Föll skilgreind á bilum

Freyja Hreinsdóttir

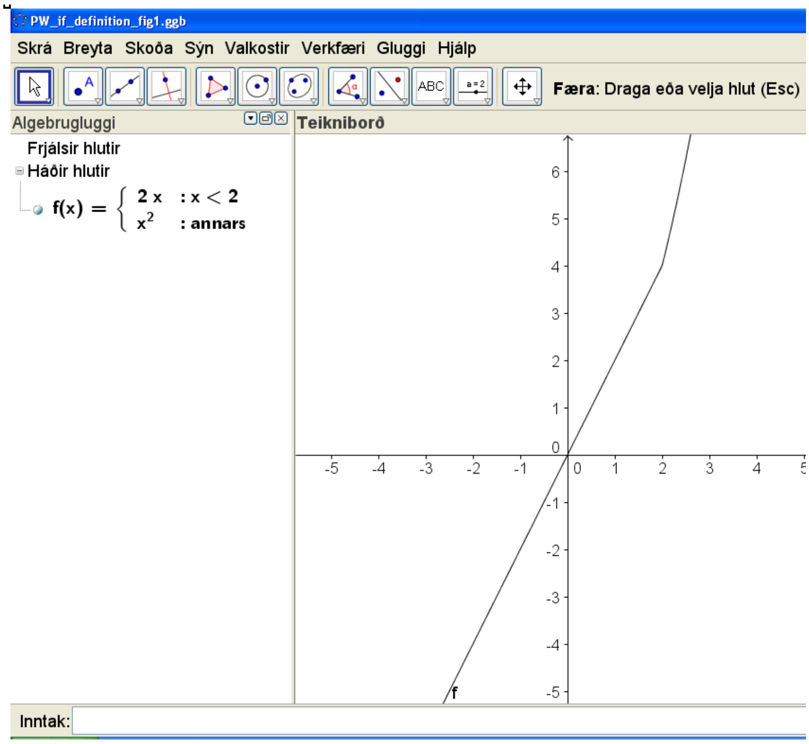
Háskóli Íslands

1 Inngangur

Í hagnýtum verkefnum koma oft upp föll sem skilgreind eru á bilum (t.d föll sem lýsa póstburðargjaldi). Slík föll eru líka oft notuð sem sýnidæmi þegar verið er að útskýra markgildi og ósamfelldni. Með því að nota kvik rúmfræðiforrit eins og t.d. GeoGebru er mögulegt að skoða slík föll vel og hægt er að nota rennistikur til að kanna hvernig breyta má skilgreiningum þeirra til að skapa samfelld föll, diffranleg föll osfrv.

2 Skilgreining falla á bilum í GeoGebru

Í GeoGebru eru tvær leiðir til að skilgreina föll á bilum; með því að nota skipunina *Fall* eða með því að nota skipunina *Ef*.



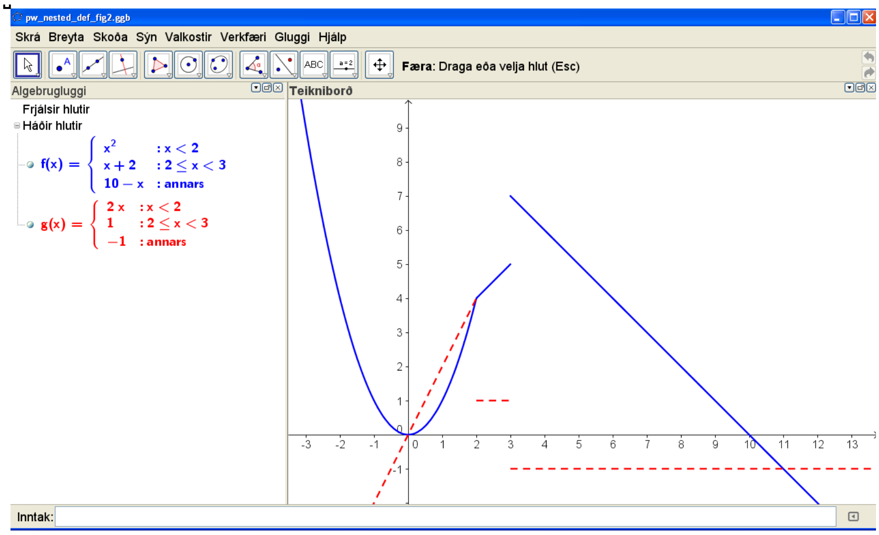
Mynd 1 Til að skilgreina fallið á myndinni skrifum við *Ef[x < 2, 2x, x^2]* í inntaksreitinn.

Það er líka hægt að skrifa *Fall[2x,-∞,2]* og *Fall[x^2,2,∞]* til að fá sama graf en þá eru tvö föll skil–greind í stað eins. *Ef* skipunin hefur þann kost að hægt er að reikna t.d. afleiðu fallsins beint.

Ef við höfum þrjú bil er hægt að nota *Ef* skipun inni í *Ef* skipun t.d. gefur

Ef[x < 2, x², Ef[x < 3, x + 2, 10 - x]]

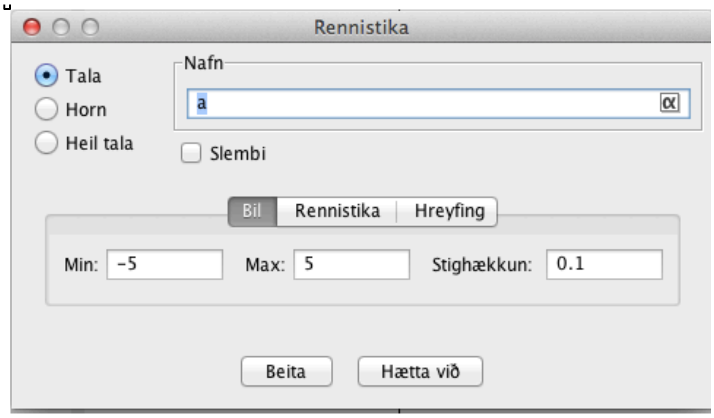
myndina hér fyrir neðan:



Mynd 2 Fallið $f(x)$ er skilgreint á þremur bilum. Afleiða þess, $g(x)$ er sýnd með rauðu. Afleiðan er óskilgreind í $x = 2$ og í $x = 3$.

3 Rennistikur

Með því að nota GeoGebru er mjög auðvelt að kanna áhrif þess að breyta gildi stika sem koma fyrir í skilgreiningu falls. Slíkur stiki er skilgreindur með því að velja rennistikuverkfærið og smella á *myndaglugga.* Þegar það er gert opnast lítill gluggi:



Mynd 3 Í þessum glugga má stilla ýmislegt svo sem lengd bils, stighækkun ofl.

Eftir að rennistika *b* hefur verið skilgreind er hægt að nota hana í skilgreiningu falls t.d. $f(x) = x^2 + b$, og hægt er að breyta gildi hennar með músinni.

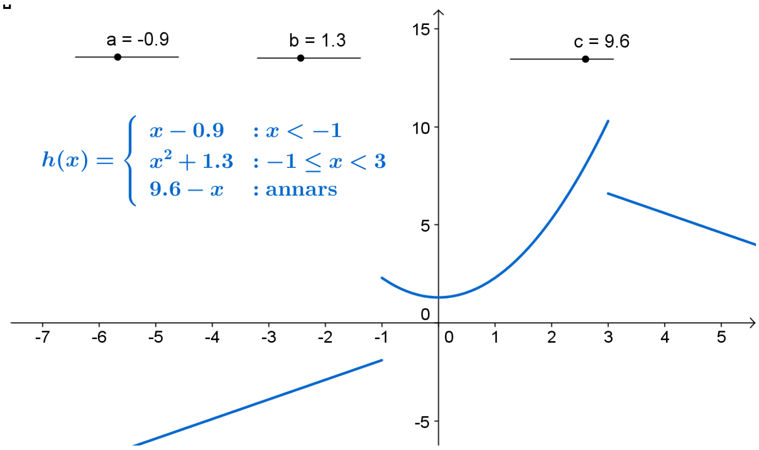
4 Rennistikur notaðar til að skilgreina samfelld föll á bilum

Við skoðum eftirfarandi viðfangsefni: ákvarðið gildi stikanna a, b og c þannig að fallið

$$h(x) = \begin{cases} x - a & \text{ef } x < -1 \\ x^2 + b & \text{ef } -1 \leq x \leq 3 \\ c - x & \text{annars} \end{cases}$$

sé samfellt.

Við leysum þetta með því að skilgreina þrjár rennistikur *a, b, c* og notum tvöfalda *Ef* skipun til að skilgreina $h(x)$. Gildi þessara rennistika má síðan auðveldlega breyta með músinni þannig að fallið verði samfellt.



Mynd 4 Við breytum skilgreiningu fallsins með því að breyta gildi rennistikanna.

Þegar við breytum gildi rennistikanna flytjast gröfin upp eða niður svo það er mjög auðvelt að finna gildi þannig að fallið sé samfellt.

Verkefni: Skilgreinið fallið hér fyrir ofan í GeoGebru og finnið gildi rennistika sem gera það samfellt. Eru til fleiri en ein lausn? Leysið verkefnið einnig á algebrulegan hátt.

Viðfangsefnið verður flóknara ef stikarnir stjórna ekki aðeins staðsetningu heldur einnig lögun grafanna.

Verkefni: Skilgreinið fallið

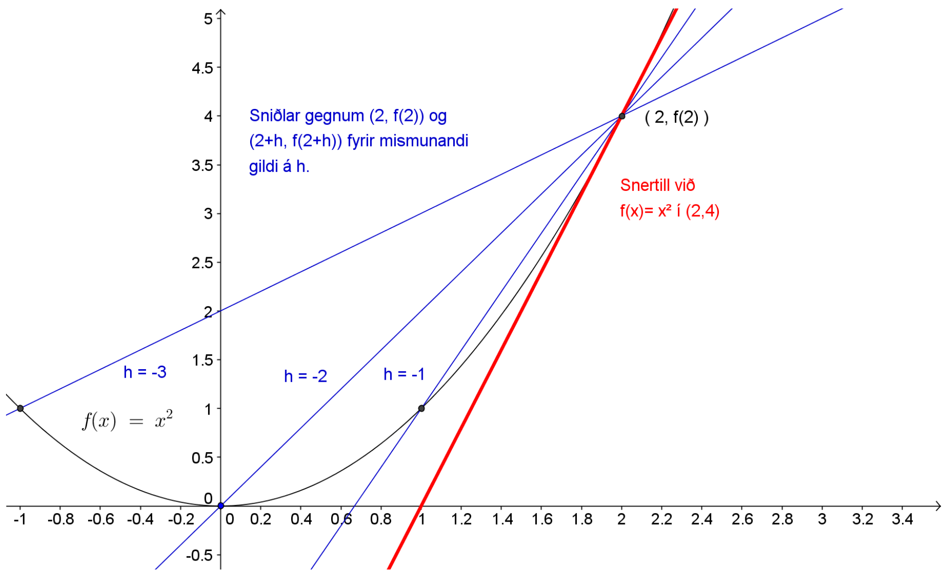
$$g(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{ef } x < \ -1 \\ ax^2 + \ b & \text{ef } -1 \ \leq x \ \leq 3 \\ 10 - x & \text{annars} \end{cases}$$

í GeoGebru og finnið gildi á *a* og *b* þannig að fallið sé samfellt. Leysið viðfangsefnið einnig algebrulega.

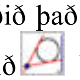
5 Diffranleg föll

Í viðfangsefnum líkt og hér fyrir ofan er mjög áberandi að stundum fáum við horn eða brot í fallið þar sem bilin mætast. Þetta er vegna þess að þrátt fyrir að fallið sé samfellt þá er það ekki *diffranlegt*.

Afleiða fallsins *f(x)* í $x = a$ er skilgreind sem markgildi kvótans $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ þegar h stefnir á 0 og fallið er diffranlegt í $x = a$ ef markgildið er til. Þetta markgildi er hallatala snertilínu við graf *f(x)* í punktinum $(a, f(a))$. Nauðsynlegt skilyrði þess að markgildið sé til er að það sé það sama hvort sem við nálgumst x – gildið a frá hægri eða frá vinstri. Við getum hugsað um markgildið sem hallatölur sniðla gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a + h, f(a + h))$ sem nálgast snertilínuna þegar h fer stefnir á 0. Þegar brot er í fallinu þýðir það að markgildin eru til frá vinstri og frá hægri en þau eru ekki jöfn.

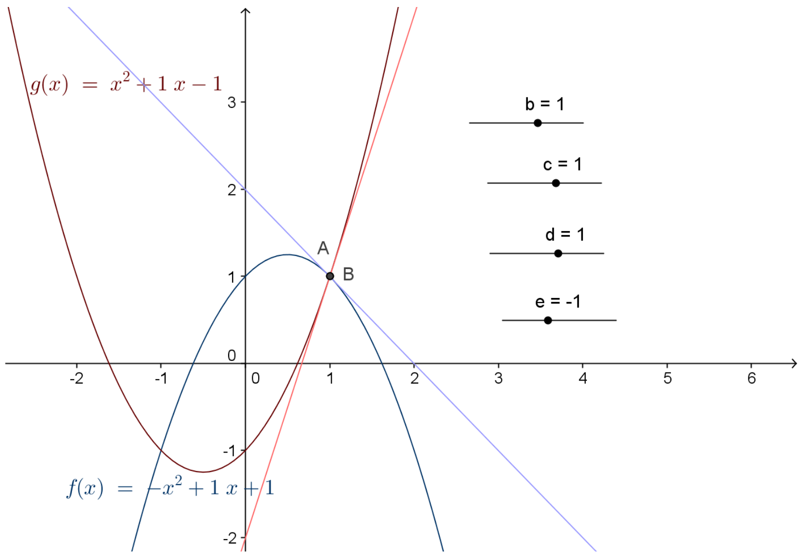


Mynd 5 Sniðlar sem nálgast snertil í ákveðnum punkti

Verkefni: Skoðið það sem lýst var hér fyrir ofan með því að skilgreina snertil við *f(x)* í $x = 2$ (notið snertlaverkfærið ), skilgreinið rennistiku h og línu gegnum punktana $(2+h, f(2+h))$ og $(2, f(2))$. Notið því næst músina til að breyta gildum á h og fylgist með sniðlinum nálgast snertilinn.

Hér fyrir neðan lýsum við hvernig hægt er að tengja tvö diffranleg föll til að fá fall, skilgreint á bilum, sem er bæði samfellt og diffranlegt í punktinum þar sem bilin mætast.

Opnum GeoGebru vinnublað og skilgreinum fjórar rennistikur *b*, *c*, *d* og *e*. Skilgreinum tvö annars-stigs föll $f(x) = -x^2 + bx + c$ og $g(x) = x^2 + dx + e$ og finnum gildi á stikunum þannig að $\big(1, f(1)\big) = \big(1, g(1)\big)$. Þetta tryggir að gröf fallana skerast í þessum punkti. Notum nú snertlaverkfæri til að fá snertla við bæði föllin þar sem þau skerast.

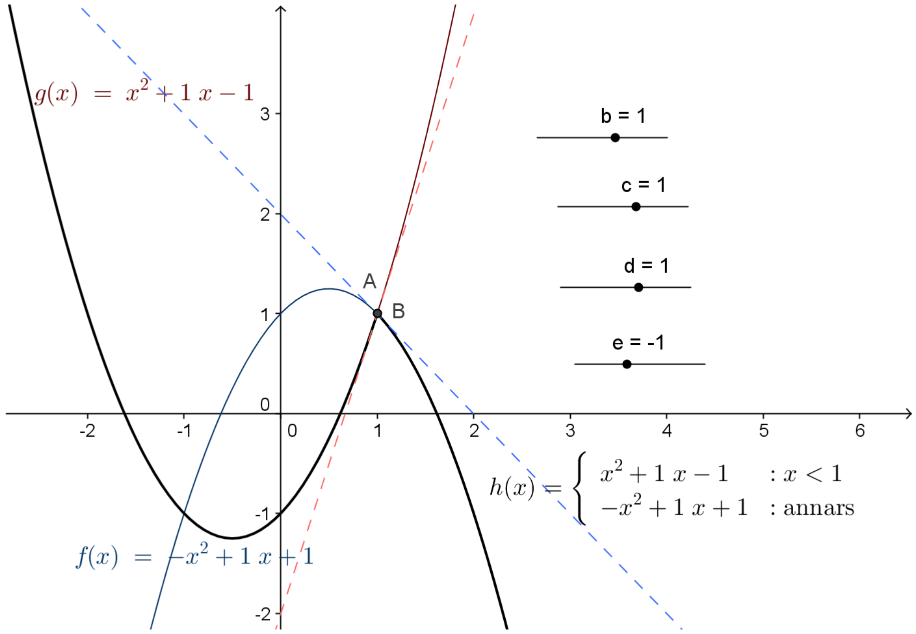


Mynd 6 Gröf fallanna skerast í $x = 1$ en snertlarnir eru ekki eins.

Ef við skilgreinum nú fall $h(x)$ á bilum þannig að

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ef } x \leq 1 \\ g(x) & \text{annars} \end{cases}$$

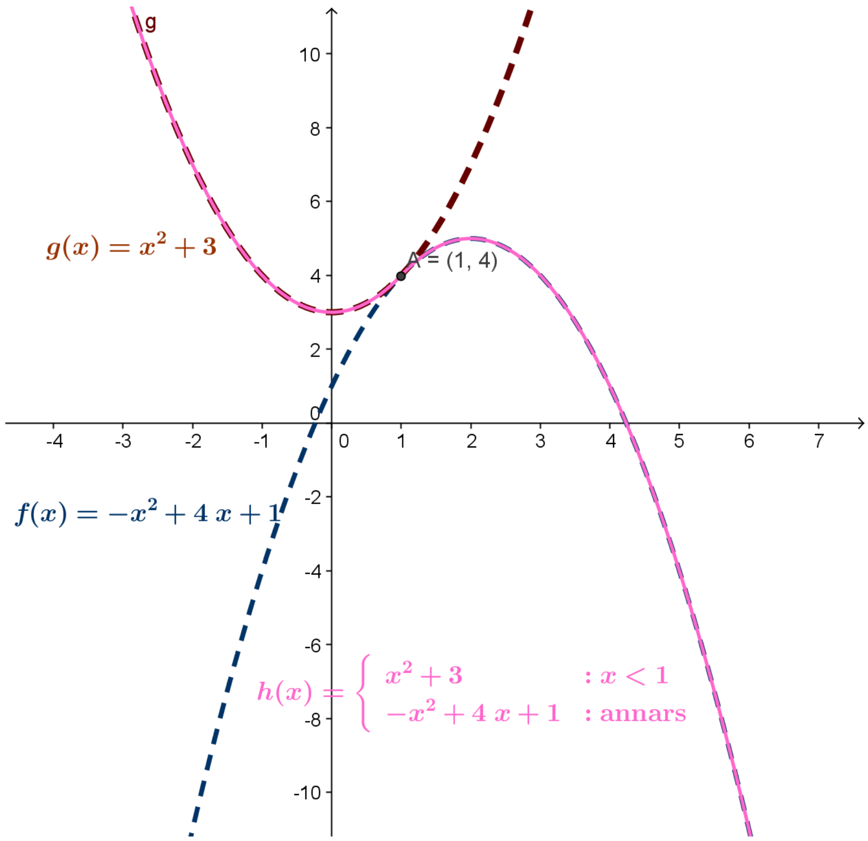
þá fáum við fallið hér fyrir neðan:



Mynd 7 Fallið $h(x)$ (svarta grafið) er ekki diffranlegt í $x = 1$.

Til að endurskilgreina fallið $h(x)$ þannig að það sé diffranlegt þá þurfum við að breyta gildi rennistik–anna þannig að snertlarnir verði eins.

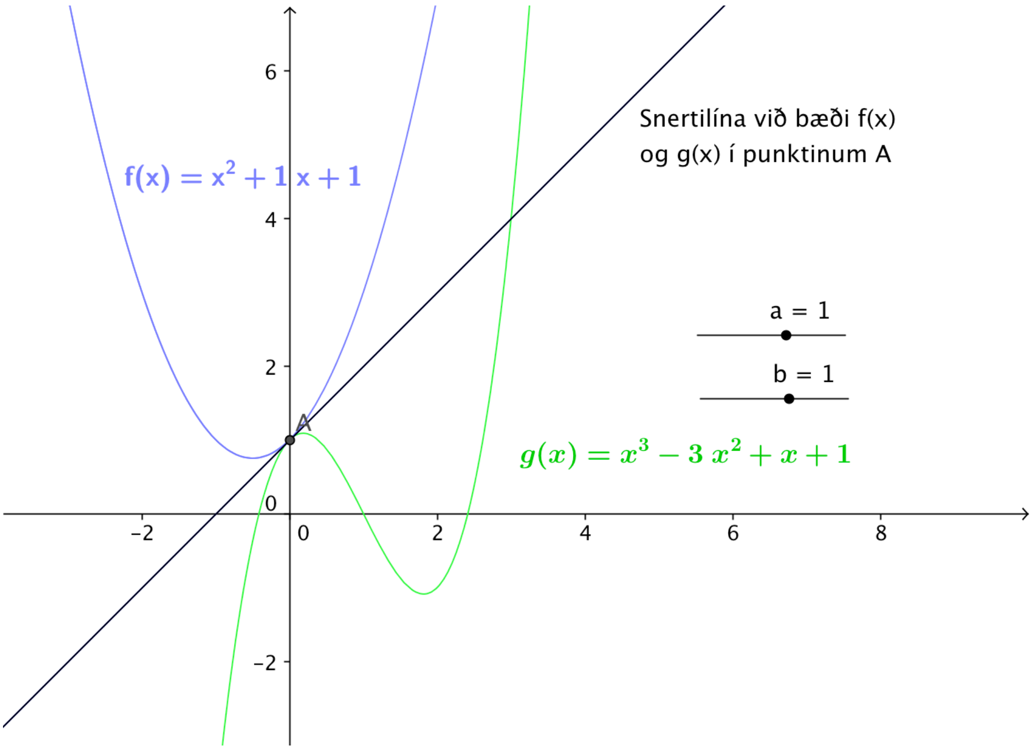
Verkefni: Búið til vinnublað með aðstæðum eins og lýst er hér fyrir ofan og finnið gildi á renni–stikunum þannig að fallið $h(x)$ sé diffranlegt í sérhverjum punkti.



Mynd 8 Hér er sýnd ein lausn verkefnisins fyrir ofan. Fallið $h(x)$ (bleika grafið) er diffranlegt alls staðar.

7 Margliðuföll af stigi 2 og 3 tengd saman

Á svipaðan hátt og lýst er hér á undan getum við tengt saman ýmis önnur föll t.d. annars- og þriðjastigs margliður eins og sýnt er á myndinni hér fyrir neðan.



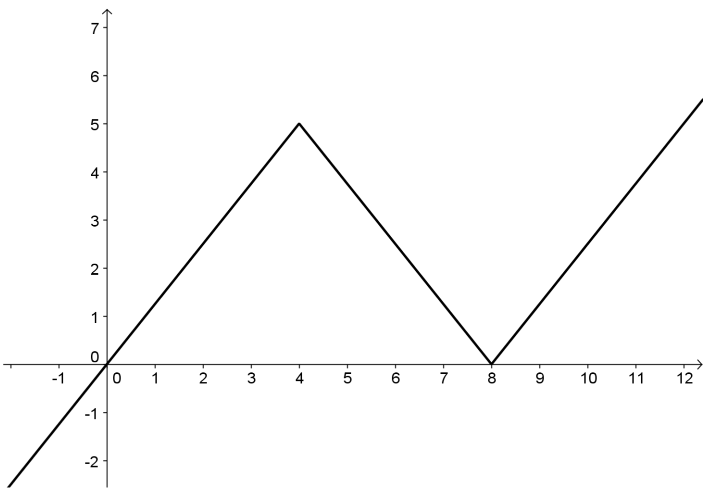
Mynd 9

Föllin $f(x)$ og $g(x)$ hafa sama snertil í punktinum A svo hægt er að búa til diffranlegt fall með því að nota $f(x)$ á einu bili og $g(x)$ á öðru bili þannig að skiptipunktur sé í $x = 0$.

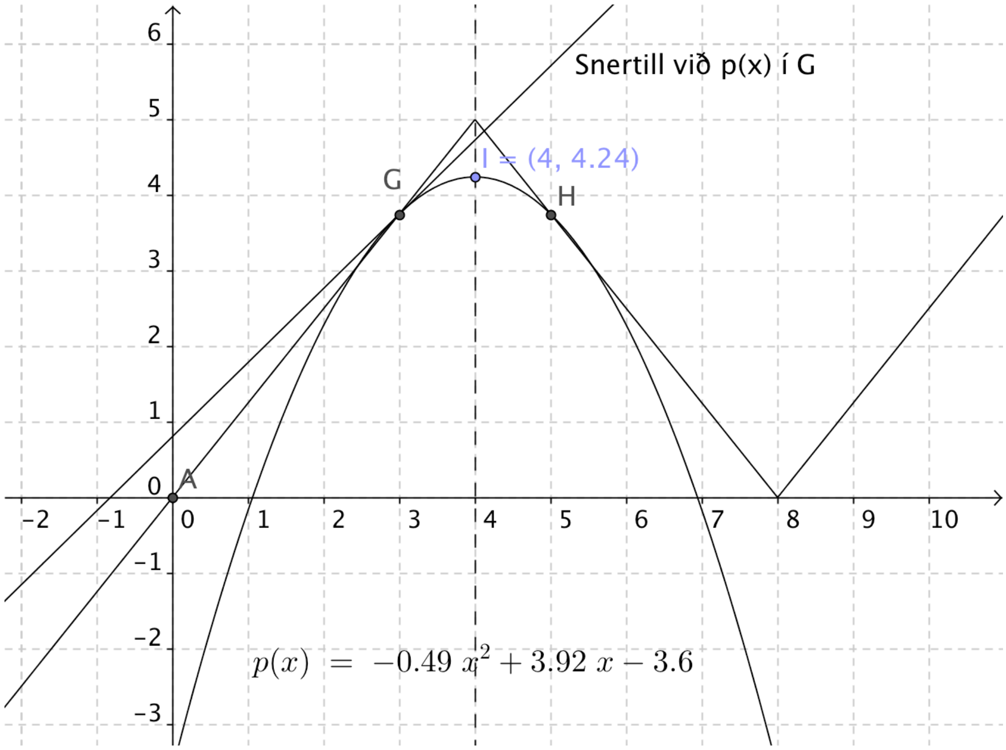
Verkefni: Búið til ykkar eigin sýnidæmi með því að nota t.d. tvær þriðja stigs margliður.

6 Að fjarlægja brot

Við getum notað svipaðar aðferðir við að endurskilgreina fall á litlu bili til að fjarlægja brot í grafi þess.

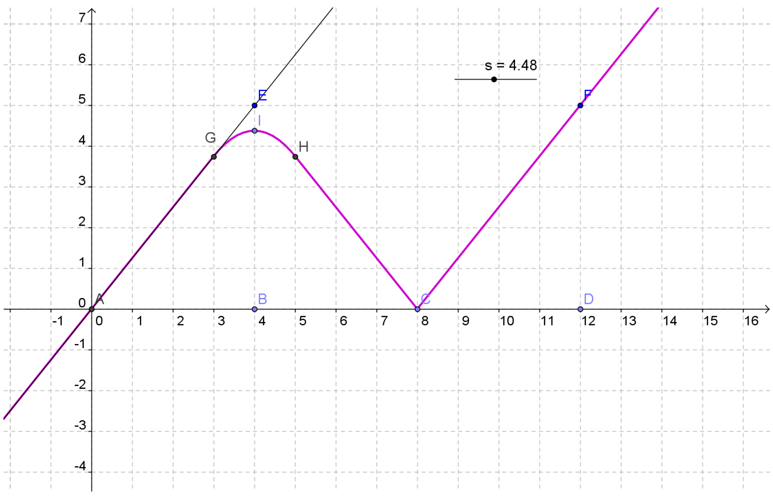


Mynd 10 Einfalt dæmi þar sem graf falls hefur brot á nokkrum stöðum



Mynd 11 Brot í grafi fjarlægt með því að endurskilgreina það á litlu bili

Við skilgreinum tvo punkta *G* og *H,* sitt hvoru megin við brotið sem við viljum fjarlægja og punkt *I* á línunni *x = 4*. Við notum skipunina *AðhvarfMargliðu[{G,I,H},2]* til að fá annarsstigs margliðu sem gengur gegnum punktana þrjá og snertlaverkfærið til að fá snertil við graf þessarar margliðu í punktinum *G*. Við getum hreyft punktinn *I* (hann er fastur á línunni $x = 4$) þar til snertillinn fellur ofan í línustrikið milli $(0,0)$ og $(4,5)$. Eftir að hjálparlínur hafa verið fjarlægðar, litum breytt osfrv. fæst grafið hér fyrir neðan.



Mynd 12 Búið að taka burtu eitt brot í grafinu

Verkefni: Búið til ykkar eigin vinnublað með því sem lýst er hér fyrir ofan.

Heimildir

[1] GeoGebra, niðurhal af http://www.geogebra.org.