Najlepší výhľad – skúmanie s kružnicami

Ján Šunderlík, Eva Barcíková

1 Úvod

Bratislava, hlavné mesto Slovenska, je malým veľkým mestom ležiacim na Dunaji, poprepájaným mnohými mostami. Výhľady na uvedené mosty patria medzi vyhľadávané turistické atrakcie. Na obr. 1 máme tri z uvedených mostov. Odlišujú sa svojím vekom, ako aj architektúrou. Naľavo sa nachádza najstarší most, ktorý má prislúchajúci názov Starý most. V strede je najnovší most nazývaný Most Apollo. Most vpravo dostal pomenovanie Prístavný most.

Obr. 1 Pohľad na tri bratislavské mosty

Návštevníci Bratislavy často navštevujú promenádu, ktorú sme vyznačili červenou farbou na obrázku 1. Promenáda je dlhá približne 455 metrov. Nachádzajú sa na nej tri vyhliadkové veže. Zo všetkých troch je pekný výhľad na most Apollo. Skúsme si však položiť otázku, odkiaľ je „najlepší výhľad" na most Apollo (obr. 2.)? A čo vlastne pod „najlepším výhľadom" budeme rozumieť?

Obr. 2 Most Apollo (Wiki media)

Dohodneme sa, že pod „najlepším výhľadom“ budeme rozumieť najväčší uhol, pod ktorým vidíme pozorovaný objekt – v našom prípade most Apollo. Na promenáde sa nachádzajú tri vyhliadkové miesta (1, 2, 3). Ktoré miesto je, podľa našej dohody, to najlepšie na pozorovanie mosta Apollo?

Ak teda nie sme len obyčajní turisti, ale máme blízko aj k bádaniu a riešeniu problémov, pozrieme sa na problém „najlepší výhľad na most Apollo“ objavne. Postupy, ktoré budeme používať, sa budú podobať činnostiam, ktoré vykonávajú vedci. Celý proces objavovania najlepšieho výhľadu budeme nazývať bádanie.

Ste pripravení? Začíname.

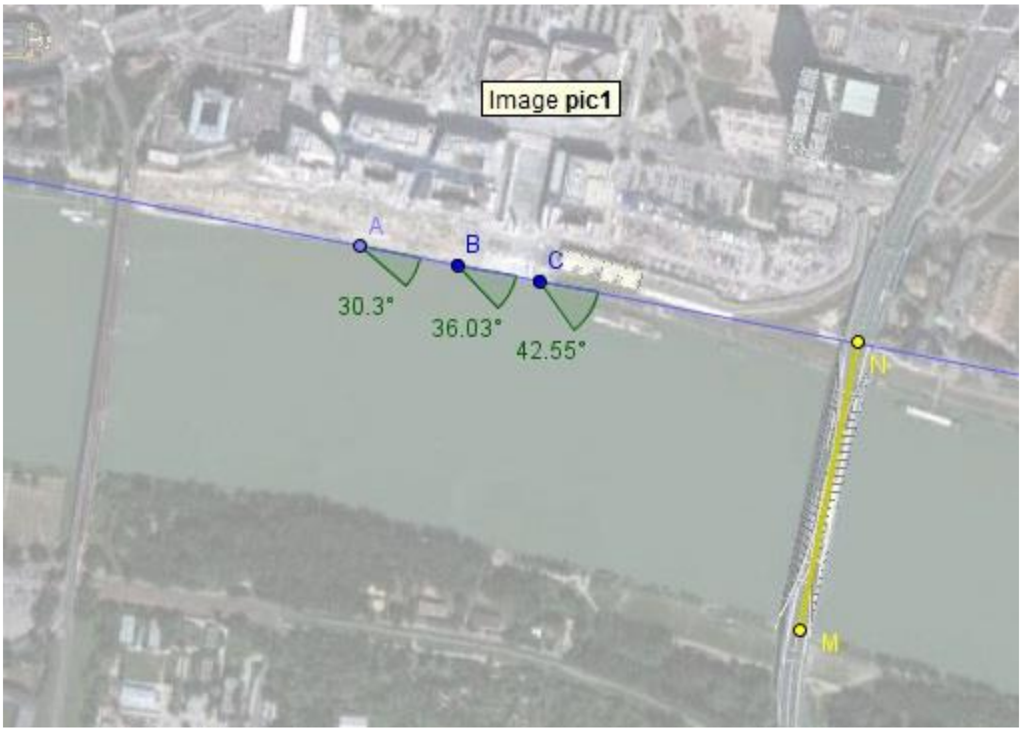
2 Problém 1

Ako by sme odpovedali na otázku: Ktorý výhľad na most Apollo je najlepší?

2.1 Možný prístup k riešeniu

V prvom kroku si celú situáciu trochu zjednodušíme. Použijeme model. Náš model bude založený na fakte, že most ohraničujú jeho dotykové body s brehom. Označme ich *M* a *N*. Most bude predstavovať úsečka *MN*. Samotný breh rieky budeme považovať za rovnú čiaru kolmú na úsečku, ktorá reprezentuje most. To znamená, že uhly, pod ktorými sa pozeráme na most z jednotlivých miest, majú spoločné rameno, ktoré prechádza pozdĺž brehu rieky. Z jednotlivých vyhliadok sa k mostu postupne približujeme, a teda most vždy vidíme pod určitým uhlom.

Ak by sme podľa tohto pravidla postupovali ďalej, ako by to vyzeralo s miestami, ktoré sú veľmi blízko k mostu? K akému uhlu by sme sa približovali? Bolo by to pre ľudské oko príjemné? Pokúste sa na internete nájsť veľkosť optimálneho pozorovacieho uhla.



Obr. 3 Výhľad na most Apollo z troch vyhliadok na promenáde Dunaja (fotografie z Google Earth)

Obr. 4 Vyhliadka C

Obr. 5 Vyhliadka B

Obr. 6 Vyhliadka A

2.2 Poznámky pre učiteľa

Žiakov necháme samostatne pracovať, aby mohli objavovať a nachádzať vlastné riešenia. Môžeme zvoliť rôzne prístupy práce, či už pomocou softvéru Geogebra, alebo využitím vytlačenej mapy. Mapu celej situácie môžeme ľahko získať pomocou služby Google mapy.

Pri práci so žiakmi je potrebné, aby sme im umožnili formulovať vlastné myšlienky a ďalšími otázkami im napomohli k tomu, aby ich riešenia boli presnejšie a lepšie. Učiteľ by si mal dať pozor na to, aby žiakom hneď nepovedal správne riešenie a aby ich nenavádzal na svoj vlastný spôsob riešenia. Je vhodné, aby žiadal od žiakov zdôvodnenie ich úvah a tiež písomný zápis riešení.

2.3 Použitý matematický obsah

Porovnávanie uhlov

Matematické modelovanie

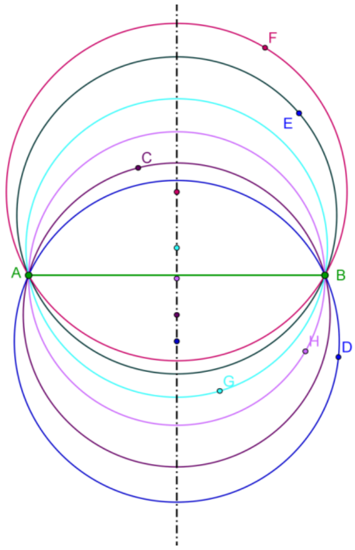
3 Problém 2

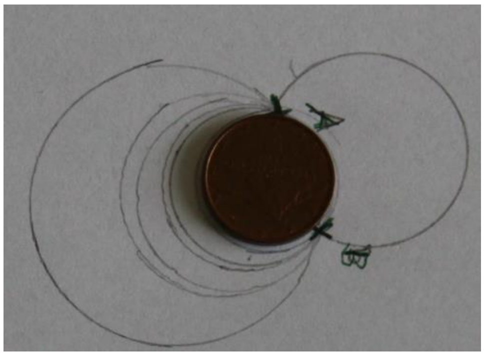
Veľa turistov sa chce plaviť po rieke Dunaj. Poďme to vyskúšať aj my. Počas tejto plavby budeme mať možnosť pozorovať most Apollo z nových uhlov pohľadu. Ako budeme teraz určovať najlepší výhľad na most Apollo? Plavíme smerom od Starého mosta (viď. obr. 7).

Obr. 7 Starý most (vpredu) a Most Apollo (vzadu)

3.1 Možný prístup k riešeniu

Opäť budeme pristupovať k problému tak, že sa budeme snažiť položiť si vhodné otázky. Napríklad: kde bude ležať vrchol uhla, ktorého ramená prechádzajú dvomi koncovými bodmi mosta? Úlohu sa pokúsime modelovať, pričom menej podstatné faktory budeme zanedbávať. Medzi také faktory patria napríklad limity ľudského oka. Po zjednodušení situácie sa pozrieme na problém reálnejšie. Veľkosť uhla sa zväčšuje, ak sa jeho vrchol približuje k stredu úsečky MN. Označme O stred úsečky MN. Bod O je rovnako vzdialený od bodov M a N. Pozrime sa na problém reálnejšie a použime náš optimálny uhol pohľadu. Pozorovacím uhlom budeme označovať maximálny uhol prijateľný pre vnímanie celého objektu. V rámci zvoleného matematického modelu môžeme nájsť aj iné miesta, ktoré budú rovnako vzdialené od dvoch koncových bodov. Ide o nekonečne veľa bodov s takou vlastnosťou. Dané body budú vlastne stredy kružníc, ktoré prechádzajú dvomi krajnými bodmi úsečky MN.





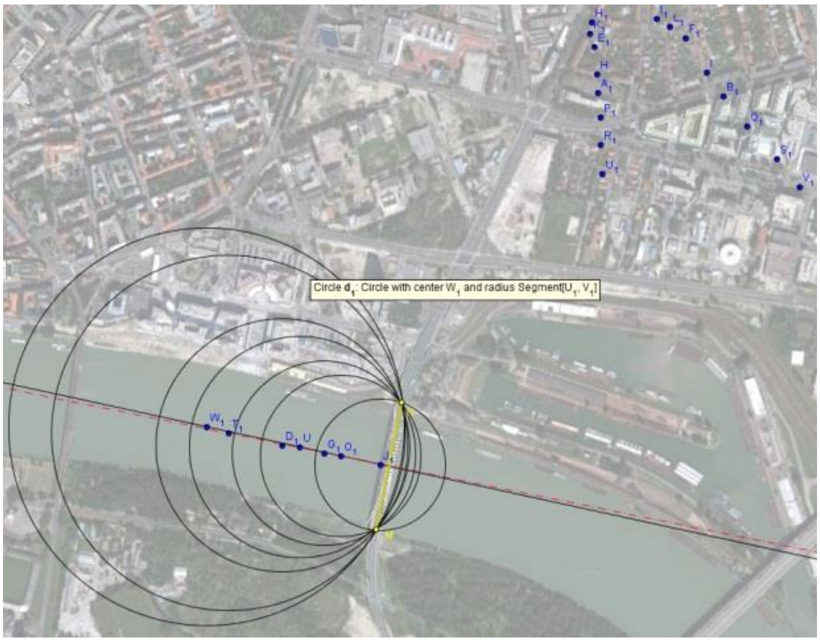
Obr. 8 Kolmica na úsečku vytvorená zo stredov kružníc. **Obr. 9** Kolmica tvorená na papieri

Teraz nám už iba zostáva určiť množinu bodov, ktorú tvoria stredy kružníc prechádzajúce koncovými bodmi mostu Apollo. Vo zvolenom modeli sú to body *M* a *N*.

3.1.2 Skúmanie

Na skúmanie použijeme nástroj *kružidlo* v programe Geogebra. Pomocou nástroja *kružidlo* určíme polomer kružnice a uvedenú kružnicu umiestnime tak, aby prechádzala bodmi *M* a *N*. Je potrebné zvoliť si aspoň tri kružnice. Stredy týchto kružníc určujú hľadanú množinu bodov.

Pomocou induktívneho skúmania môžeme definovať danú množinu bodov. Množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch pevne zvolených bodov v rovine, sa nazýva os úsečky.

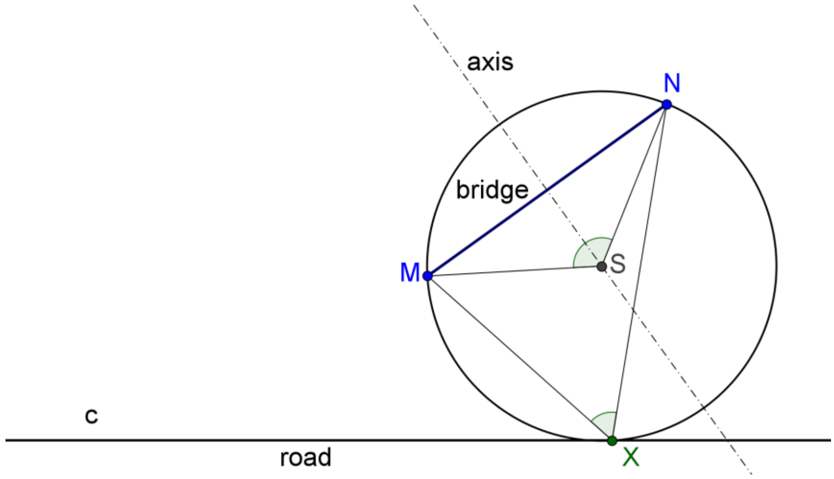


Obr. 10 Os úsečky vytvorená pomocou nástroja kružidlo a kolmica (červená čiara) v programe Geogebra (fotografia z Google Earth)

Riešenie môže pokračovať skúmaním bodov, ktoré neležia na osi úsečky.

Zamerajme sa teraz na stred úsečky. Zostrojme kružnicu k_1 určenú bodmi M a N a stredom S. Na začiatok uvažujme o situácii, keď je bod S zhodný so stredom O úsečky MN. Nechajme žiakov skúmať uhly v tejto kružnici. Žiaci merajú veľkosti uhlov pomocou dostupných nástrojov. Ako veľký je uhol MSN? Aké veľké sú ostatné uhly, ktorých vrcholy ležiy na kružnici a ramená prechádzajú bodmi M a N? Vyberme si ľubovoľný bod X na kružnici. Akú veľkosť má uhol MXN? Ako sa zmení situácia, ak je stred kružnice rôzny od stredu O úsečky MN? Ako sa menia veľkosti tohto uhla, ak sa stred úsečky vzďaľuje od stredu kružnice? Ako môžeme definovať vzťah medzi stredovým a prislúchajúcim obvodovým uhlom v kružnici? Nech úsečka MN predstavuje krajné body mosta a bod X je bodom priamky, ktorá predstavuje cestu, z ktorej most pozorujeme. Ak stojíme v bode X, pod akým uhlom vidíme úsečku MN? Kde ležia vrcholy tohto uhla?

Veľkosť obvodového uhla je polovica veľkosti k nemu prislúchajúceho stredového uhla. Na základe týchto poznatkov a informácií o najvhodnejšom uhle z problému 1 môžeme identifikovať miesta, z ktorých vidíme most pod najlepším zorným uhlom. Na základe skúmania v probléme 2 vieme, že stred kružnice k leží na osi úsečky MN. Zorný uhol MXN sa rovná polovici príslušného stredového uhla MSN, kde S je stred kružnice, ktorá prechádza bodmi M, X, N. Veľkosť tohto uhla sa zväčšuje, ak sa stred kružnice približuje pozdĺž osi úsečky MN k jej stredu. Ešte stále nevieme, kde presne na priamke c leží bod X.



Obr. 11 Stredový a obvodový uhol

3.2 Poznámka pre učiteľa

Proces skúmania môže niekedy viesť aj k mŕtvemu bodu. Je dôležité byť na túto situáciu pripravený a podporiť žiacky proces skúmania s inými počiatočnými či záchytnými bodmi, ktoré by žiakom v ich skúmaní napomohli.

3.3 Použitý matematický obsah

Matematický model situácie

Os úsečky ako množina bodov danej vlastnosti

Vzťah medzi stredovým a prislúchajúcim obvodovým uhlom

Kružnica opísaná trojuholníku

4 Problém 3

Prístavný most nie je tak vizuálne príťažlivý ako most Apollo, avšak nachádzajú sa na ňom dopravne významné cesty. Toto miesto je vstupnou bránou z diaľnice D1 pri príchode turistov do centra Bratislavy, do Starého mesta. Poďme vyriešiť otázku najlepšieho výhľadu z Prístavného mosta na most Apollo.

4.1 Možný prístup

Jeden z možných prístupov k riešeniu je použiť metódu množín bodov danej vlastnosti. Ďalšou možnosťou je využiť metódu kružnicovej inverzie. Sústredíme sa na prvú možnosť.

Na modelovanie situácie môžeme využiť softvér Geogebra. Do nákresne vložíme Google mapu uvažovaných mostov a problém skúmame v tomto prostredí. Body M, N sú krajné body úsečky modelujúcej most Apollo. Zostrojíme priamku c reprezentujúcu Prístavný most a bod X incidentný s touto priamkou. Použijeme nástroj „uhol“ a odmeriame veľkosť uhla. Bod X reprezentuje ľubovoľný bod na priamke c. Tento fakt modelujeme pohybom bodu X po priamke c. Pohybujme teda bodom X po priamke c (keďže bod X patrí priamke, môže sa pohybovať len po nej). Skúmame, ako sa mení veľkosť uhla MXN. Viete vysvetliť prečo sa veľkosť uhla tkto mení?

Ako nájdeme polohu vrchola, v ktorej je uhol najväčší?
Ako súvisí zorný uhol so vzdialenosťou od pozorovaného objektu? Kde je miesto na Prístavnom moste s najväčším zorným uhlom v závislosti na vzdialenosti od pozorovaného objektu – mostu Apollo?

Predstavme si napríklad ľubovoľný bod na rieke. Ako súvisí s kružnicami, ktorých stred leží na osi úsečky? Vráťte sa ku skúmaniu v probléme 2. Na základe riešenia problému 2 vieme, že hľadáme kružnicu, ktorej stred leží na osi úsečky M, N a dotýka sa priamky c. Hľadáme teda stred S_x kružnice k_x, ktorá sa dotýka priamky c a prechádza danými bodmi M a N.

Ako nájdeme bod dotyku na priamke c?
Na začiatok necháme žiakom možnosť samostatne sa nad problémom zamyslieť. Napríklad, žiakov necháme experimentovať s kružnicami v Geogebre a skúšať priblížiť kružnicu k bodom M, N a k priamke c. Následne s nimi diskutujme o tom, že síce mohli získať približné riešenie, avšak tento prístup nie je matematicky exaktný.

Poďme sa zamyslieť od konca – rozmýšľajme smerom od konečného výsledku späť. Analyzovanie spätných krokov nás dovedie k výsledku. Skúmajme situáciu, ako keby bola vyriešená. Zamyslime sa nad množinou všetkých bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od priamky c a bodov M a N. **Aká je množina všetkých bodov rovnako vzdialených od bodu M a priamky c?**

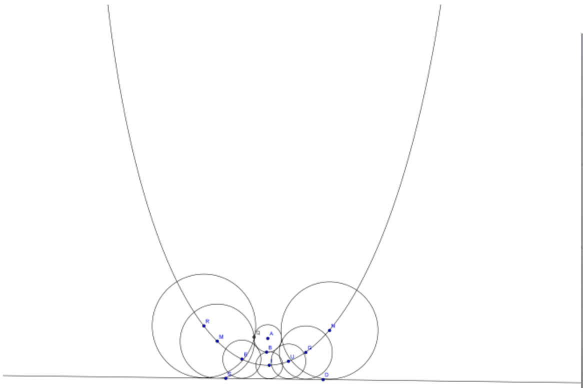
Jedným z kľúčových procesov pri objavnom vyučovaní je regulácia vlastného objavovania. V tejto časti je potrebné uvažovať nad vlastným procesom riešenia zo strany žiaka, takzvané meta-uvažovanie. Je potrebné tiež si uvedomiťaj pomocné poznámky učiteľa, takzvané meta-poznámky.

Rozdeľme problém na podotázky, ktoré vieme zodpovedať.

A) Hľadáme množinu všetkých stredov kružníc, ktoré prechádzajú dvomi danými bodmi.
B) Hľadáme množinu všetkých stredov kružníc, ktoré prechádzajú daným bodom a dotýkajú sa danej priamky.

A) Túto situáciu sme skúmali v probléme 2.
B) Na začiatok použijeme induktívny prístup na konkrétnych modeloch.

Budeme umiestnovať modely kružníc do roviny tak, aby sa dotýkali daného bodu a danej priamky.



Obr. 12 Skúmanie paraboly v Geogebre

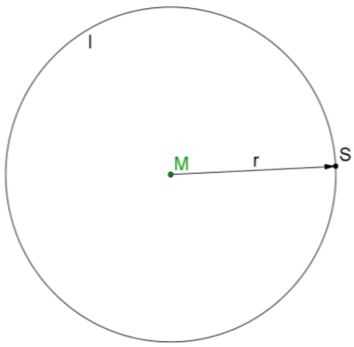
Obr. 13 Skúmanie paraboly na papieri

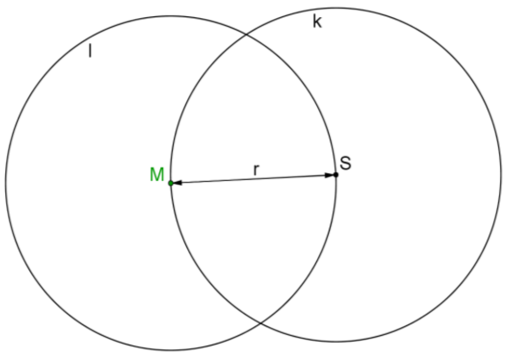
Na určenie hľadanej množiny bodov danej vlastnosti budeme vychádzať z už známych vedomostí o kružniciach a geometrických konštrukciách. (Uvedená aktivita vyžaduje od žiakov vysoký stupeň konceptuálneho pochopenia danej problematiky, pretože na základe už osvojených poznatkov skúmajú nový koncept.)

Po vytvorení dostatočného počtu separovaných modelov na mape je potrebné, aby skúmanie smerovalo k postupnému zovšeobecneniu. K uvedenému dobre poslúži zovšeobecnený model, ktorý budeme používať pri hľadaní množiny bodov *S* stredov kružníc.

1: Zvolíme si ľubovoľný bod v rovine. Označme ho *M*. (Jeho pozícia je nemenná. V realite je to jeden z krajných bodov mostu.) Existuje množstvo ďalších bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu *M*. Ich vzdialenosť od bodu *M* je konštantná, označme ju *r*. Aká je to množina bodov?

Je to kružnica *l* so stredom *M* a polomerom *r*.



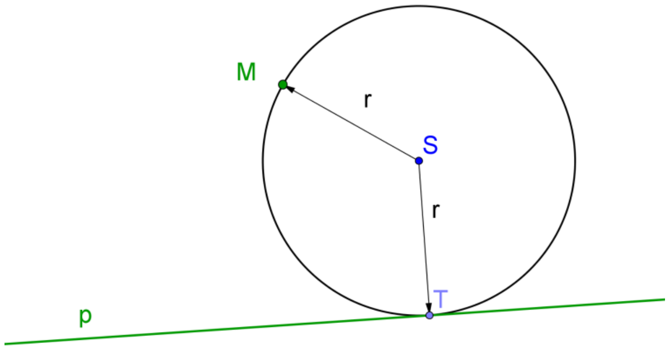


Obr. 14 Skúmanie paraboly – krok 1

Obr. 15 Skúmanie paraboly – krok 2

Vyberme jeden z bodov tejto kružnice. Označme ho *S*. Tento bod reprezentuje všetky body kružnice, teda sa môže „voľne pohybovať" po kružnici *l* okolo bodu *M* , pričom vzdialenosť bodov *S* a *M* sa nemení. Ak sa dá zostrojiť kružnica so stredom v bode *M* a polomerom *r*, dá sa zostrojiť aj kružnica so stredom *S* a polomerom *r*. Bod *M* bude bodom tejto kružnice. Označme *k* novú kružnicu so stredom *S* a polomerom *r*. Kružnica *k* je naša hľadaná kružnica. Pokračujme ďalej v našich úvahách. Vieme, že kružnica *k* má s jeden bod dotyku s nejakou priamkou.

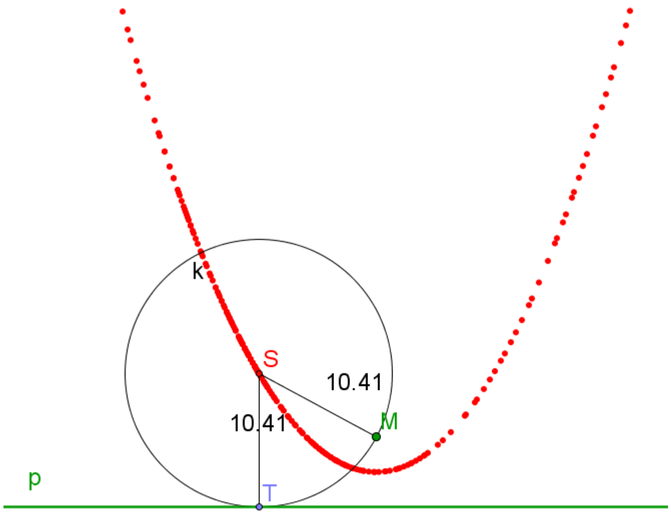
Zvoľme si na kružnici *k* bod *T* a pridajme k našim úvahám priamku *p*, ktorá prechádza bodom *T*. Priamka *p* je dotyčnica ku kružnici *k* v bode *T*. Keďže *p* je dotyčnica, je kolmá na úsečku *ST*. Z definície kružnice, o ktorej sme hovorili na začiatku, vieme, že *SM* = *ST*.



Obr. 16: Skúmanie paraboly – krok 3

V našich úvahách vystupuje pevne daný bod *M* (lebo reprezentuje krajný bod mostu), bod *S*, ktorý sa voľne pohybuje okolo bodu *M* vo vzdialenosti *r*, kružnica *k* so stredom *S* a polomerom *r*, priamka *p*, ktorá je tiež pevne daná (reprezentuje prístavný most), bod *T*, ktorý je zároveň bodom kružnice *k* aj priamky *p*. Teda vzdialenosť bodu *T* od bodu *S* je vždy *r*. Potom aj vzdialenosť bodu S od priamky je *r*. Keďže bod *T* je ľubovoľný bod kružnice, môže byť umiestnený kdekoľvek na tejto kružnici. V našom modeli to zobrazujeme tak, že sa po kružnici bude ľubovoľne „pohybovať“, avšak stále zostane aj bodom priamky *p*.

Predstavte si, že bod *S* pri svojom pohybe zanecháva farebnú stopu. Aký útvar asi nakreslí? Pohybujte bodom *T* a sledujte stopu, ktorú zanecháva (www.dynamathmat.eu/applets/M_S_p.html).



Obr. 17: Predpoklad hľadanej množiny bodov rovnako vzdialených od bodu *M* a priamky *p*

Už ste niekde videli takúto krivku? Kde? Viete, ako sa volá?

Bod *S* leží na tejto krivke. Zopakujme si, čo platilo pre vzdialenosti *SM* a *Sp*. Čo teda platí pre túto krivku? Ako by ste ju opísali vlastnými slovami použitím výrazov bod a priamka?

- Táto krivka je parabola. Je to množina bodov, ktoré majú od daného bodu a danej priamky rovnakú vzdialenosť.

Koľko je takých kružníc k_i, pre ktoré platí, že prechádzajú bodom *M* a ich polomer je *r* a stred bod X_i? Koľko bodov dotyku leží na priamke *p*?

Ďalšie možnosti skúmania

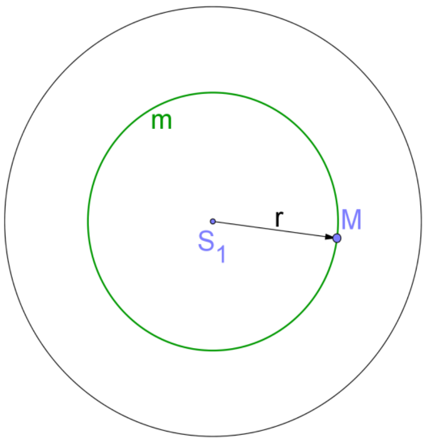
Našli sme množinu stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa danej priamky a prechádzajúcich daným bodom. Ako by vyzerala množina stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa danej priamky *p* a danej kružnice *m*? Predstavme si, že bod *M* je ľubovoľný bod kružnice *m* a teda sa po nej môže „pohybovať“.

Nech je daná priamka *p* a daná kružnica *m* so stredom S_1. Uvažujme o bode *S*, ktorého vzdialenosť od kružnice *m* je konštantná. Koľko takýchto bodov existuje? Akú množinu bodov vytvárajú? Postupujme znovu krok za krokom:

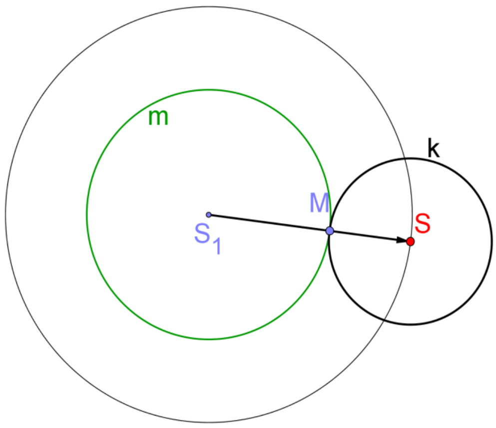
Bod *M* sa môže voľne pohybovať po kružnici *m* so stredom S_1.

- Aká je množina všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od danej kružnice je rovnaká?

  Je to kružnica *k'* sústredná s kružnicou *m* a leží zvonka kružnice *m*. Zvoľme na kružnici *k'* ľubovoľný bod *S*.



Obr. 18 Skúmanie paraboly – krok 1 s kružnicou



Obr. 19 Skúmanie paraboly – krok 2 s kružnicou

Zostrojme kružnicu *k* so stredom *S* prechádzajúcu bodom *M*. Koľko existuje takých dvojíc bodov na kružniciach *m* a *k´*, ako sú body *M* a *S*? Koľko takých kružníc, ako je *k*, môžeme zostrojiť? Ako by ste teraz definovali kružnicu *k'*?

Aj množina všetkých stredov kružníc s daným polomerom, ktoré sa dotýkajú danej kružnice *m* tvorí sústrednú kružnicu. Vzdialenosť bodov sústrednej kružnice od pevne daného bodu S_1 je konštantná.

Ak hľadáme body rovnako vzdialené od priamky a od kružnice, ako sú tieto body vzdialené od priamky a od stredu tejto kružnice? www.dynamathmat.eu/applets/parabola_aplet_k_p.html

Úlohu nájsť všetky stredy kružníc, dotýkajúcich sa danej priamky a danej kružnice, možno redukovať na úlohu nájsť všetky stredy kružníc, dotýkajúcich sa danej priamky a daného bodu. Overme si nasledujúce tvrdenie :

Vyjadrime vzdialenosť hľadaného bodu *S* od priamky *p* a stredu danej kružnice S_1:

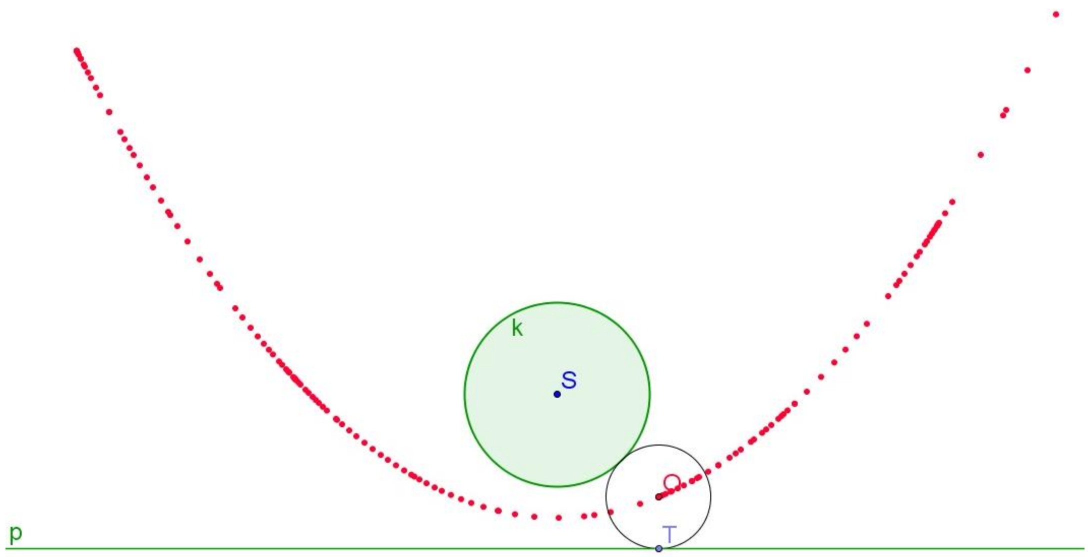
Vzdialenosť hľadaného bodu *S* a priamky *p* je: $|Sp| = r$.

Vzdialenosť hľadaného bodu *S* a stredu S_1 je: $|SS_1| = r \pm r_1$ ... $r = |SS_1| \pm r_1$ ...

$|SS_1| \pm |Sp| = r_1$

$|SS_1| \pm |Sp| = r_1$ ...

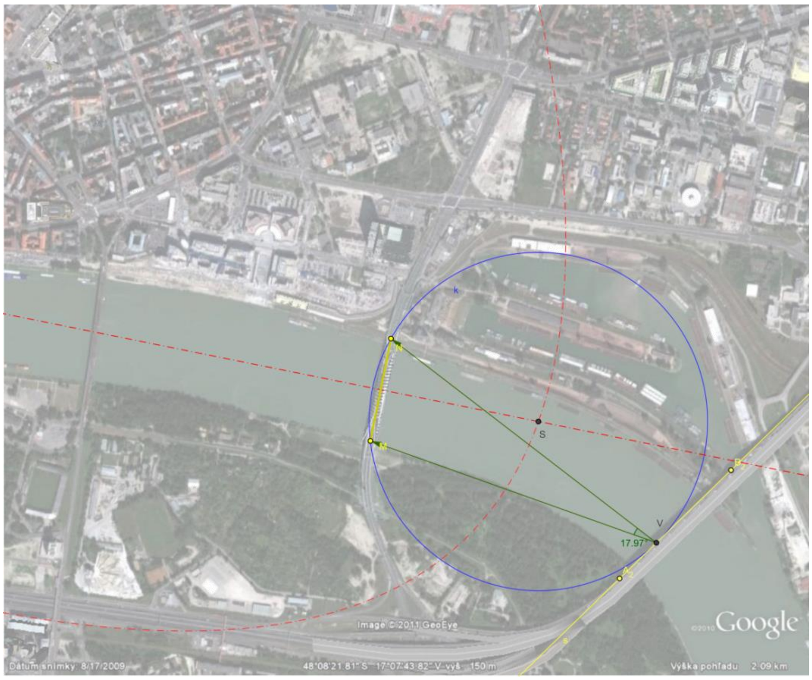
Platí, že vzdialenosť bodu *S* od priamky a od bodu je konštantná.



Obr. 20 Predpoklad o hľadanom mieste bodov rovnako vzdialených od kružnice a priamky.

Teraz sme pripravení vyriešiť problém „najlepšieho výhľadu“. Zhrňme si naše doterajšie zistenia:

Bod, z ktorého je najlepší výhľad, je bod dotyku kružnice, prechádzajúcej bodmi M, N s priamkou c. Stred tejto kružnice patrí osi úsečky a zároveň parabole, ktorá je daná priamkou c a jedným krajným bodom úsečky. Musíme zostrojiť dve množiny bodov. Os úsečky MN a parabolu, ktorá je daná priamkou p a bodom M (alebo N). Priesečník zostrojených dvovh množín bodov danej vlastnosti (priamky a paraboly) je stred kružnice, ktorá prechádza bodmi M a N a dotýka sa danej priamky p. Bod dotyku zostrojenej kružnice a danej priamky p je bod, z ktorého je najlepší výhľad na most Apollo z Prístavného mosta.



Obr. 21 Aplikácia objavenej vedomosti na riešenie problému 3

4.2 Poznámka pre učiteľa

Uvedené skúmanie a riešenie problému je vhodné pre žiakov prvého alebo druhého ročníka strednej školy. Je málo pravdepodobné, že by žiaci samostatne skúmali a riešili uvedený problém podobným spôsobom. Žiaci môžu mať ťažkosti „neurčito“ definovaným problémom, obzvlášť ak nie sú zvyknutí pracovať uvedeným spôsobom. Aj napriek počiatočným ťažkostiam odporúčame nechať žiakov samostatne navrhnúť možné prístupy k vyriešeniu problému. Je veľmi dôležité, aby žiaci mali možnosť tieto svoje prístupy aj odskúšať a prediskutovať so spolužiakmi.

Po samostatnom skúmaní žiakov je žiaduce vytvoriť prostredie s nižším stupňom otvorenosti skúmania, ktoré by umožnilo žiakom rozdeliť si problém na menšie časti.

Takýmto prístupom rozvíjame u žiakov konceptuálne porozumenie a aplikáciu kužeľosečiek v praxi. Žiaci si taktiež rozvíjajú metódy riešenia problémov s využitím dynamického geometrického softvéru, bez ktorého by bola uvedená konštrukcia len ťažko predstaviteľná.

Na záver skúmania je vhodné žiadať od žiakov interpretáciu, zdôvodnenie a prezentáciu vlastného riešenia. Svoje výsledky by sa mali snažiť zovšeobecniť do modelu (deduktívnym prístupom), ktorý by bol použiteľný v rôznych prostrediach a s rôznymi objektmi. Uvedeným prístupom si môžu žiaci hlbšie uvedomiť proces tvorby matematických poznatkov.

4.3 Použitý matematický obsah

Parabola – množina bodov danej vlastnosti

Matematický model

Vytváranie a používanie modelov pri riešení problémov z reálneho života

Induktívne myslenie

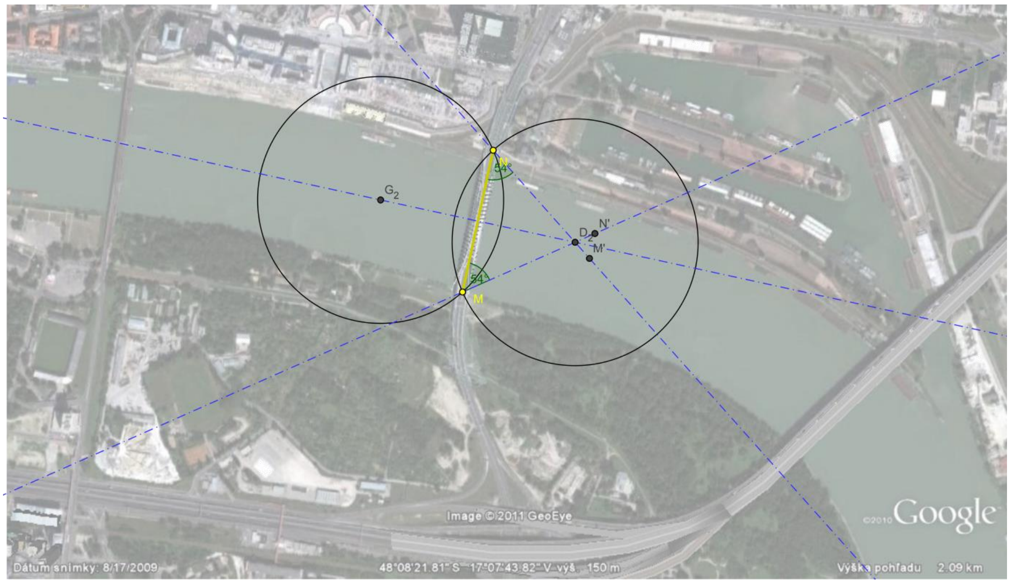
Matematické skúmanie a tvorba predpokladov

5 Záverečný problém

Ak si určíme, že optimálny pozorovací uhol bude 36 stupňov, tak by sme mohli naše riešenie z problému 2 upresniť na hľaanie bodu, z ktorého budeme vidieť most Apollo pod uhlom 36°.

Opäť je vhodné, aby sme žiakom umožnili samostatne sa zamyslieť nad problémom a nechali im čas na formuláciu vlastných myšlienok.

Rozhodli sme sa pre určenie všetkých miest, odkiaľ je vidieť most pod uhlom 36 stupňov. Ide o množinu vrcholov obvodového uhla ležiacich na kružnici so stredom *S*, ktorý leží vo vrchole rovnoramenného trojuholníka, z ktorého je vidieť daný most pod uhlom *MSN* a ktorého veľkosť je 72 stupňov. Z uvedeného bodu zostrojíme kružnicu. Analogicky postupujeme aj na druhej strane. Vzniknuté kružnice nám udávajú množinu bodov, odkiaľ je najlepšie vidieť bratislavský most Apollo.



Obr. 22 Riešenie úvodného problému (Google mapy)

Obr. 23 Most Apollo (wiki media)

6 Ďalšie skúmanie

Ako sa zmení situácia, ak sa budeme pozerať na most cez objektív s rôznou veľkosťou priblíženia?

Ako by sme našli na promenáde miesto, z ktorého budeme vidieť Starý most a most Apollo pod „najlepším uhlom“? Ako sa zmení úloha, ak promenáda nebude kolmá na most, ako sme uvažovali v probléme 2? Čo sa zmení, ak bude breh zakrivený, ako je to v skutočnosti medzi mostom Apollo a Prístavným mostom?

Odkiaľ je vlastne najlepší výhľad na Most Apollo?

Uvedený problém vedie k riešeniu Apolóniových úloh. Zhodou okolností, nás most Apollo doviedol až k riešeniu Apollóniových úloh. Uvedený príklad len zapadá do skutočnosti, že svet matematiky, je všade okolo nás.

Pri žiackych skúmaniach je dôležité, aby sme nechali žiakov postupne zdokonaľovať ich riešenia. Zdokonaľovanie riešení znamená ich zostručnenie, efektívne, úsporné ale dostatočne presné vyjadrovanie. Žiakov vedieme k tomu, aby sa naučili efektívne používať formálny matematický jazyk. Takto získané kompetencie sú použiteľné pri ďalšom bádaní a riešení problémov z reálneho života.

7 Diskusia

V našom skúmaní sme často používali aproximáciu a náčrty robené do Google mapy v Geogebre. Uvedené informácie mali iba informačnú funkciu, ale postačovali nám na vytváranie predstáv a matematického modelu. Je žiaduce, aby sme sa o tomto procese porozprávali so žiakmi, napríklad zaraďovaním meta-poznámok, aby si žiaci lepšie uvedomili jednotlivé kroky vlastného bádania. Na zlepšenie presnosti riešenia úlohy môžeme použiť napríklad GPS zariadenie a na označenie použiť súradnicový systém, ktorý by nám pomohol presnejšie určiť náš hľadaný „najlepší výhľad“.

Existuje množstvo spôsobov využitia kružníc pri riešení úloh. V našom článku sme použili vlastnosti kružnice ako vedomosť, ktorú žiaci poznajú a ich úlohou bolo použiť existujúcu vedomosť v novom kontexte pri riešení konkrétneho neznámeho problému. Skúmanie s kružnicami bolo v pri riešení uvedeného problému kľúčové. Použitie daného aparátu presahuje kapacitu tohto článku, a preto sme chceli dať čitateľovi iba začiatočný impulz pre ďalšie vlastné skúmanie.

8 Záver

Bádateľský prístup a samotné vedecké skúmanie je podstatou teoretickej matematiky, v ktorej sa vedci snažia nachádzať odpovede na otázky vlastnou bádateľskou činnosťou.

Rôzne nevyriešené problémy, ako aj vlastné formulované otázky, sú hnacím motorom pre zvedavosť matematikov a ženú ich k túžbe objaviť nové veci, nájsť odpoveď na doposiaľ nezodpovedané otázky. Podobným prístupom sme pracovali aj my. Nevyriešený problém, otázka je hnacím motorom, „potrebou“ nájsť riešenie, ktorú chceme u žiakov vzbudiť. To nás vedie k tomu, aby sme nazerali na problémy z iného pohľadu, ako vnímame príklady z učebníc matematiky. Chceli sme sa viac zamerať na podstatu matematického skúmania.

Samozrejme, neznehodnocujeme silu deduktívneho myslenia a axiomatickej výstavby matematických poznatkov. Samotný induktívny prístup však považujeme za neodmysliteľnú súčasť výstavby jednotlivých pojmov, ich konceptuálne porozumenie a schopnosť použiť získané poznatky v praxi.

Literatúra

[1] Banwell, C. S., Saunders, K. D., Thata, D. *Starting points*. Tarquin Publications, Norfolk, 1986, ISBN 0906212510

[2] Barcíková, E. *Apollonius problem solved by using analytical geometry methods.* In: Young Researchers 2011 : PhD Students, Young Scientists and Pedagogues Conference Proceedings. Nitra, 29. June 2011 / David Turčáni et al. - Nitra: UKF, 2011. - ISBN 978-80-8094-946-4, P. 723-730.

[3] Vallo, D., Ďuriš, V., Záhorská, J. *Parabola v aplikačných príkladoch a ich aplety v programe GeoGebra*. In: Potenciál prostredia IKT v školskej matematike II. - Bratislava : UK, 2010. - ISBN 978-80-223-2911-8, S. 75-81.