Hvernig skal leggja saman óendanlega langar summur...

Michaela Klepancová, Marek Varga, Lucia Záhumenská
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

Samlagning er ein af grunnreikniaðgerðunum. Þessi vel þekkta og tiltölulega auðvelda aðgerð þegar lagðar eru saman tvær, þrjár, fjórar, o.s.frv. tölur verður að óvæntu vandamáli þegar kemur að því að leggja saman óendanlega margar tölur. Fólk komst í kynni við þetta vandamál í fyrsta skipti í forn-Grikklandi.

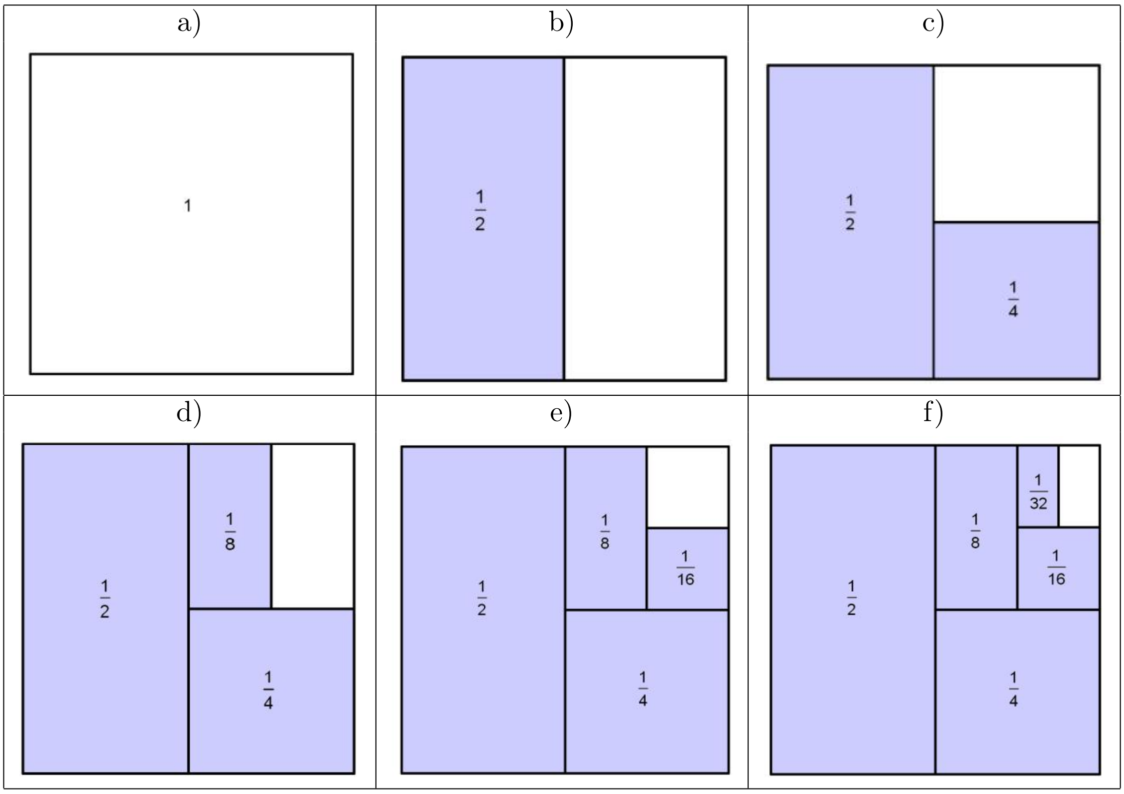
Leyfum okkur að nefna tvær sögur, þekktar sem þversagnir Zenos. Í þeirri fyrri ímyndum við okkur bogmann í fjarlægð d frá skotmarkinu sem hann miðar á. Örin þarf því að ferðast alla vegalengdina d áður en hún hittir skotmarkið. Þetta þýðir einnig að örin þarf að komast yfir hálfa vegalengdina, þ.e. fjarlægðina $\frac{d}{2}$. Hún þarf síðan að ferðast helminginn af afgangi vegalengdarinnar, sem er $\frac{d}{4}$. Af afgangi fjarlægðarinnar þarf hún fyrst að ferðast helminginn á ný, þ.e. fjarlægðina $\frac{d}{8}$, o.s.frv. Það lítur út fyrir að örin þurfi að ferðast ákveðna afgangsfjarlægð að skotmarkinu á öllum timum, með öðrum orðum - hún hittir aldrei skotmarkið.

Sömu niðurstöðu má finna í sögunni um Akkilles og skjaldbökuna. Akkilles, einn mesti stríðsmaður grískrar goðafræði, er í kapphlaupi við skjaldböku. Þar sem hann er viss um að vinna gefur hann skjaldbökunni forskot, táknum þá vegalengd með α. Er kapphlaupið hefst hleypur Akkilles, að sjálfsögðu, mun hraðar og án vandræða ferðast hann vegalengdina α. Hinsvegar beið skjaldbakan ekki eftir honum og hafði haldið áfram um vegalengdina β. Það tekur Akkilles því meiri tíma að hlaupa þá vegalengd, látum hana vera ótiltekna stutta fjarlægð, og á því tímabili ferðast skjaldbakan aðra stutta vegalengd γ. Akkilles þarf því að fara að þessum þriðja punkti, en í hvert skipti sem Akkilles kemst á einhvern stað þar sem skjaldbakan var þarf hann að ferðast enn lengri vegalengd vegna þess að skjaldbakan heldur ferð sinni áfram. Við tökum eftir því að jafnvel vandlega valinn keppinautur getur aldrei tekið framúr jafnvel hinni mest hægfara skjaldböku.

Þrátt fyrir þetta þá kennir raunveruleikinn og reynslan okkur að það væri ólíklegt að einhver stæði andspænis skotinu fullviss um að skotið næði honum/henni aldrei. Ef til vill myndu enn færri keppa við skjaldbökuna; þeir væru vissir um að þeir gætu tekið fram úr henni auðveldlega. Hvers vegna skyldu þá vera slíkar augljósar mótsagnir í greiningu aðstæðnanna sem settar voru fram?

Uppruni verkefna okkar (eða nánar tiltekið verkefna klassískra grískra stærðfræðinga og heimspekinga) liggur í þeirri staðreynd að hreyfingu örvar - hreyfifræðilegt kerfi - var skipt upp í nokkrar kyrrstæðar aðstæður. Engu að síður, hve mikið af slíkum kyrrstæðum aðstæðum þurfum við að nota til þess að „setja saman" allt hreyfiferlið? Eftir að við færum verkefnið yfir á tungumál stærðfræðinnar komumst við að því að við þurfum að leggja saman óendanlega margar tölur.

Ímyndunarafl mannsins á því tímabili sem nefnt var (og að öllum líkindum í nútímanum einnig) neitaði einfaldlega að sætta sig við þá staðreynd að með því að leggja saman óendanlega margar tölur (eða nákvæmar, óendanlega margar jákvæðar tölur) sé mögulegt að fá endanlega summu - endanlega rauntölu. Til þess að skýra út ofannefnda staðreynd reynum við að nálgast hana með því að nota einfaldar myndir. Búið til ferning með gefna hlið $a = 1$. Skiptið ferningnum niður í tvo eins rétthyrninga, sem augljóslega hafa flatarmálið $\frac{1}{2}$. Veljið annan af þeim og skiptið honum upp að nýju í tvo eins hluta - í þetta skiptið eru hlutarnir með flatarmálið $\frac{1}{4}$. Veljið annan þeirra og skiptið honum í tvo eins rétthyrninga með flatarmál $\frac{1}{8}$. Með því að halda þessu ferli áfram óendanlega oft mun allur grunnferningurinn með flatarmál $S = 1$ verða fylltur (sjá mynd 1). Eðlilega ályktun sem draga má af þessu er að $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$.[*]



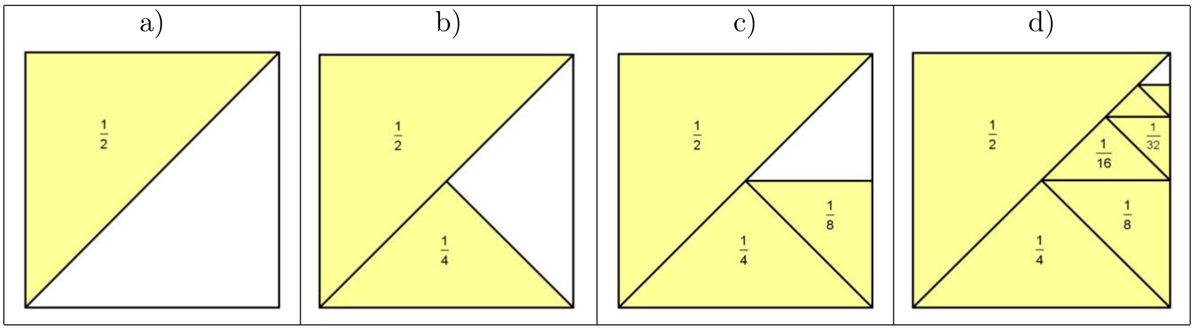
Mynd 1: Talnaröðin $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Leyfum okkur að nefna að, til er mjög hentugt táknmál til þess að tákna óendanlega talnaröð, nefnilega

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

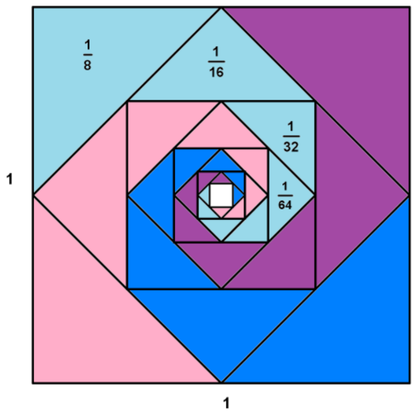
Reynið nú að sýna fram á að niðurstaðan sem við fengum er óháð því hvernig við skiptum gefna ferningnum upp. Til þess að gera það, búið til annan ferning með hlið $a = 1$. Skiptið honum eftir hornalínu í tvo jafna hluta - tvo rétthyrnda þríhyrninga með flatarmál $\frac{1}{2}$. Veljið annan þeirra og skiptið honum upp eftir hæð hans á langhliðina í tvo aðra eins rétthyrnda þríhyrninga með flatarmál $\frac{1}{4}$. Skiptið öðrum þeirra eftir hæð hans á langhliðina í aðra rétthyrnda þríhyrninga, sem nú eru með flatarmál $\frac{1}{8}$. Ef við höldum þessu ferli áfram út í óendanleikann (sjá mynd 2) er sammengi allra þessa þríhyrninga upprunalegi ferningurinn þ.a. með því að leggja saman flatarmál allra þríhyrninganna sem við bjuggum til fáum við flatarmál gefna ferningsins. Því getum við aftur ályktað að $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$.

[*] Ef við lítum á dæmið með örina á svipaðan hátt, sést auðveldlega að örin hittir skotmarkið í fjarlægðinni d frá bogmann. Því að um summu hlutanna, sem örin ferðast yfir, gildir $\frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \ldots + \frac{d}{2^n} + \ldots = d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = d$.



Mynd 2: Talnaröðin $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Með örlitlum breytingum má yfirfæra þessar hugmyndir á rúmið ef við tökum tening með hliðarlengd $a = 1$. Við getum auðveldlega fundið tvær skiptingar á teningi sem eru þá jafngildar skiptingunum á ferningnum, þ.e. rúmmál eininganna sem við fáum út eru í heild jöfn rúmmáli teningsins. Við myndum því sannreyna að $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Leyfum okkur að bæta við - án ítarlegri greiningar - einu sjónarhorni í viðbót á röðina $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$. Ferningur með hlið $a = 1$ myndi koma að gagni á ný. Finnið miðpunkta hliðanna. Með því að tengja þá saman fáum við annan ferning og höldum þessu ferli áfram. Þá er ljóst af mynd 3 að $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{4}$. Með því að bæta fyrstu tveim liðunum við fáum við jöfnuna $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

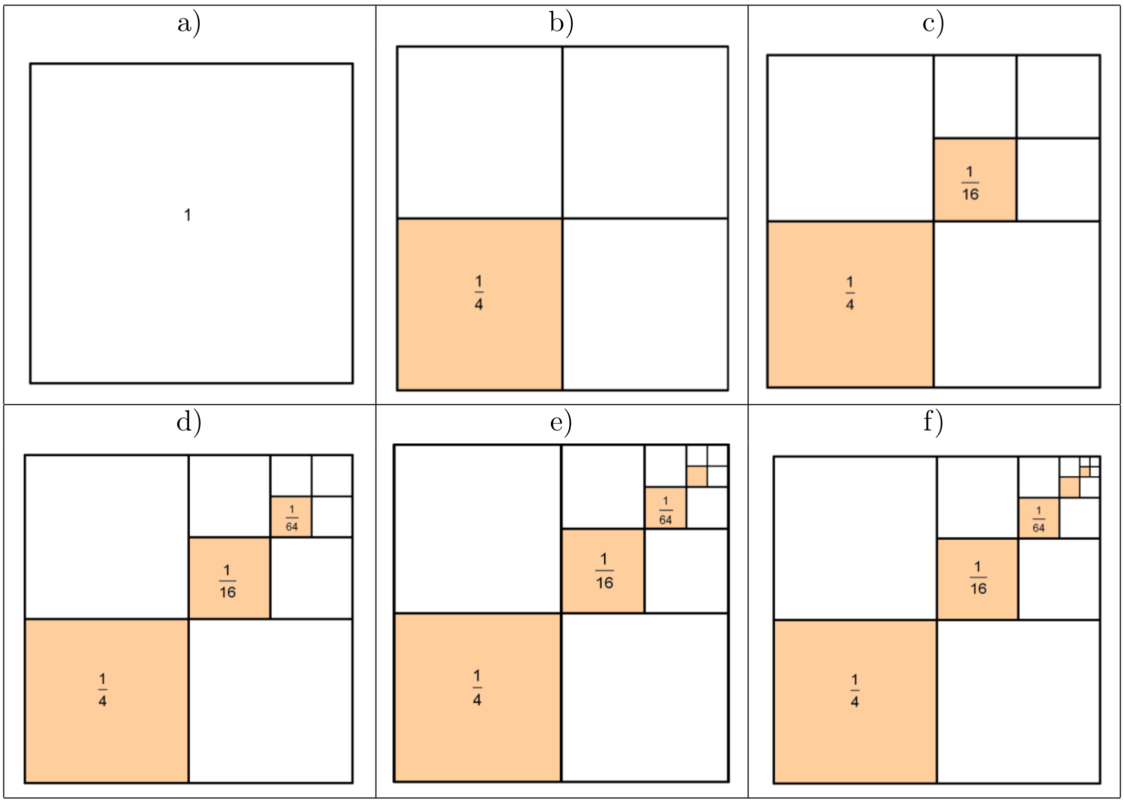


Mynd 3: Talnaröðin $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Hugmyndirnar sem settar hafa verið fram gefa til kynna að summa óendanlega margra jákvæðra talna geti í raun verið endanleg rauntala. Sönnum nú að röðin $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ hafi enga sérstöðu - þ.e.a.s. komast má að sömu niðurstöðu þegar skoðaðar eru margar mismunandi óendanlegar talnaraðir. Við munum nota einfaldar myndir til þess að skýra þetta betur.

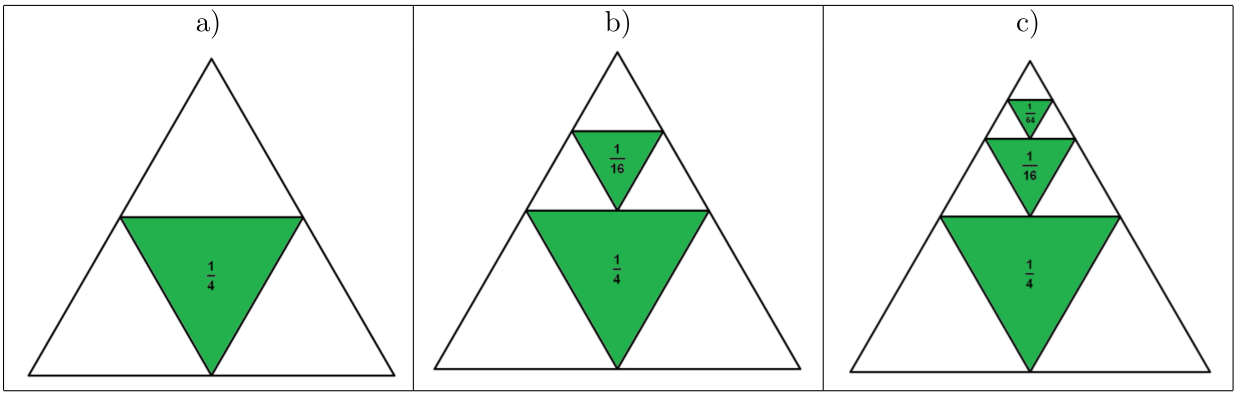
Ferningur reyndist vera gott verkfæri í ofannefndu dæmunum - smíðið því á ný ferning með gefna hlið $a = 1$. Skiptið honum upp með tveimur miðlínum í fjóra minni ferninga, hver þeirra með flatarmálið $\frac{1}{4}$. Veljið einn þeirra og skiptið honum upp á sama hátt í fjóra eins minni ferninga sem hver hefur flatarmál $\frac{1}{16}$. Eins og búast má við, veljið á ný einn af þessum ferningum og skiptið honum upp á sama hátt í eins ferninga með flatarmál jafnt $\frac{1}{64}$. Endurtakið skiptingunna nú óendanlega oft (sjá mynd 4), og takið eftir lituðu ferningunum í myndinni. Summa flatarmálanna, þ.e. summan $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$, fyllir augljóslega upp þriðjung af heildarflatarmáli upprunalega ferningsins. Fáum þar af leiðandi

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots = \frac{1}{3}, \text{ þ.e. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}.$$



Mynd 4: Talnaröðin $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$

Þið skuluð ekki treysta öllu því sem þið sjáið svo við skulum sannreyna þessa niðurstöðu á annan hátt. Við hættum að skoða einungis ferninga og prófum að nota jafnhliða þríhyrning (lengd hliðarinnar skiptir ekki máli), látum flatarmál hans vera táknað með S. Með því að tengja miðpunkta hliða þríhyrningsins saman fáum við fjóra eins jafnhliða þríhyrninga, hver augljóslega með flatarmálið $\frac{S}{4}$. Veljið einn af þeim og búið til fjóra eins jafnhliða þríhyrninga með hjálp miðlínanna þ.a. hver hafi flatarmál $\frac{S}{16}$. Eftir þriðja skrefið fáum við aðra fernu af jafnhliða þríhyrningum, í þetta skipti með flatarmál $\frac{S}{64}$. Við getum haldið þessu ferli áfram út í óendanleikann (sjá mynd 5) og fáum þar með mengi þríhyrninganna sem eru litaðir á myndinni okkar. Með tilliti til flatarmálsins sem þau ná yfir í upprunalega þríhyrningnum má fullyrða að jafnan $\frac{S}{4} + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \ldots + \frac{S}{4^n} + \ldots = \frac{S}{3}$ sé gild, og nánar eftir deilingu með S, sem ekki er núll, fáum við jafngildu jöfnuna $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots = \frac{1}{3}$.

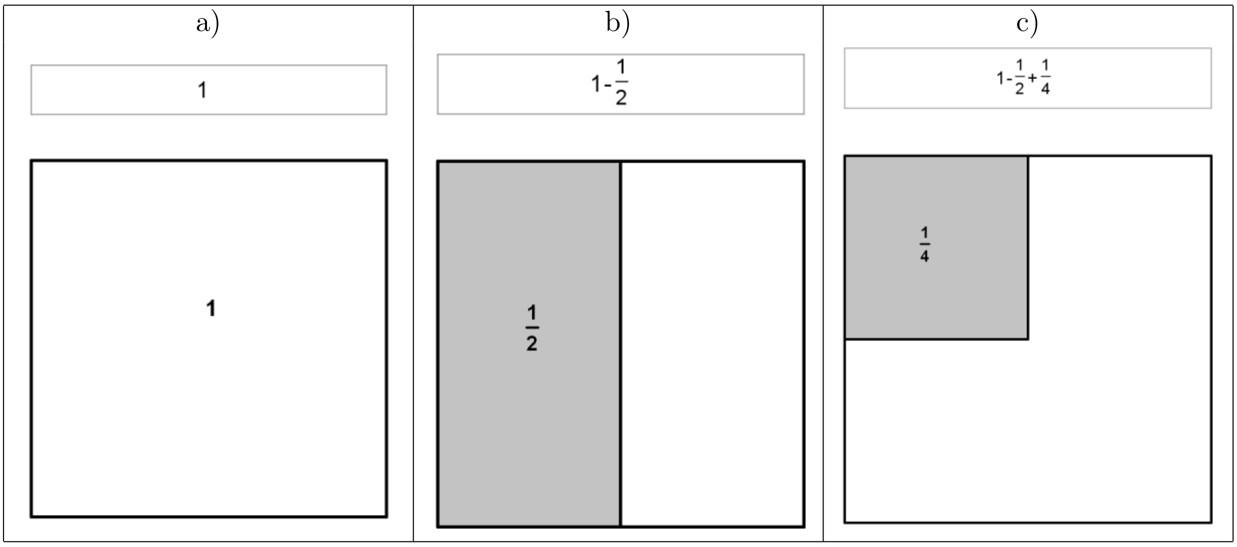


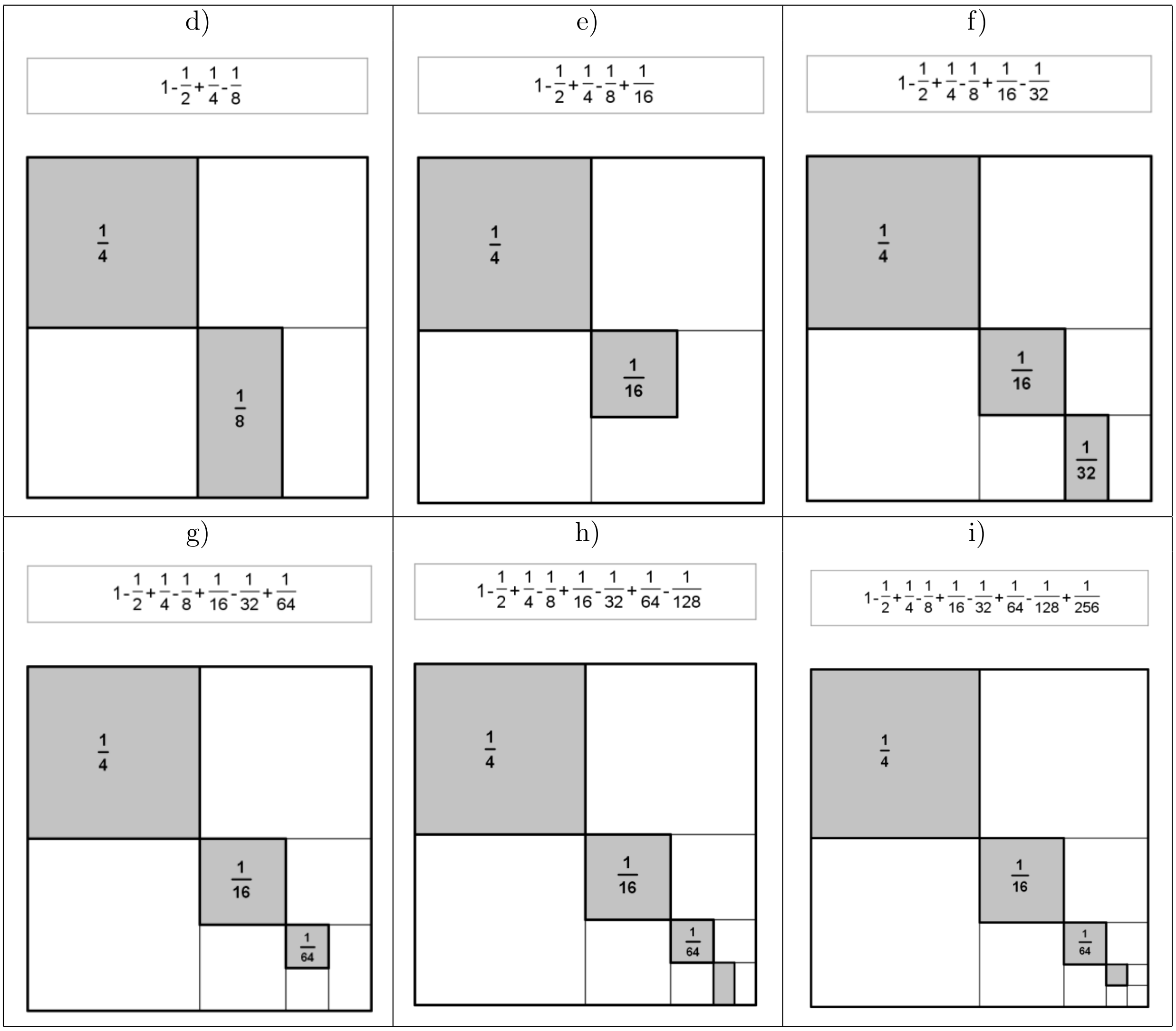
Mynd 5: Talnaröðin $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$

Hingað til hefur öll áhersla verið lögð á summu óendanlega marga jákvæðra talna. Við skoðum nú almennara verkefni: Getur summa óendanlegra margra jákvæðra og neikvæðra talna verið endanleg tala? Við nálgumst þetta verkefni einnig rúmfræðilega.

Til að byrja með, veljum við röðina $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$ þannig að við getum notað eina af áðurnefndu myndunum til þess að skoða þetta verkefni. Við smíðum aftur ferning með $a=1$ og skiptum honum á sama hátt og við gerðum fyrir mynd 4. Þrátt fyrir það verður útlitið annað - í fyrra tilfellinu skoðuðum við lituðu formin, í þessu tilfelli er það afgangurinn sem við höfum áhuga á. Lýsingin á aðferðinni sést á mynd 6. Athugið að það eru ólituðu hlutarnir sem eru mikilvægir. Þeir mynda smám saman tvo þriðju hluta upprunalega ferningsins og við getum því skrifað

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}.$$

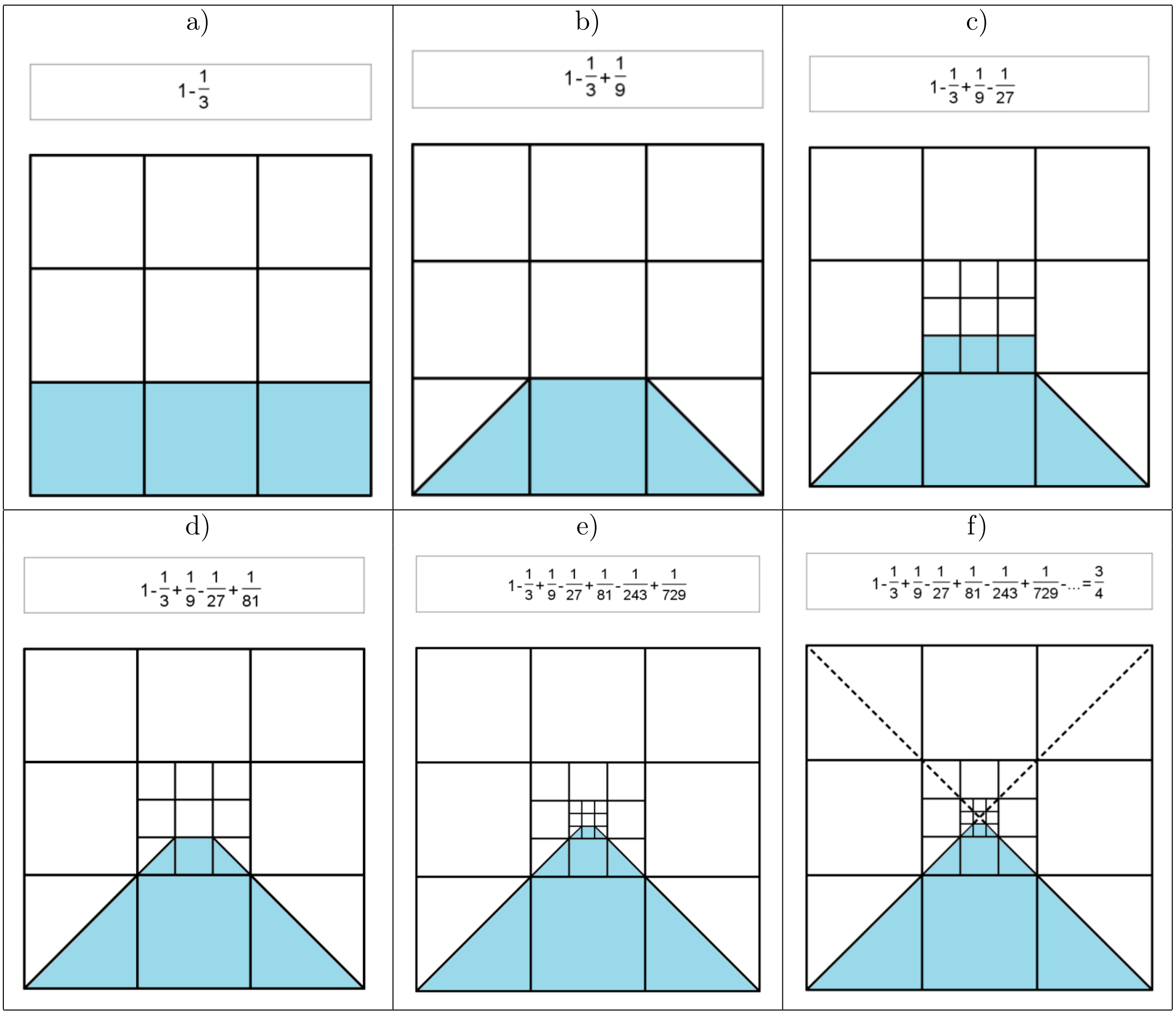




Mynd 6: Talnaröðin $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$

Skoðum annað svipað dæmi, við vinnum með óendanlegu talnaröðina $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots$. Þótt ótrúlegt megi virðast nægir að nota ferning með hlið $a = 1$ á ný til þess að sanna þetta. Aðferð skiptingarinnar má lesa úr mynd 7. Ólituðu svæðin sem fást hafa heildarflatarmál sem er jafnt þremur fjórðungum ferningsins. Þetta þýðir að við fáum jöfnuna

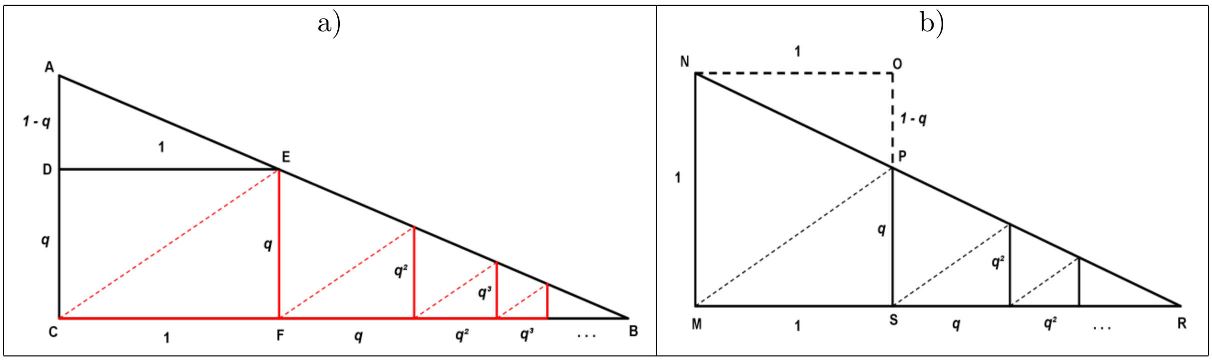
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}.$$



Mynd 7: Talnaröðin $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

Óendanlega talnaröð, eins og þær sem við höfum unnið með, má almennt skrifa sem $q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots$ eða $\sum\limits_{n-1}^{\infty} q^n$ og er slík röð nefnd kvótaröð, talan q er fastur kvóti raðarinnar. Vert er að nefna að gildin á fasta kvótanum $q \in (-1;1)^{**}$ voru ekki valin af tilviljun, þar sem þettu eru þau tilfelli þar sem summa kvótaraðar eru endanleg. Ef við látum s tákna summu raðarinnar $\sum\limits_{n-1}^{\infty} q^n$, þá höfum við nú þegar kynnst tilfellunum: $q=\frac{1}{2} \Rightarrow s=1, q=\frac{1}{4} \Rightarrow s=\frac{1}{3}, q=-\frac{1}{2} \Rightarrow s=\frac{2}{3}, q=-\frac{1}{3} \Rightarrow s=\frac{3}{4}$. Við reynum nú að finna almenna formúlu fyrir summunni S, reynum við að að finna formúluna sem þörf er á með hjálp rúmfræðilegra skissa og hugleiðinga.

** Við vinnum ekki með augljósa tilfellið $q=0$.



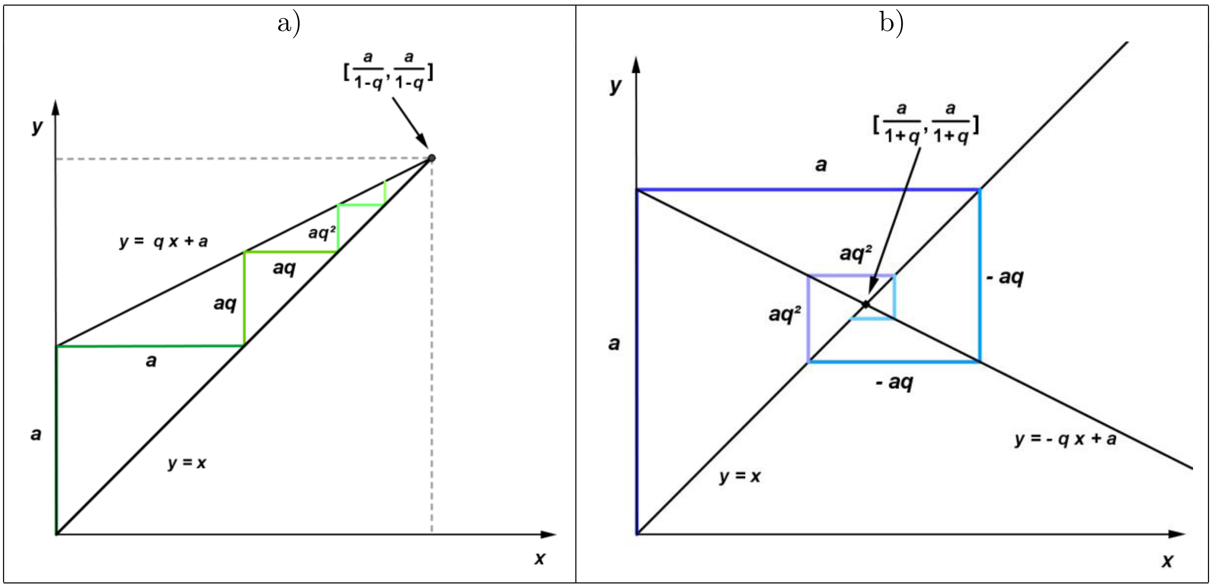
Mynd 8: Talnaröðin $1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$

Byrjið á því að búa til rétthyrninginn CFED, þar sem $|CF| = 1$, $|CD| = q$. Smíði punktsins A er augljós út frá mynd 8a, sama gildir um punkt B sem kemur fram sem skurðpunktur hálflínanna AE og CF. Einslögun þríhyrningsins CFE og allra lituðu þríhyrninganna gefur til kynna að lengdir lóðréttu strikanna séu q, q^2, q^3, o.s.frv. Frá einslögun þríhyrninganna DEA og CBA fáum við jöfnuna

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}.$$

Einnig er vert að nefna að þessa niðurstöðu má fá út frá „fyllingu" ferningsins $MSON$ á mynd 8b og með því að nota einslögun þríhyrninganna NPO og MRN.

Þannig fáum við einfalda formúlu fyrir summu raðarinnar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Við játum að aðstæðurnar voru einfaldaðar því fyrsta staki raðarinnar er talan 1. Hvernig mundi þetta líta út í almenna tilfellinu, þ.e. í tilfelli raðarinnar $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...$?



Mynd 9: Talnaraðir $a + aq + aq^2 + +... + aq^n + ...$, og $a - aq + aq^2 + ... + a\left(-q\right)^{n-1} + ...$,

Skoðið mynd 9a. Teiknið beinar línur $y = x$ og $y = qx + a$ í hnitakerfi. Seinni línan sker $y-$ásinn í fjarlægð a frá núllpunkti hnitakerfisins. Lengd línu-striksins sem liggur samsíða $x-$ásnum frá skurðpunktinum að beinu línunni $y = x$ er jöfn a. Lengd lóðrétts línustriks frá línunni $y = x$ að línunni $y = qx + a$ er aq. Áframhaldandi myndsmíði lituðu hlutanna er augljós. Á hinn bóginn samsvara bæði hnit skurðpunkts gefnu línanna summu allra einstöku hlutanna og út frá því fæst jafnan

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \frac{a}{1-q}.$$

Mynd 9b sýnir myndrænt samlagningu liðanna í röðinni $a - aq + aq^2 - ... + a\,(-q)^{n-1} + ...$ með því að nota línurnar $y = x$ og $y = -qx + a$.

Það lítur út fyrir það að summa óendanlegrar kvótaraðar sé háð fyrsta staki raðarinnar ásamt fasta kvótanum. Að lokum skulum við sannreyna formúluna sem við fengum með einföldum útreikningum. Gerum ráð fyrir að summa kvótaraðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ sé jöfn gildinu s, þ.e. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = s$ svo $s = a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...$ Margfaldið jöfnuna með tölunni q $(q \neq 0)$. Þá fæst $sq = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ...$ Með því að taka mismun þessara tveggja jafna fáum við $s - sq = a$, sem gefur $s = \frac{a}{1-q}$, en það er formúlan sem við fengum út frá myndunum.

Heimildir

[1] Fulier, J., $\breve{(S)}$edivý, O. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, UKF, Nitra, 2001

[2] *Analysis With An Introduction to Proof*, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2005

[3] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words*, The Matematical Association of America, 1993

[4] `http://www.prof.jozef.doboš.eu/MA1.pdf` (13. júlí 2011)