Funzioni definite a tratti

Freyja Hreinsdóttir

1 Introduzione

In problemi applicativi funzioni definite a tratti spesso sono usati. Per esempio: la funzione che descrive i prezzi di spedizione. Queste funzioni sono spesso usati per dimostrare i limiti e discontinuità. Utilizzando un software dinamico come GeoGebra è possibile studiare queste funzioni in modo più dettagliato e di utilizzare i cursori per esaminare come la loro definizione può essere modificata per creare funzioni continue, funzioni differenziabili, ecc

2 Definire functioni su un intervallo in GeoGebra

In GeoGebra ci sono due modi per definire le funzioni di intervalli, utilizzando il comando *Function* oppure utilizzando il comando *If.*

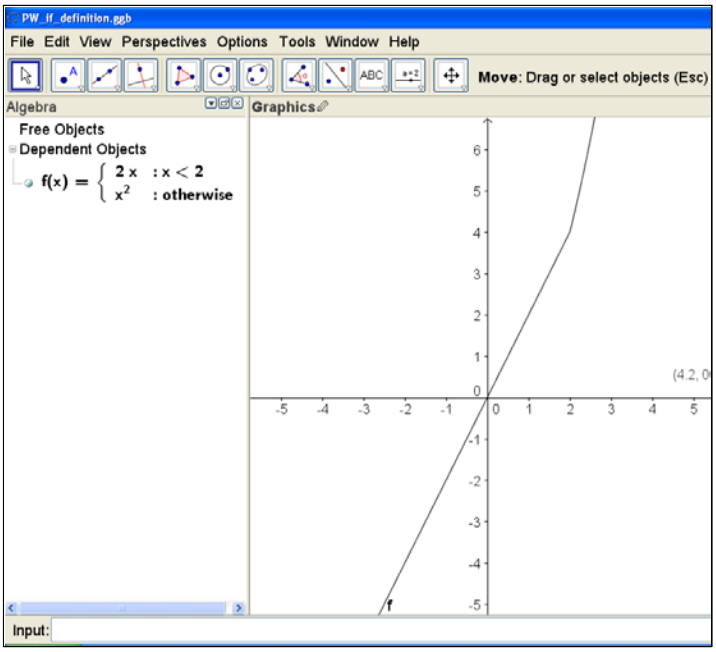

Fig.1 To define the function above we write *If[x < 2, 2x, x^2]* in the input field.

Si puo scrivere *Function [2x,-∞,2]* e *Function[x^2,2,∞]* per ottenere il grafico stesso anche se questo comporta due funzioni in corso di definizione. Se Il comando ha il vantaggio che la derivata della funzione può essere calcolato direttamente.

Se ci sono tre diversi intervalli *If* uno nidificato comando che può essere utilizzato ad esempio *If[x < 2, x², If[x < 3, x + 2, 10 - x]]* si vede nella figura sotto:

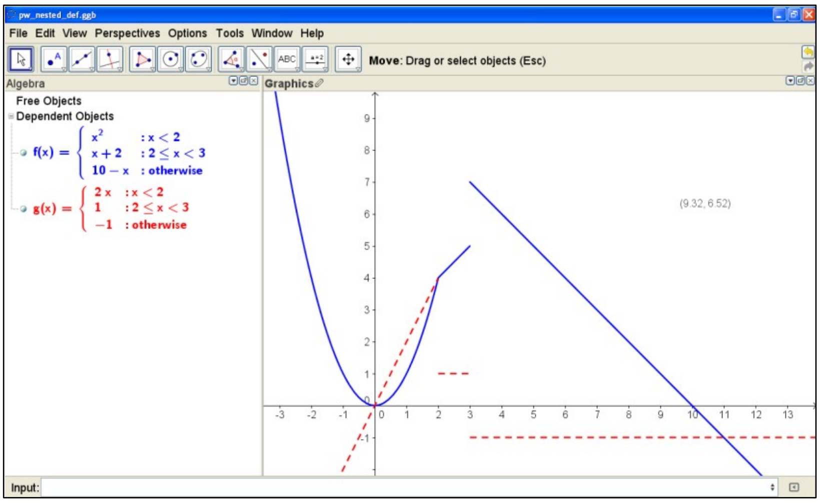

Fig. 2 A function *f(x)* defined on three intervals. Its derivative *g(x)* is shown in red. The derivative is undefined at *x = 2* and at *x = 3.*

3 Sliders

Utilizzando GeoGebra è molto facile per investigare l'effetto di modificare il valore di uno (o più) dei parametri che si verificano nella definizione di una funzione. Per definire un tale parametro selezionare lo strumento slider  . Quando ciò viene fatto apre una piccola finestra:

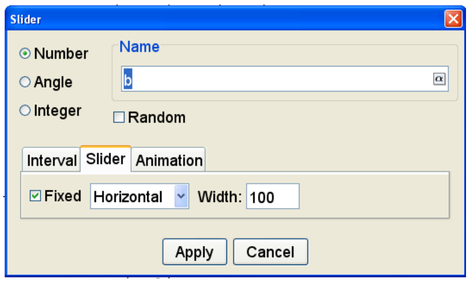

Fig. 3 This window is used for setting the interval of the parameter etc.

Dopo il slider b è stato definito può essere utilizzata la definizione di una funzione, ad esempio , $f(x) = x^2 + b$ e il suo valore può essere modificato usando il mouse.

4 Usando sliders per definire funzioni continui

Consideriamo il seguente problema: determinare i valori dei parametri *a*, *b*, *c* tali che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - a & se\ \ x < -1 \\ x^2 + b & se - 1\ \leq x\ \leq 3 \\ c - x & otherwise \end{cases}$$

è continua.

Questo si risolve mediante la definizione di tre cursori *a*, *b*, *c* ed utilizzando un nidificato Se comando per definire *h (x)*. I cursori possono essere facilmente spostati per rendere la funzione continua.

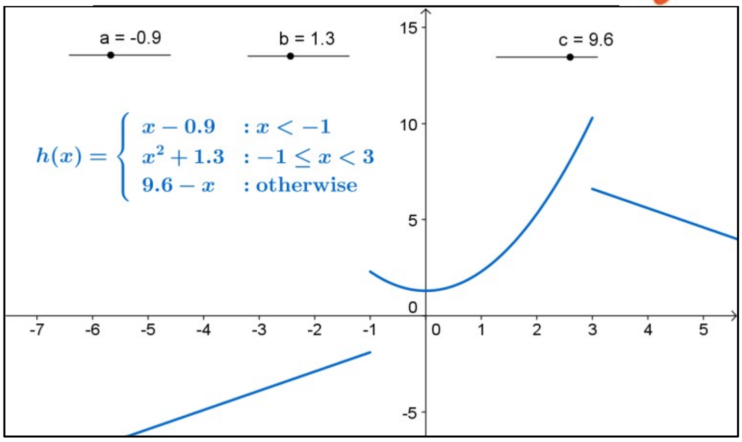

Fig. 4 We change the definition of the function by moving the sliders.

Se cambiare i valori di *a*, *b*, *c* i grafici muovono su e giù in modo è molto facile trovare valori tali che i grafici sono collegati.

Quesito: Definire la funzione sopra in GeoGebra e trovare i valori appropriati dei cursori. Non si ottiene più di una soluzione? Risolvere il problema algebricamente.

Una situazione più complicata si verifica se i parametri non solo hanno a che fare con la posizione del grafico, ma anche la sua forma.

Quesito: Definire la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & se \ \ x < -1 \\ ax^2 + b & se -1 \ \le x \ \le 3 \\ 10 - x & otherwise \end{cases}$$

in GeoGebra e trovare i valori di a e b in modo tale che la funzione è continua. Risolvere il problema anche algebricamente.

5 Funzioni Differenziabili

Nei problemi come quelli di cui sopra è molto evidente che nei punti di collegamento si ottiene un angolo o una pausa nella funzione. Questo perché anche se la funzione è continua nei punti che non è *differenziabile*. La derivata della funzione *f(x)* in *x* = *a* e definite come limite del $f(a+h) - f(a) / h$ quando h tende a 0 e la funzione e' differenziabile in *x* = *a* se il limite esiste. Questo limite è la pendenza di una retta tangente al grafico di f(x) nel punto (a, f(a)).

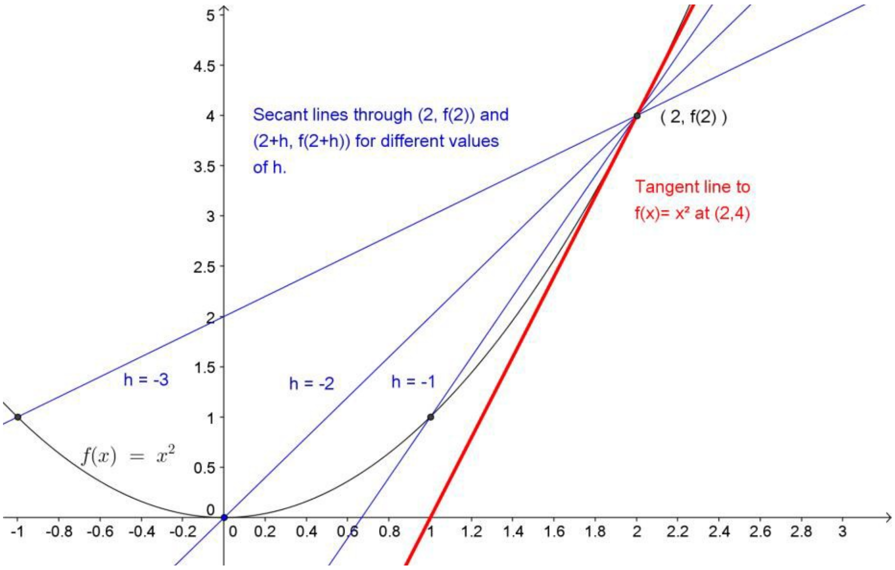

Fig. 5 Secant lines approaching the tangent line at a certain point

Task: Demonstrate the above by defining the tangent to *f(x)* at *x = 2* (using the tangent tool), defining a slider *h* and a line through the points *(2+ h, f(2 + h))* and *(2, f(2))* and then using the mouse to change the value of *h* and watch the secant approach the tangent.

Below we describe how we can join two different quadratic functions to get a piecewise defined function that is both continuous and differentiable at the meeting point.

Open a GeoGebra worksheet and define four sliders *b*, *c*, *d* and e . Define two quadratic functions and and find values of the sliders such that This ensures that the graphs of the two functions intersect at this point. Now use the tangent tool to get the tangents to both functions at the meeting point.

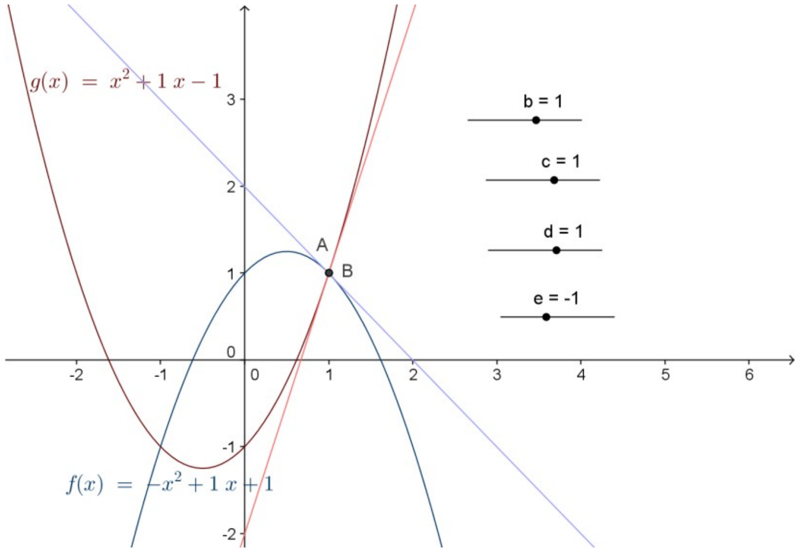

Fig.6 The graphs intersect at the x = 1 but the tangents are not the same.

If we now define a piecewise function *h(x)* such that we get the function below:

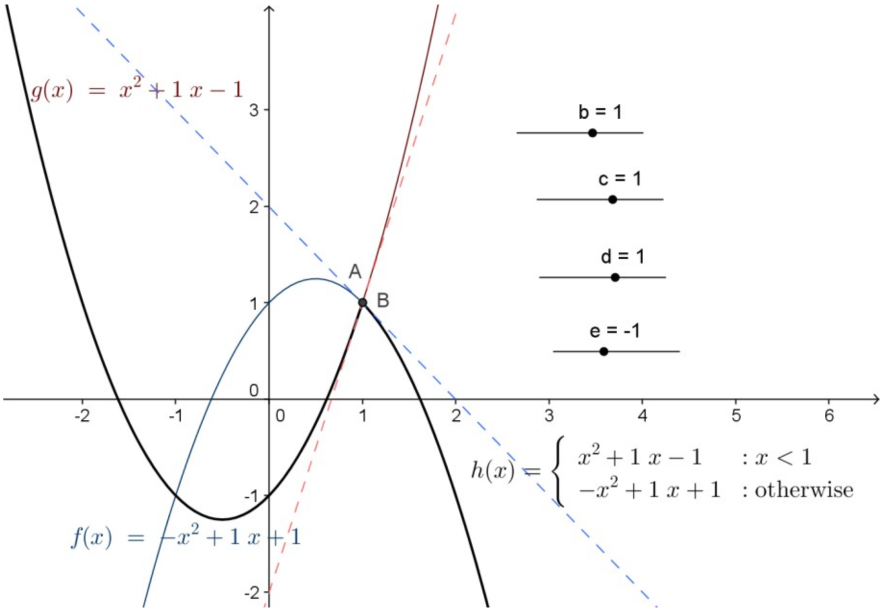

Fig. 7 The function *h(x)* (black graph) is not differentiable at $x = 1$.

To get the function *h(x)* to be differentiable we need to change the values of the sliders such that the tangents are the same.

Task: create the worksheet above and find values of the sliders such that the function *h(x)* is differentiable at every point.

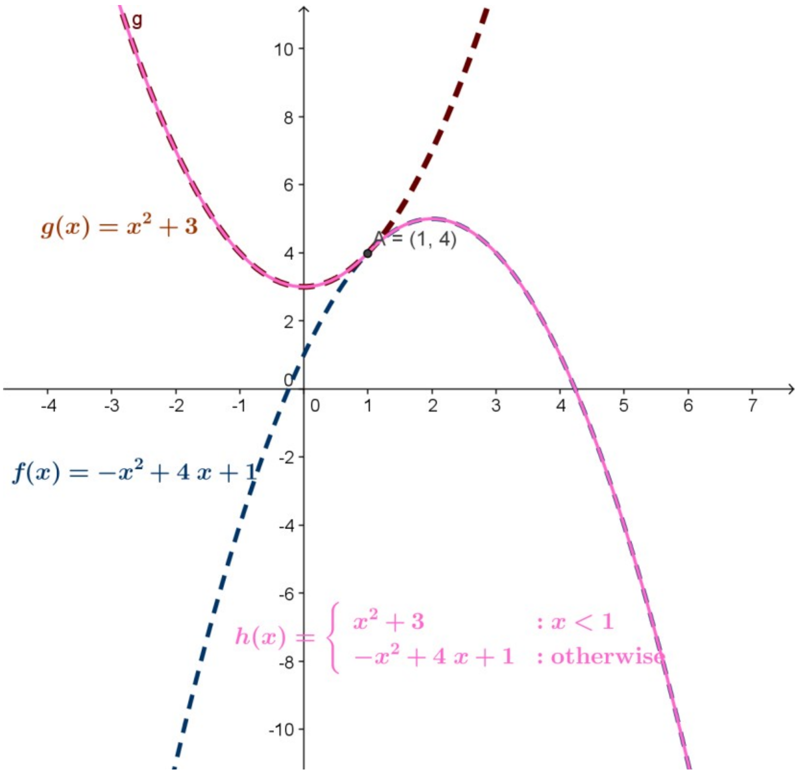

Fig. 8 Here we have one solution to the problem. The function *h(x)* (pink graph) is differentiable everywhere.

7 Connecting second and third degree polynomials

We can make constructions similar to the ones above using other types of functions e.g. second and third degree polynomials as seen below.

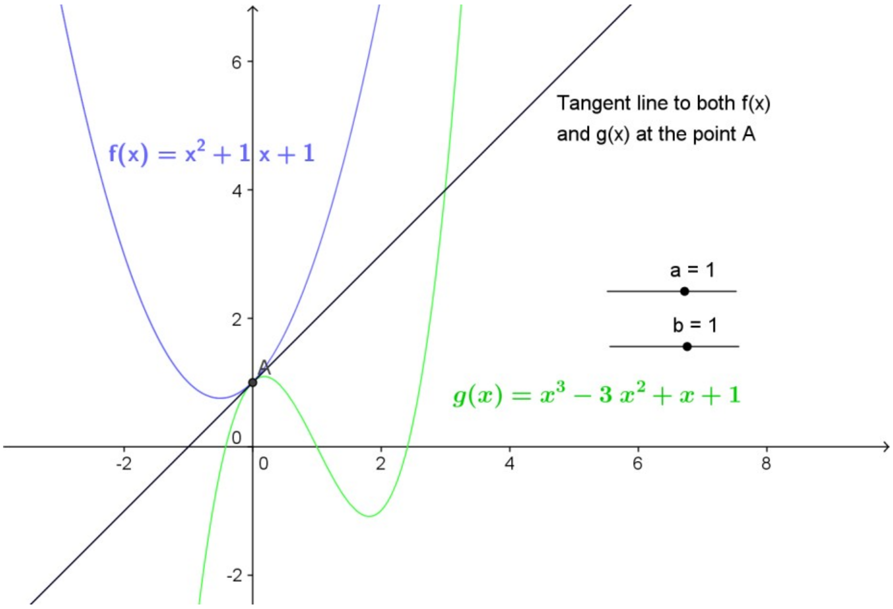

Fig. 9

The functions *f(x)* and *g(x)* have a common tangent at the point *A* so we can define a differentiable function using pieces of *f(x)* and *g(x)* on intervals separated by $x = 1$.

Task: make your own examples like this.

6 Removing breaks

We can use a similar method to redefine a function on a small interval in order to remove such a break in the graph of a function.

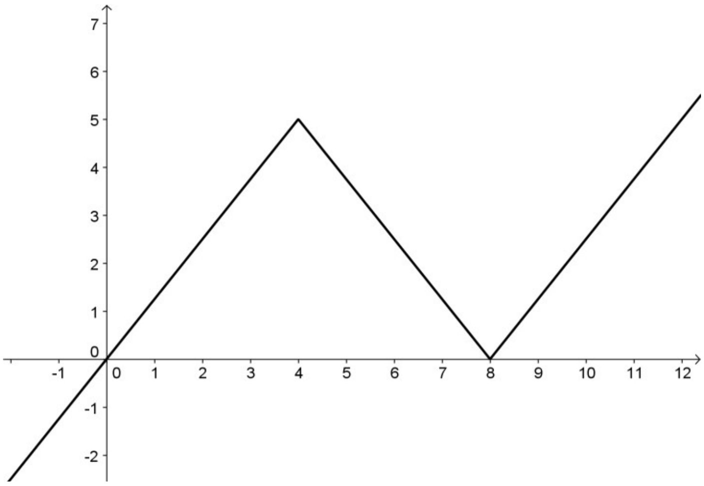

Fig. 10

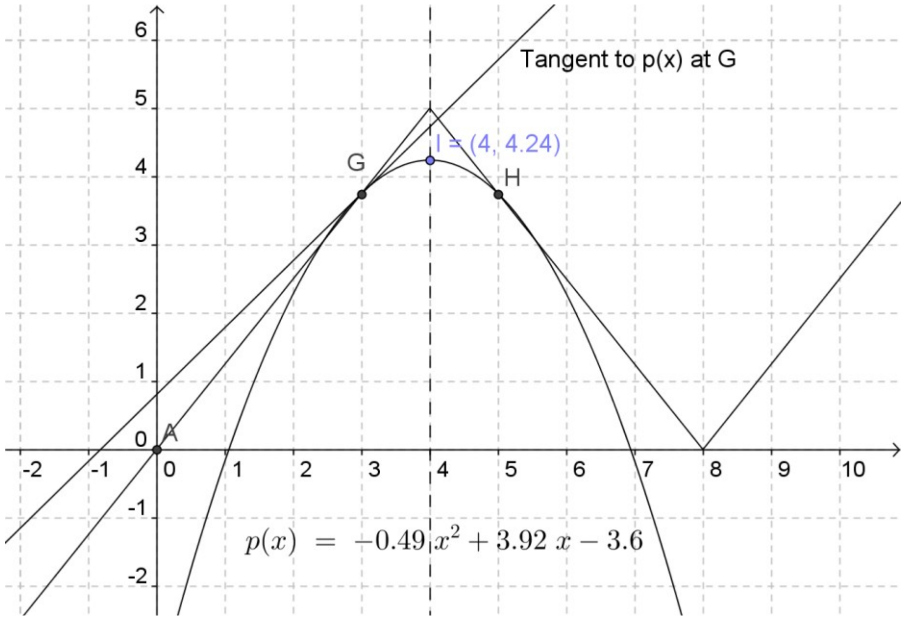

Fig. 11

We can define two points *G* and *H* on opposite sites of the break we want to remove and a point *I* on the line $x = 4$. We then use the command *FitPoly[{G,I,H},2]* to get a second degree polynomial that goes through these three points and the tangent tool to get a tangent to the graph of this polynomial at the point G. We then move the point *I* (it is fixed on the line $x = 4$) until this tangent coincides with the segment from *(0,0)* to *(4,5).* After removing help lines, changing colours etc we get the function below.

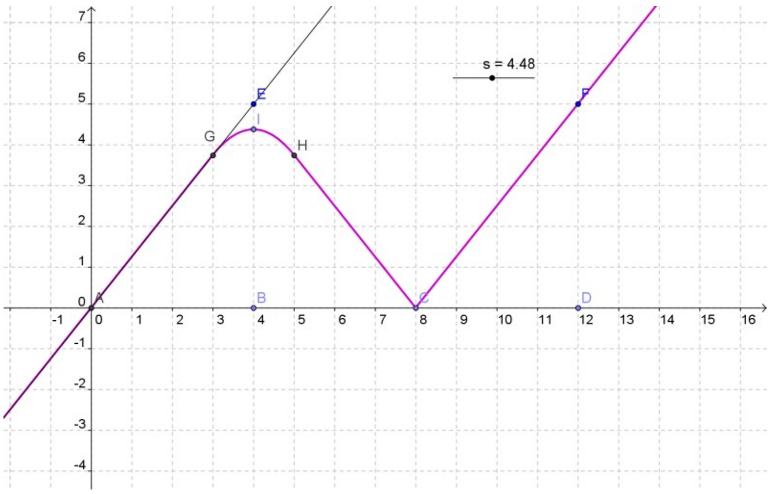

Fig. 12

References

[1] GeoGebra, downloadable from http://www.geogebra.org.