2(x, y) = cx + dy.$$

Í vinnublaðinu okkar hér á undan eyðum við myndum línanna af teikniborði 2 en höldum sömu línum á teikniborði 1. Við notum punktaverkfærið til að búa til punkt *E* á línunni *e* og smellum á teikniborð 2 til að virkja það. Skrifum í inntaksreit *(a*x(E)+b*y(E), c*x(E)+d*y(E))*. Þá verður til punktur *F* (á teikniborði 2) sem er mynd *E* undir vörpuninni sem *M* skilgreinir. Notum nú hreyfiverkfærið til að hreyfa punktinn *E* eftir línunni *e* og sjáum þá punktinn *F* hreyfast á teikniborði 2. Til að sjá mynd *F* betur hægrismellum við á punktinn *F* og veljum *Slóð sýnd*. Þegar við hreyfum svo punktinn *E* eftir línunni *e* þá myndar punkturinn *F* slóð sem er lína á teikniborði 2.



Mynd 8 Hægrismellið á hlut og veljið *Slóð sýnd*. Ef hlutur er hreyfður skilur hann eftir slóð á teikniborðinu. Til að hreinsa slóðina notum við  *Nýglæða myndaglugga* undir *Skoða*.

Verkefni: Endurtakið það sem gert var hér fyrir ofan fyrir nokkur mismunandi gildi á *a, b, c* og *d*.

7 Ólínulegar varpanir

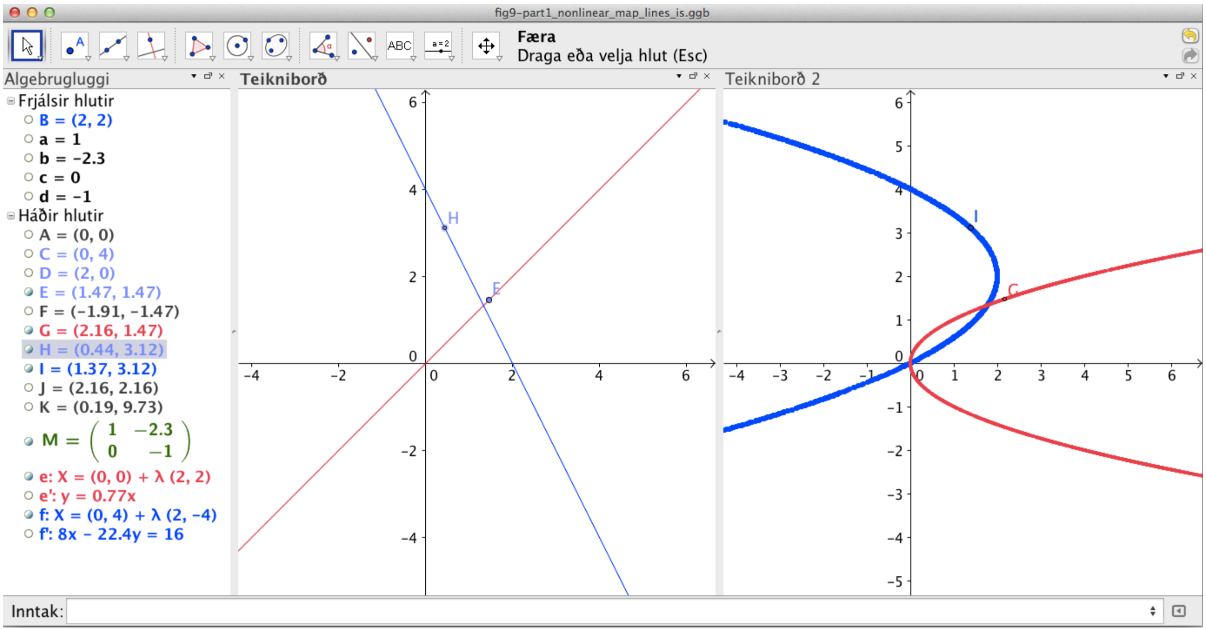
Aðferðina hér fyrir ofan má nota á fleiri varpanir en línulegar. Skoðum t.d. vörpunina U sem er gefin með

$$(x, y) \to (x \cdot y, y).$$

Við höldum áfram með vinnublaðið hér á undan og punktinn E á línunni e. Við fáum $G = U(E)$ með því að skrifa í inntaksreitinn

$$(x(E) * y(E), y(E)).$$

Ef við veljum að sýna slóð G og hreyfum punktinn E eftir línunni e þá kemur $U(e)$ fram sem slóð G á teikniborði 2.



Mynd 9 Mynd línanna undir ólínulegu vörpuninni $(x, y) \to (x \cdot y, y)$.

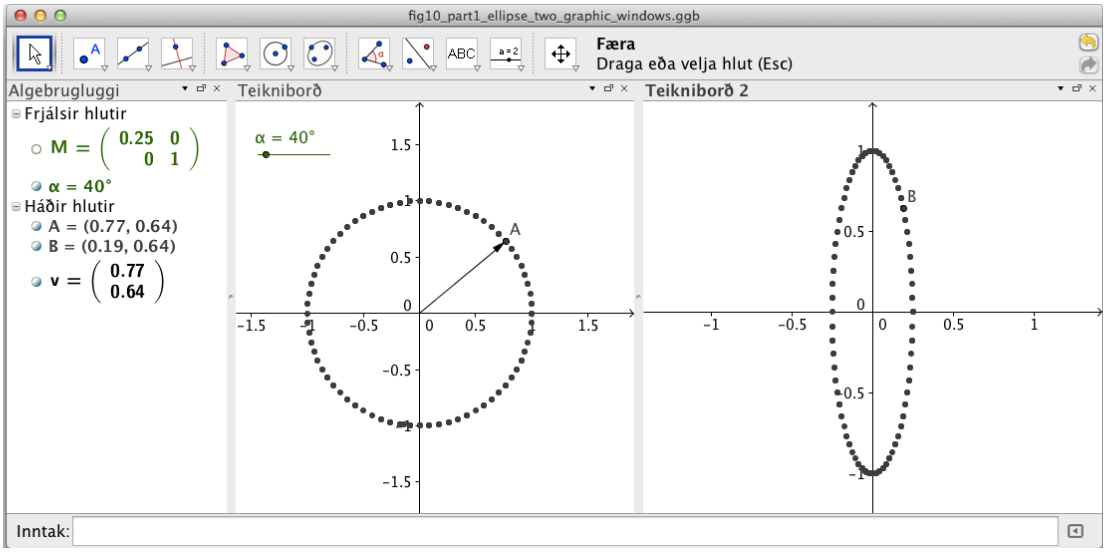
Á myndinni sjáum við tvo ferla sem virðast vera fleygbogar þar sem x er annars stigs fall af y. Línan f hefur jöfnuna $y = -2x + 4$ eða $x = \frac{4-y}{2}$ og $U\left(\left(\frac{4-y}{2}, y\right)\right) = \left(\frac{4-y}{2} \cdot y, y\right)$ svo mynd línunnar má lýsa með $x = \frac{4-y}{2} \cdot y$ sem er jafna lárétts fleygboga.

Verkefni: Kannið myndir línanna tveggja undir vörpun sem gefin er með $(x, y) \to (x^2, y^2)$. Eru myndir línanna svipaðar? Hver er munurinn og hvers vegna fæst hann?

Búið til ykkar eigin varpanir og skoðið myndir línanna undir þeim.

8 Fylki og hringir

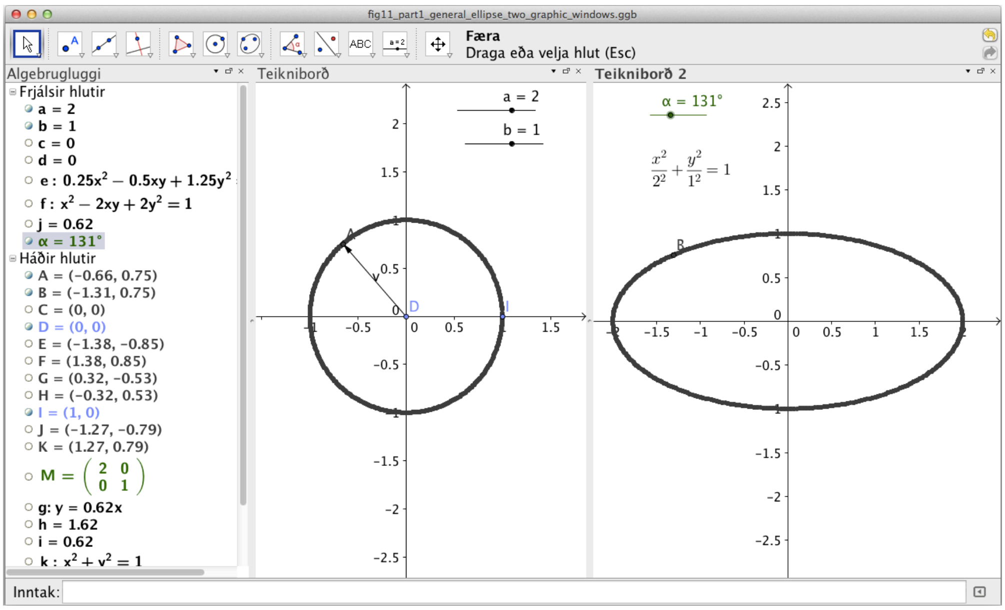
Við skoðum nú virkni hornalínufylkis á hring þ.e.a.s. hvernig punktur á hring gefur slóð sem er sporbaugur þegar á hann er beitt vörpun sem lýst er með hornalínufylki.



Mynd 10 Hringur gefinn sem slóð á teikniborði 1 og mynd hans sem slóð á teikniborði 2.

Skilgreinið rennistiku α, vigur $v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ og fylki $M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Smellið á myndaglugga 2 til að virkja hann og skrifið M*v í inntaksreitinn. Skilgreinið punkta A og B sem endapunkta vigranna v og M*v, hægrismellið á þá og veljið *Slóð sýnd*. Hreyfið nú rennistikuna α. Punkturinn A gefur slóð sem er hringur á teikniborði 1 og punkturinn B gefur slóð sem er sporbaugur á teikniborði 2.

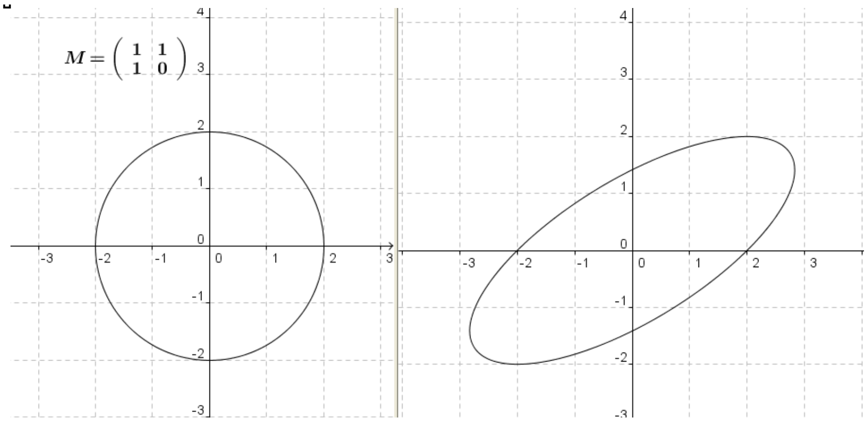
Við getum skoðað þetta fyrir almennt hornalínufylki með því að skilgreina tvær rennistikur a og b og skilgreina fylkið $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Fyrir sérhver gildi á a og b gefur punkturinn B slóð sem er sporbaugurinn $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ þegar rennistikan α tekur gildi frá 0 upp í 360. Þetta má prófa með því að skilgreina sporbauginn í inntaksreit og sjá til þess að hann lendi á teikniborði 2.



Mynd 11 Mynd hrings undir vörpun sem gefin er með hornalínufylki

Verkefni: Kannið hver mynd einingarhringsins verður ef þið skoðið almennt fylki í stað hornalínu–fylkis. Skilgreinið tvær nýjar rennistikur c og d og skoðið notið fylkið $M = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$.

Það er líka mögulegt að skilgreina hring c og nota skipunina *BeitaFylki[M,c]* til að fá sporbauginn á teikniborð 2.

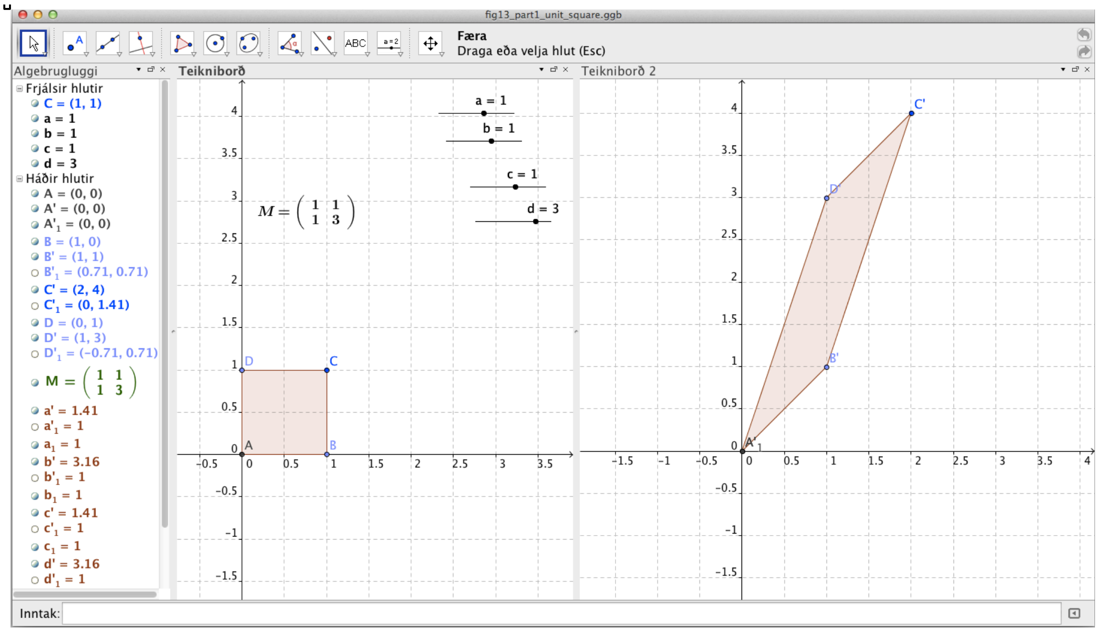


Mynd12 Sporbaugur sem mynd línulegrar vörpunnar

GeoGebra gefur jöfnu sporbaugsins og við getum notað skipunina *Brennipunktur* til að fá brenni–punktana. Ef við viljum reikna jöfnurnar í höndunum þá gerum við eftirfarandi: ef við notum u og v fyrir hnitin á teikniborði 2 þá höfum við fyrir fylkið M á mynd 12 að $u = x + y$ og $v = x$. Við skrifum svo x og y sem föll af u og v. Síðari jafnan gefur beint að $x = v$ og $u = x + y$ gefur $y = u - x = u - v$. Jafna hringsins er $x^2 + y^2 = 4$ sem gefur $v^2 + (u - v)^2 = 4$ þ.e. $u^2 - 2uv + 2v^2 = 4$. Það má auðveldlega sannreyna þetta með því að slá síðustu jöfnuna inn í inntaksreit.

9 Flatarmál myndar einingarfernings

Við skoðum hér flatarmál myndar af einingarferningi undir línulegri vörpun. Við byrjum á að búa til vinnublað með bæði teikniborð opin, skilgreinum fjórar rennistikur a, b, c og d og fylkið $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Við notum þ ví næst marghyrningaverkfærið til að búa til einingarferning með hornpunktana $(0,0), (1,0), (1,1)$ og $(0,1)$ á teikniborði 1. Notum svo skipunina *BeitaFylki* til að fá mynd ferningsins undir vörpuninni sem M skilgreinir.



Mynd 13 Mynd einingarfernings undir vörpuninni sem M skilgreinir.

Við gerum tilraunir með fylkið fyrir ofan og könnum flatarmál myndarinnar. Þetta er auðveldara ef við látum stighækkun allra rennistika vera 1.

Verkefni: Búið til vinnublaðið sem lýst er fyrir ofan og setjið gildi $a = 1, b = 0, c = 0$ og $d = 1$. Hvernig lítur mynd einingarferningsins út í þessu tilfelli og hvert er flatarmál hennar? Breytið nú gildi b í 1. Hvert er flatarmál myndarinnar? Það er auðveldast hér að nota flatarmálsverkfærið í GeoGebru.

Verkefni: Í þessu verkefni setjum við fram tilgátu að formúlu fyrir flatarmáli myndar einingarferningsins undir vörpuninni sem gefin er með *M*. Við höldum áfram könnunum á flatarmálinu með því að breyta gildi rennistikanna og skrá gildi flatarmálsins í hverju tilviki:

a) Haldið $a = 1, c = 0, d = 1$, og breytið gildinu á b þannig að $b = -1$, $b = 2, b = 3$ osfrv. Hvaða áhrif hefur gildi *b* á flatarmál myndarinnar?

b) Setjið $a = 2, a = 3$ osfrv. og haldið hinum gildunum föstum. Hvernig hefur gildi *a* áhrif á flatarmálið? Hvað gerist með flatarmálið ef *a* er neikvæð tala?

c) Gerið nú eins fyrir d og aðhugið að lokum flatarmálið fyrir $a = 2$, $d = 2$ og $a = 2$, $d = 3$.

d) Hugsanlega eruð þið núna komin með einhverja tillögu að formúlu fyrir flatarmálið ef gefið er að $c = 0$. Látið nú *a, b* og *d* fá gildið 1 og kannið hvert flatarmálið er fyrir eftirfarandi gildi á *c:* $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

e) Skrifið niður formúlu (í *a, b, c* og *d*) fyrir flatarmáli myndarinnar og prófið hana fyrir nokkur mismunandi gildi á þessum stikum. Þar sem flatarmál er alltaf jákvætt verðið þið að nota tölugildi í formúlunni.

10 Ákveður og andhverfur

Í kaflanum hér á undan hafið þið vonandi komist að þeirri niðurstöðu að flatarmál myndarinnar sé $|ad - bc|$. Þetta er tölugildið af *ákveðunni* af fylkinu *M*, skilgreint sem *det M =ad – bc*.

Verkefni: Notið vinnublað úr fyrri kafla og finnið gildi á *a, b, c* og *d* (ekki öll 0) þannig að ákveðan sé 0. Hvernig lítur myndin út í þessu tilviki?

Verkefni: Haldið áfram með vinnublaðið hér á undan og setjið a = 0, b = 1, c = 1 and d = 0.

a) Hvernig lítur myndin af einingarferningnum út núna? Hvað er *det M =ad – bc*?

b) Til að skoða myndina betur látið þá GeoGebru sýna nöfn hornpunkta einingarferningsins (þetta er gert með því að hægrismella á hvern punkt og velja ‘Sýna merki’). Gerið það sama fyrir mynd einingarferningsins. Hornpunktur með nafnið *A* í einingarferningnum varpast á punkt með nafnið *A’* á teikniborði 2. Hver er virkni fylkisins *M*?

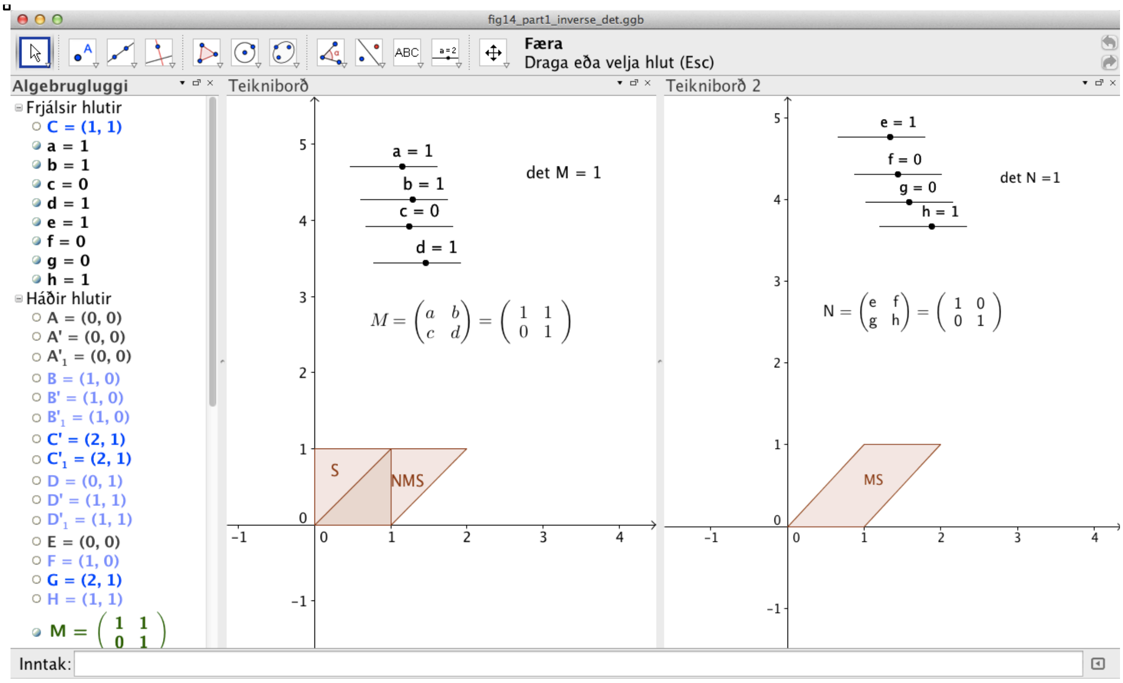
c) Gerið nú það sama fyrir nokkur önnur fylki, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ and $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Reiknið einnig ákveður fylkjanna.

d) Setjið fram tilgátu um merkingu neikvæðrar ákveðu.

Fyrir fall *f* frá ℝ yfir í ℝ er andhverfa stundum skilgreind, t.d. ef $f(x) = 3x - 1$ þá höfum við andhverfuna $g(x) = \frac{x+1}{3}$ því $f(g(x)) = x$ og $g(f(x)) = x$. Sama gildir um varpanir $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, stundum er andhverfa til og andhverfur línulegra varpanna eru sérlega einfaldar því þær eru einnig línulegar varpanir og því hægt að gefa þær með fylkjum. Ef línuleg vörpun *T*, gefin með fylki *M*, hefur andhverfu *W* sem gefin er með fylki *N* þá er margfeldi *M* og *N* hlutlausa fylkið $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Við segjum í þessu tilfelli að fylkin séu andhverfur hvors annars.

Á myndinn hér á eftir höfum við beitt fylkinu M á einingarferninginn S og fengið marghyrning MS á teikniborði 2. Við höfum því næst beitt fylkinu N á MS og fengið marghyrninginn NMS á teikniborði 1. Hér eru NMS og MS eins því $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hlutlausa fylkið.



Mynd 14 Margfeldi fylkja

Nauðsynlegt skilyrði þess að fylki N sé andhverfa M er að NMS falli saman við S. Þetta er hins vegar ekki nægjanlegt skilyrði því annað hvort fylkið gæti falið í sér speglun (samanber fyrra verkefni).

Verkefni: Búið til vinnublaðið fyrir ofan. Látið stighækkun á öllum rennistikunum vera 0.5 og finnið gildi á rennistikunum *e, f, g* og *h* þannig að *NMS* falli saman við *S*. Reiknið ákveður fylkjanna og margfeldi ákveðanna.

Verkefni: Setjið fram tilgátu um andhverfu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Verkefni: Breytið gildum *M* þannig að $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ og $d = 1$. Finnið gildi á *e, f, g* og *h* þannig að *NMS* falli saman við *M*. Stendur fyrri tilgáta ykkar um andhverfu? Reiknið ákveður fylkjanna og margfeldi þeirra.

Verkefni: Setjið fram tilgátu um sambandið milli ákveða fylkjanna tveggja. Prófið tilgátuna með því að breyta gildum *a, b, c* og *d* og finna andhverfuna fyrir nýja fylkið.

Verkefni: Setjið fram nýja tilgátu um andhverfu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Prófið tilgátuna með því að margfalda með M. Svarið ætti að vera $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ þ.e. hlutlausa fylkið sem varpar einingarferningnum í einingarferninginn.

Verkefni: Breytið nú gildum *M* þannig að a = 1, b = 1, c = 3 og d = 1. Finnið gildi á *e, f, g* og *h* þannig að *NMS* falli saman við *S*. Kannið hvort *NM* = *I*. Þurfið þið að endurskoða tilgátu ykkar um andhverfuna?

Heimildir

[1] Anton, H. and Busby, R. *Contemporary Linear Algebra.* NJ, USA: John Wiley and Sons Inc.

[2] GeoGebra, niðurhal á http://www.geogebra.org.