# Det bedste sted - en undersøgelse med cirkler

Ján Šunderlík og Eva Barcíková

## 1 Indledning

Bratislava, Slovakiets hovedstad, er en lille storby, der ligger ved Donaufloden og har mange broer. En af turistattraktionerne er også udsigten fra disse broer. På figur 1 ses tre af broerne ovenfra. De er ikke lige gamle. Til venstre er den ældste bro, som også hedder det: Den ældste Bro. I midten er den nyeste bro, der hedder Apollobroen. Den sidste bro hedder Havnebroen.


**Fig.1**: Tre broer i Bratislava set ovenfra

Som helt almindelig turist kan man gå ad Donaupromenaden, som vi har farvet rød. Promenaden er ca. 455 m lang, og der er tre udsigtspunkter. Som en (ualmindelig) turist kan man spørge sig selv, hvor er det "bedste udsigtspunkt", hvis man vil se Apollobroen (figur 2).

**Fig. 2**. Apollobroen (Wikimedia)

Vi kan godt blive enige om, at det "bedste sted" vil være stedet med den største vinkel, som Apollobroen kan ses fra. Der er tre udsigtspunkter (1, 2, 3). Hvilket er ud fra vores antagelse bedst, hvis man vil se Apollobroen?

Hvis nu du ser dig selv om en ualmindelig turist, dvs. du ligner en videnskabsmand mere, end du troede, eller måske snarere en problemløser. Den proces, vi nu skal igennem, er en spørgeteknik, som er en metode, der svarer til den måde, som matematikere arbejder på.

Er du klar? Så lad os begynde.

# 2 Opgave 1

Hvordan kan man finde svaret på det foregående spørgsmål? Hvor på promenaden er det bedste udsigtspunkt, hvis man vil se Apollobroen?

## 2.1 Sådan kan det løses

Vi kan forenkle spørgsmålet med en model. Den er lavet ud fra den omstændighed, at broen rører ved flodbredden. Vi forlænger derfor linjen langs promenaden og konstruerer en linje, der ligger vinkelret på broen. Det betyder, at alle steder langs med promenaden har en fælles stråle, og vi flytter bare toppunktet af udsigtsvinklen tættere på broen. Det er således ikke svært at forstå, at jo tættere toppunktet er på broen, desto større er vinklen. Hvad så med de punkter, der ligger meget tæt på en af broens sider? Hvilken vinkel nærmer den sig (konvergerer)? Prøv på internettet at finde den bedste vinkel, hvis man skal se på en genstand.

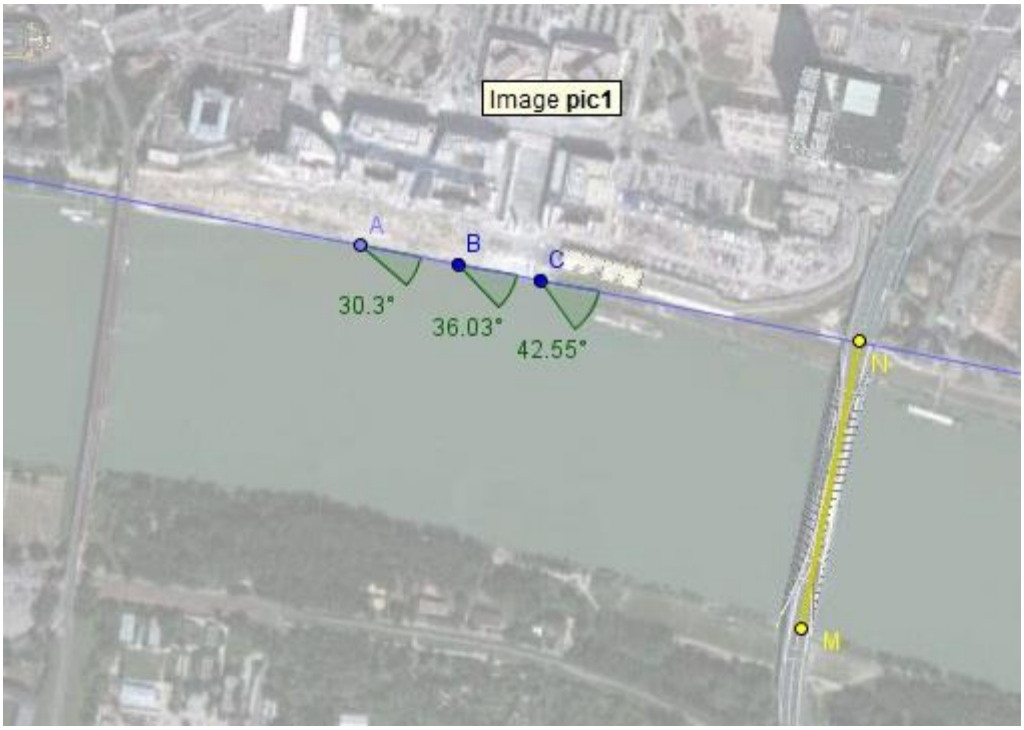



**Fig. 3** Udsigt til Apollobroen fra udsigtspunkter på Donaupromenaden (Foto fra Google Earth)

**Fig. 4** Udsigtspunkt C **Fig. 5** Udsigtspunkt B **Fig. 6** Udsigtspunkt A

## 2.2 Bemærkninger til læreren

Vi kan nemt lade de studerende undersøge spørgsmålet og selv komme med løsninger. Det kan vil være en god ide at give dem en fotokopi af kortet eller lade dem udforske spørgsmålet vha. et geometriprogram. Det er nemt af finde et billede af det hele ovenfra med det gratis program Google Earth. Geometriprogrammet kunne f.eks. være GeoGebra. Det er vigtigt at opfordre de studerende til at formulere deres egne tanker og spørgsmål, som kan hjælpe dem med at finde en løsning. Det er vigtigt, at de ikke får løsningen lige med det samme. Man kan også bede de studerende formulere deres forklaring og lade dem skrive den ned på et stykke papir.

## 2.3 Matematiske begreber der udvikles

Sammenligning af vinkler

Matematisk modellering

# 3 Opgave 2

Det er meget populært blandt turister at tage en sejltur på Donaufloden. Så lad os også gøre det. På sejlturen har vi igen mulighed for at se Apollobroen fra forskellige synsvinkler. Hvor er det "bedste sted" at se Apollobroen fra, hvis vi kommer fra Den gamle Bro?

**Fig. 7.** Den gamle Bro (i forgrunden) og Apollobroen (i baggrunden)

## 3.1 Sådan kan det løses

Hovedspørgsmålet er, hvordan vi kan finde den største vinkel, som indeholder to punkter. Vi kan igen prøve at udarbejde (bruge) en matematisk model, som ikke tager højde for begrænsninger ved det menneskelige øje og andre faktorer. Derefter vil vi prøve at se mere realistisk på spørgsmålet. Udsigtsvinklen er det største vinkel, hvor en genstand kan ses med acceptabelt resultat. Størrelsen af vinklen øges, når toppunktet nærmer sig centrum af segmentet $MN$. Lad os kalde dette centrum for $S$. Fra punkt S er der samme afstand til punkt $M$ og $N$.

Men inden for den matematiske model kan vi fortsat overveje andre steder, der er lige langt fra begge slutpunkter. Vi taler om et uendeligt antal steder. Vi kunne betegne dem cirkler, der går igennem punkt A og B.

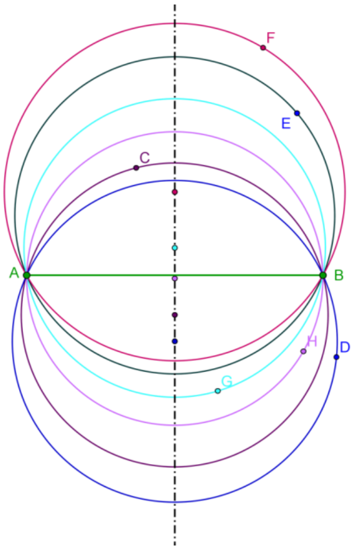



**Fig. 8** Vinkelret halveringslinje, der er lavet i Geogebra

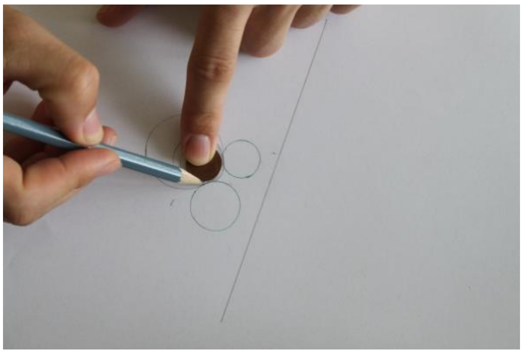


**Fig. 9.** Vinkelret halveringslinje på et ark papir

Det andet hovedpunkt er derfor at finde det geometriske sted, som centrene af de cirkler, der går igennem slutpunkterne for Apollobroen M og N, aftegner.

### 3.1.2 Undersøgelse

Vi kan bruge GeoGebra og vælge en passer (under værktøj - cirkel og bue værktøj) , hvor vi indstiller radius hen ad vejen og derefter nærmer os cirklen på punkt M og N. Centrene af cirklerne danner et geometrisk sted, som vi kan forsøge at definere efter undersøgelsen. Det er bedst at have mindst tre cirkler.

Vi kan definere det via den induktive proces med at finde det geometrisk sted. Det geometriske sted af punkter, der er lige langt fra to punkter, er den vinkelrette halveringslinje.

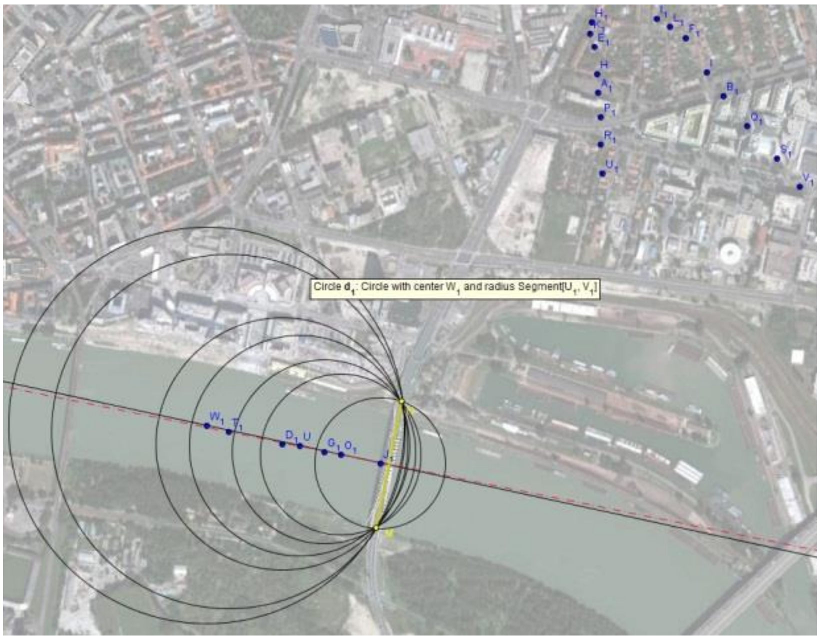


**Fig. 10.** Vinkelret halveringslinje lavet med værktøjet "passer" og "Midtnormal" halveringslinje på kortet i GeoGebra (Foto fra Google Earth)

Vi kan også fortsætte med punkter, der er forskellige fra den vinkelrette halveringslinje.

Vi kan udvikle ideen med midtpunkt af segmentet. Lad de studerende undersøge vinklerne i en cirkel, der har centrum i midtpunktet af segmentet *MN*. Lad os kalde cirklen $k_1$. Hvad er vinklen *MSN*? Vi kan nu vælge et hvilket som helst punkt, f.eks. *X* på cirklen. Hvor stor er vinklen? Hvad med andre punkter? Hvordan kan vi definere den centrale vinkel og forholdet til den perifere vinkel? Størrelsen af den perifere vinkel er halvdelen af den centrale vinkel i cirklen.

Ud fra denne viden og informationerne om en passende vinkel fra opgave 1 kan vi finde de steder, hvorfra vi kan se broen i denne vinkel. I forbindelse med undersøgelsen vil vi gerne finde ud af, hvor stor vinkel β er sammenlignet med den centervinkel. Størrelsen af vinklen øges, når toppunktet S nærmer sig langs aksen af segmentet *MN* til centrum. Derefter skal cirklen *k* mindst have et punkt fælles med linje *c*. Den maksimalt tilladte tilnærmelse af punkt S til linjen MN forekommer, når cirklen kun rører ved linjen c i et punkt X. Dette vil være vinklen *MSN*, og derfor er vinklen *MXN* den maksimale.

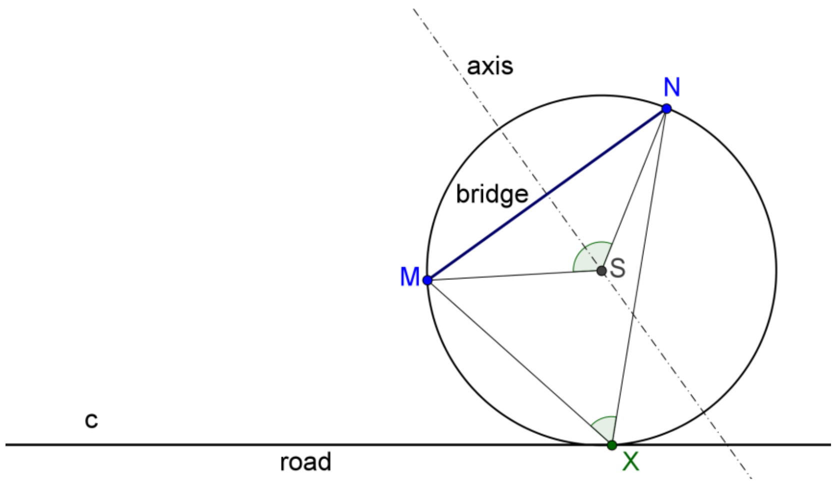



**Fig. 11.** Center- og periferivinkel

## 3.2 Bemærkninger til læreren

I forbindelse med undersøgelser kan arbejdet nogle gange føre ind i en blindgyde. Det er nødvendigt at være klar til at understøtte de studerendes undersøgelsesarbejde med andre startpunkter eller inden for nøglepunkter, som kan bringe dem videre i arbejdet.

## 3.3 Matematiske begreber der udvikles

Matematisk modellering

Vinkelret halveringslinje - det geometriske sted

Forholdet mellem central og perifer vinkel

Cirkel tegnet rundt om trekant

# 4 Opgave 3

Havnebroen er ikke nær så spændende som Apollobroen. Men det er den bro, der leder den hurtige trafik hen over Donaufloden. Det er det første adgangssted for rejsende, der kommer med bil eller bus fra motorvej D1 for at se den gamle by. Og endnu en gang: hvor er det bedste sted til at se Apollobroen fra Havnebroen?

## 4.1 Sådan kan det løses

En mulighed kunne være at bruge konceptet om det geometriske sted. En anden er at bruge teorien om "power point" på cirklen. Lad os koncentrere os om den første.

Vi kan foretage nogle indstillinger og bruge GeoGebra til at lave en model over situationen. Vi lægger kortet over broerne fra Google Maps ind i GeoGebra og undersøger spørgsmålet her. Vi starter med at konstruere en linje *c* på den ene side af broen og et punkt *X* på denne linje. Derefter bruger vi værktøjet "Vinkel" i GeoGebra og måler vinklen *MXN*. Hvad nu, hvis punktet *X* (der ligger på linjen *s*) kan flytte sig langt linjen *c*? Flyt derefter med punktet *X* langs linjen, og se, hvad der sker med vinklen. Kan du forklare hvorfor?

**Hvordan kan vi finde ud af, hvor vinklen er størst?**
Hvordan hænger udsigtsvinklen sammen med afstanden fra genstanden? Hvor er det punkt på Havnebroen, hvorfra der er den største udsigtsvinkel alt efter afstanden fra genstanden - Apollobroen?

Forestil dig f.eks. et punkt i floden. Hvordan er det forbundet med cirklerne, hvis centre er på den vinkelrette halveringslinje? Vi undersøgte det i spørgsmål 2. Vi ved fra spørgsmål 1, at centrum af cirklen ligger på den vinkelrette halveringslinje, men vi ved ikke præcist hvor. Vi leder efter centrum $S_x$ for cirklen $k_x$, der vil have berøring med linjen s og gå gennem punkt M og N.

**Hvordan kan vi finde ud af, hvor vinklen er størst?**
Vi kan lade de studerende komme med forslag, eller vi kan bruge tidligere forslag. Lad f.eks. de studerende undersøge spørgsmålet vha. cirkler i GeoGebra, forsøge at få cirklen til at nærme sig punkterne *MN* og linjen *c*. Vi kan derefter tale med de studerende om, at det formentlig opfylder vores formål, men at det ikke er matematisk nøjagtigt.

Lad os gå baglæns - flytte vores tanker fra slutresultatet og gå bagud. Den proces vil føre os til en løsning. Vi har brug for at undersøge den endelige løsning. Vi skal se efter et geometrisk sted med samme afstand fra linjen og punkterne *M* eller *N*. **Hvilket geometrisk sted ligger lige langt fra punkt *M* og fra linjen *c*?**

Metatænkning og metakommentarer er meget væsentlige element som en del af undersøgelsesprocessen.

Vi kan dele spørgsmålet op i to.

A) Hvilket geometrisk sted beskriver centrum af de cirkler, der rører ved to faste punkter?
B) Hvilket geometrisk sted beskriver centrum af de cirkler, der rører ved en fast linje, og som går igennem et fast punkt?

A) Vi undersøgte det i spørgsmål 2.

B) Til at begynde med bruger vi en induktiv tilgang for bedre at kunne forstå konceptet. Først skal vi overveje, hvilken udsigtsvinkel er størst?

Vi kan tegne cirkler på planet, der rører ved linjen og et punkt.

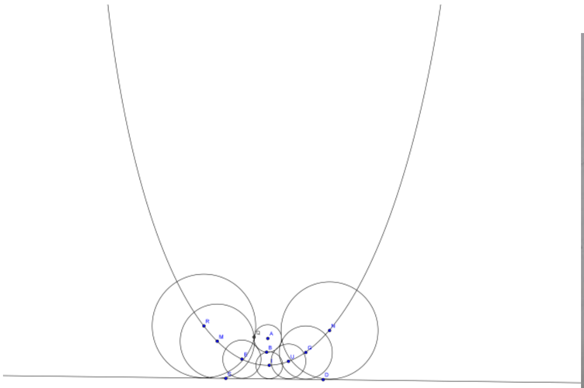


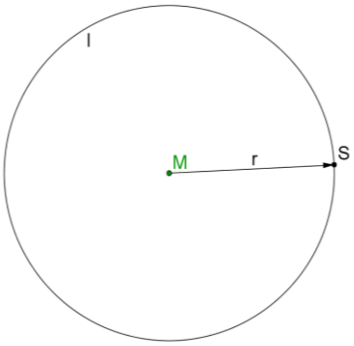
**Fig. 12** Undersøgelse af parabler i Geogebra **Fig. 13** Undersøgelse af paraboler på papir

For at definere det ønskede geometriske sted vil vi gerne bruge den viden, vi har fået om cirkler og geometrisk konstruktion. (Denne tilgang er for erfarne matematikstuderende, der kan bruge deres viden i nye situationer til at undersøge nye koncepter.)

Vi kan nu gå fra kortet over til den universelle model, fordi vi ikke ved præcist, hvor punktet *S* (centrum af den ønskede cirkel) ligger.

1: Vi kan vælge et punkt og kalde det punkt *M*, der er givet på planet. (Vi kan ikke flytte det. Det er i virkeligheden end af broens ender.) Hvad er det punktsæt, der er lige langt fra et givet punkt?

Det er en cirkel med centrum i punkt *M* og en konstant afstand *r* - radius.



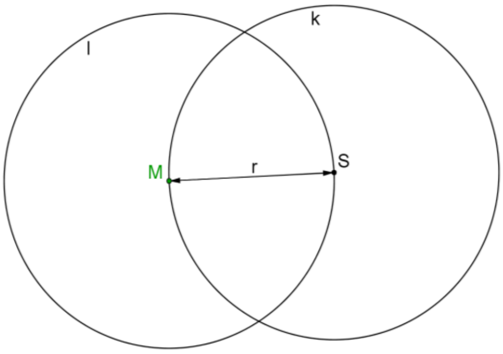




**Fig. 14** Undersøgelse af paraboler - trin 1 **Fig. 15**Undersøgelse af paraboler - trin 2

Forstil dig nu et punkt på cirkelperiferien, der kan flyttes frit rundt. Lad os vælge et punkt og kalde det punkt *S*. Dette punkt ligger på cirklen *l*. Tilsvarende vælger vi punktet *M* også på cirklen *k*, der har samme centrum som *S*.

Tilføj nu linjen *p* til dine overvejelser. Denne linje er tangent til cirklen i punkt *T*, som er forskelligt fra punkt *M* og ligger på cirklen *k*. Fordi p tangerer cirklen *k* ved vi, at ST er vinkelret på linjen *p*. Ud fra definitionen af den cirkel, vi talte om i begyndelsen af vores overvejelser, ved vi også, at SM = ST.

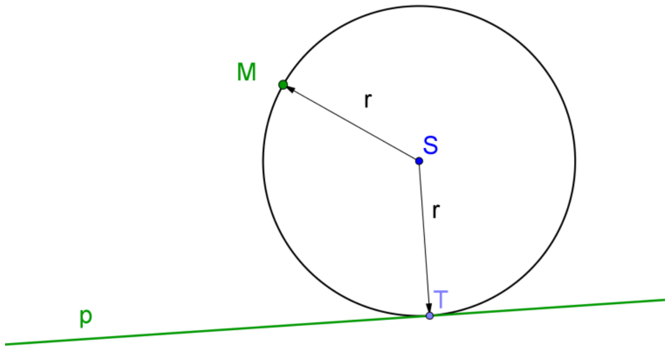



**Fig. 16** Undersøgelse af paraboler - trin 3

Det væsentlige er, at punkt *T* ikke er fast, så vi kan frit flytte det hen ad linjen p. Til gengæld er punkt M fast.

Hvad kan vi sige om afstanden fra punkt S til M og afstanden fra punkt S til linje p, når vi flytter cirklen (vi flytter den ved punkt T)? Flyt punkt T, og prøv at forudsige, hvad der sker. Hold øje med, hvad der sker.

M_S_p.html

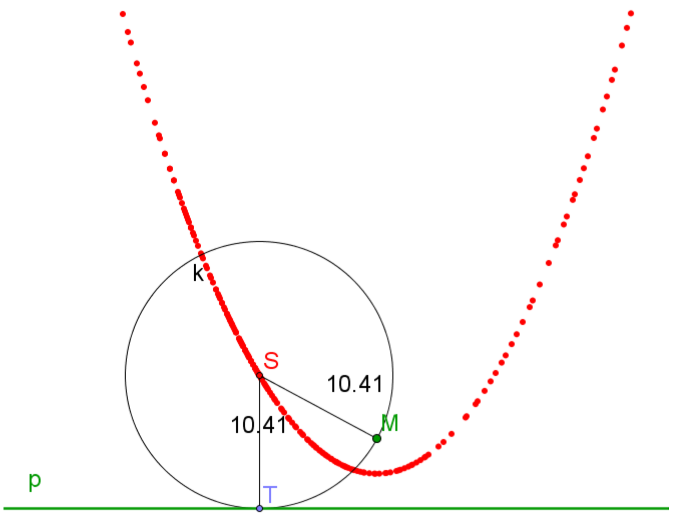



**Fig. 17** Formodning om linje og punkt for det geometriske sted

Forestil dig, at punkt S trækker røde punkter efter sig. Igen - hvad er navnet på dette geometriske sted?

- Kurven er en parabel. : den er sættet af alle de punkter på planet, hvis afstand fra et fast punkt *M* er lig med deres afstand fra den faste linje *p*.

Hvor mange cirkler er der, som rører ved punkt M og linje p, og hvis radius er r? Hvor punkter er der på linjen?

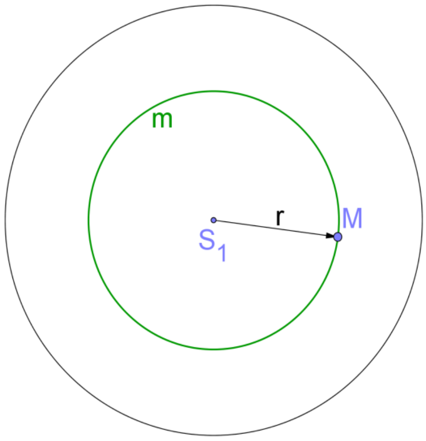
Vi har hidtil antaget, at punkt M er et fast punkt på planet. Hvad sker der, hvis vi lader punkt M flytte sig langs cirklen, f.eks. cirklen *m* med centrum J?

Lad os have en linje p og en cirkel m med centrum J. Forestil dig et punkt med samme afstand til denne linje og cirklen *m*. Hvor mange af den slags punkter er der? Hvilken form for geometrisk sted definerer de? Lad os igen gøre det trin for trin:

Forestil dig nu, at punktet *M* kan flyttes frit gennem den givne cirkel *m* med centrum $S_1$.

- Hvad er det punktsæt, der er lige langt fra en given cirkel?

Det er en koncentrisk cirkel.



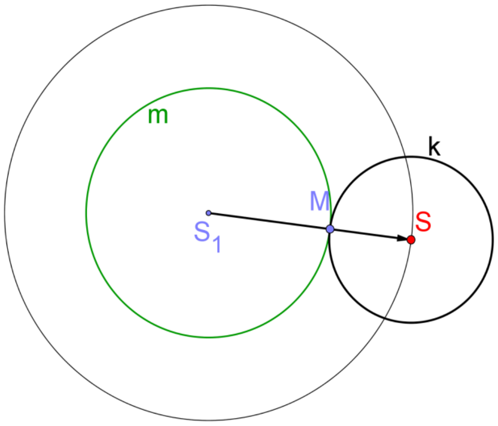




**Fig. 18** Undersøgelse af parabler - trin 1 med cirkel **Fig. 19** Undersøgelse af parabler - trin 2 med cirkel

Denne koncentriske cirkel er også et sæt af alle centre for cirkler, der rører en given cirkel *m*. Alle disse centre er lige langt fra det givne centrum $S_1$.

Opgaven med at finde sættet af alle centre for de cirkler, der rører en fast linje og en fast cirkel, er således den samme som at skulle finde det sæt af alle centre for de cirkler, der rører ved en fast linje, og som går igennem et fast punkt.

[parabola_aplet_k_p.html](parabola_aplet_k_p.html)

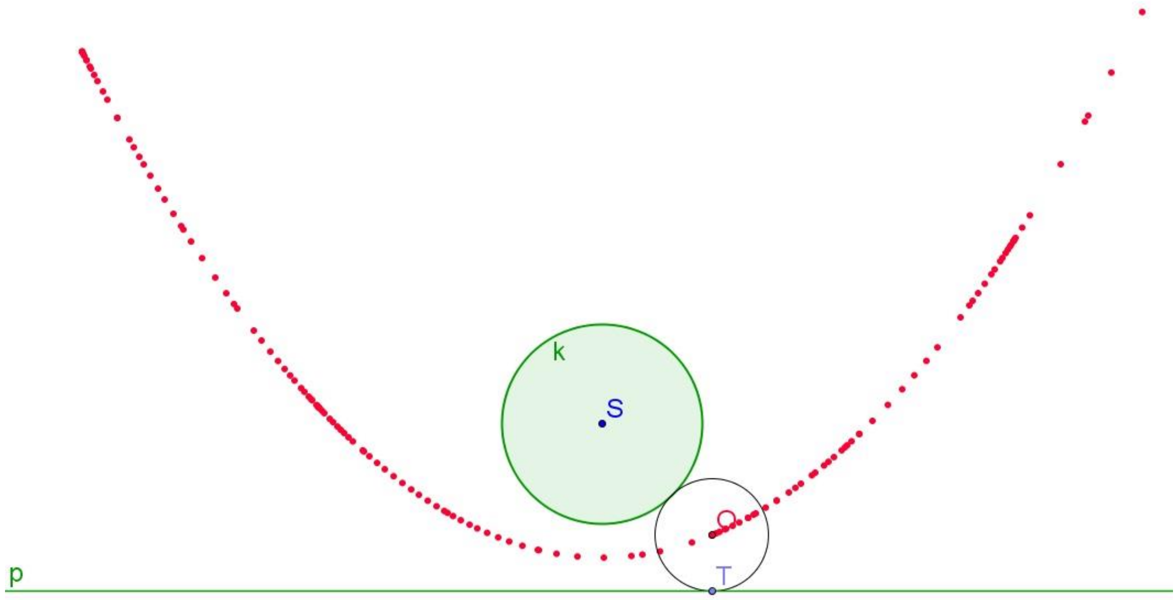



**Fig. 20** Formodning om det geometriske sted og cirklen

Vi burde nu være klar til at gå tilbage til kortet og finde det bedste sted. Vi vil konstruere to geometriske steder for den vinkelrette halveringslinje til segment MN og parabolen til linje *s* og punkt M. Skæringspunktet for disse kurver giver os centrum af cirklen *k*, der er tegnet rundt om punkt M, N og linje *s*. Skæringspunkterne for denne cirkel og linje s giver os det "bedste sted", vi ønskede, så vi kunne se på Apollobroen fra Havnebroen.

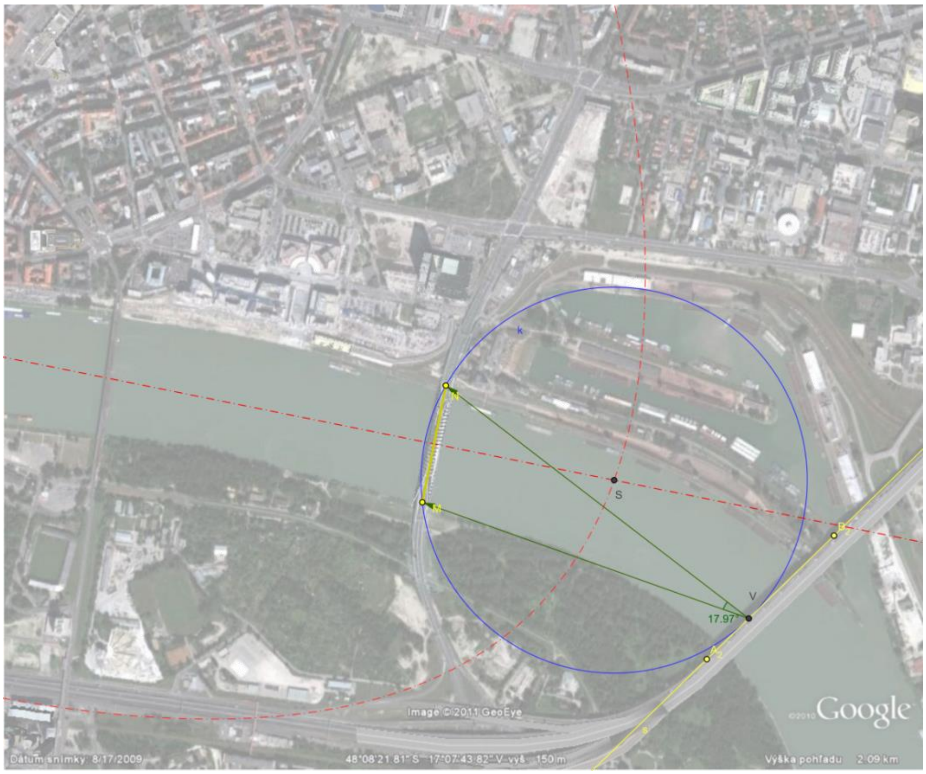



**Fig. 21** Anvendelse af tillært viden til løsning af opgave 3

## 4.2 Bemærkninger til læreren

Denne opgave er velegnet til 10. og 11. kl. (1. og 2. år af gymnasiet). Enkelte studerende kan have svært ved selv at finde løsningen. Der kan være flere, hvis de ikke er vant til at arbejde på denne måde. Selvom der kan være vanskeligheder, bør vi lade de studerende prøve at komme med forslag. Der burde også sættes tid af til, at de selv kan forsøge at finde deres egen tilgang til det.

Efter nogle forgæves forsøg kan man skabe et undersøgelsesforum med en mindre grad af åbenhed, som kan hjælpe de studerende med at bryde spørgsmålet op i mindre dele og således forstå hovedideen.

Ved at arbejde på denne måde kan man hjælpe de studerende med bedre at kunne forstå brugen af koniske kurver. Det kan også være med til at få dem til at arbejde på måder, der ikke kan lade sig gøre uden at bruge dynamiske geometriprogrammer.

Til slut beder vi de studerende samle deres resultater sammen og formulere en model (på en deduktiv måde), som kan fungere under forskellige omstændigheder og med forskellige genstande. Arbejdes der på denne måde, kan det måske være med til at få dem til at forstå, hvordan og hvorfra matematiske læresætninger kommer.

## 4.3 Matematiske begreber der udvikles

Parabol - geometrisk sted

Matematisk modellering

Anvendelse af modeller, udvikling af viden til at finde ud af løsningen på et problem fra den virkelige verden

Induktiv tankegang

Lave formodninger

# 5 Afsluttende opgave

Hvis vi tænker på, at en bekvem udsigtsvinkel ville være 36°, så kan vi generalisere vores løsning fra opgave 2 til et geometrisk sted, hvorfra vi kan se Apollobroen ved denne vinkel.

Vi kan igen lade de studerende komme med deres egne ideer.

Vi vælger konstruktionen af det geometriske sted, hvorfra vi kan se broen ved en 36° vinkel, ved at udregne vinklen i en ligesidet trekant. På denne måde kan vi udregne vinklen MSN, som skulle være 72°. Fra dette punkt kan vi lave en cirkel. Vi gør det samme med den anden side. Vi har derefter et sæt punkter med den bedste udsigtsvinkel til at se Apollobroen i Bratislava.

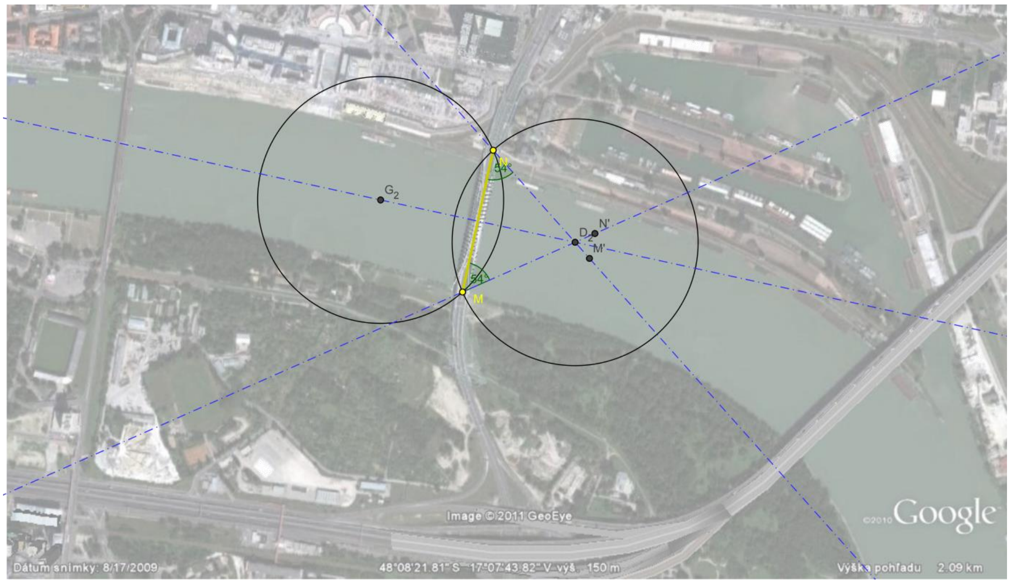



**Fig. 22** Løsning på indledende opgave (Google Maps)

**Fig. 23** Apollobroen (Wikimedia)

# 6 Yderligere undersøgelse

Hvordan ændres situationen, hvis vi i stedet bruger et kamera med et andet fokus?

Hvordan kan vi finde et sted på promenaden, hvorfra vi kan se to broer ud fra den bedste vinkel? Hvordan ændres situationen, hvis promenaden ikke er vinkelret på broen i opgave 2? Hvad ændres, hvis promenaden buer, som den gør mellem Apollobroen og Havnebroen? Hvor er så helt præcist det bedste sted at se Apollobroen fra?

Disse spørgsmål kan føre til opgaver med cirkler ud fra Apollonius' tanker. Det er måske bare et tilfælde, at Apollobroen lader os få øje på et cirkelproblem, hvor vi kan bruge Apollonius. Der er dog i virkeligheden mange flere eksempler, der ikke bare kan bruges i matematiktimerne.

Det er også vigtigt at lade de studerende bearbejde det, de har fundet ud af, på ensartet økonomisk vis, så de kan bruges til yderligere udforskning og opgaveløsning.

# 7 Diskussion

I vores undersøgelse benyttede vi os meget af tilnærmelse ved at lave skitser på et kort fra Google Maps i GeoGebra. Disse resultater var kun vejledende, men de kan opfylde vores formål med at udvikle de matematisk begreber. Det vil være fint at diskutere dette med de studerende. For at forbedre nøjagtigheden kan vi bruge GPS og tilføje koordinater, der vil hjælpe os med at finde det "bedste sted".

Cirkler kan studeres og bruges på mange måder. I vores artikel brugte vi cirkler som et begreb, de studerende kendte. I forbindelse med undersøgelsen hjalp cirklerne dem med at forstå det nye begreb ved at løse en opgave. Vi vil gerne endnu en gang understrege, hvor vigtigt det er at foretage undersøgelsen vha. cirkler. Det er selvfølgelig alt for omfattende at komme ind på det i denne artikel. Vi ønskede at vise i det mindste et lille eksempel på, hvordan man kan gå om bord i disse begreber og give læseren et udgangspunkt for yderligere undersøgelser.

# 8 Konklusion

Processen med at undersøge og stille spørgsmål er selve essensen af matematik, hvor man forsøger at besvare spørgsmål ud fra forespørgsler. Vi ville gerne simulere en proces, som ville kunne bruges i klasseværelset.

Uløste spørgsmål er som en finger, som prikker til matematikernes nysgerrighed og giver lyst til at finde svaret. Så lad os også gøre det. Vi ser det uløste spørgsmål som en finger, der giver de studerende "behov" for at finde løsningen. Det er derfor, vi gerne ville mere eller mindre vende de traditionelle opgaver i lærebøger om, så de kom tilbage til selve det, der karakteriserer matematisk undersøgelse.

Vi benægter selvfølgelig ikke den fordel, der er ved at lære teorien og at bruge en deduktiv tankegang. Vi ser processen med at finde sin egen metoder som en dynamisk proces inden for matematikundervisningen, som kan understøtte de studerendes forståelse.

# Referencer

[1] Banwell, C.S., Saunders, K.D., Thata, D. *Starting points*, Tarquin Publications, Norfolk, 1986, ISBN 0906212510