

## Geometri og bilhjul

Miroslava Sovičová, Štefan Havrlent, Lubomír Rybanský  
Constantine the Philosopher University Nitra, Slovakia

### 1 Introduktion

En matematiklærer der vil præsentere eleverne for noget nyt står ofte over for en stor udfordring. Det skal helst ske på en måde som hurtigt kan fange elevernes interesse, øge deres indre motivation og tilskynde dem til at engagere sig i arbejdet. En af mulighederne er at vække deres nysgerrighed ved hjælp af ting de kan se i deres daglige omgivelser. Sigtet med denne artikel er at introducere begreberne "regulær polygon" og "tangent" ved hjælp af aktiviteter med udgangspunkt i bilhjul.

Biler ser man næsten over alt. Eleverne er fortrolige med dem. Bilhjul kan på en naturlig måde bruges til at præsentere træk fra regulære polygoner og tangenter for børn i skolen.

### 2 Bilhjul og regulære polygoner

Almindeligvis defineres en regulær polygon som en ligesidet polygon hvor alle vinkler er lige store. I sammenhæng med bilhjul og deres eger er der fokus på polygonens sider og afstanden fra centrum ud til vinkelspidserne. Derfor vil vi her bruge følgende karakteristika for regulære polygoner: En polygon er regulær netop hvis og kun hvis alle sider er lige lange og alle vinkelspidser ligger i samme afstand fra polygonens centrum.

Det interessante i denne sammenhæng er at biler kan have meget forskellige egerantal. Imedens vi arbejdede med dette emne så vi alt fra to til tolv eger. Endog enkelte med et højere, uspecificeret antal.

#### 2.1 Euklidisk konstruktion af nogle regulære polygoner

Nogle regulære polygoner kan konstrueres udelukkende ved hjælp af lineal og passer - altså klassisk, Euklidisk metode. For at formidle sådanne opgaver til eleverne på en ny og utraditionel måde foreslår vi dem at kopiere bilhjul fra billeder eller eventuelt direkte fra biler på en parkeringsplads i nærheden af skolen.

##### Opgave 1

På billedet (Fig. 1) ser du et bilhjul med seks eger. Konstruer en kopi af bilhjulet med eger på dit papir. Diameteren af fælgen skal være 12 cm.



**Fig.1** Bilhjul med seks eger.

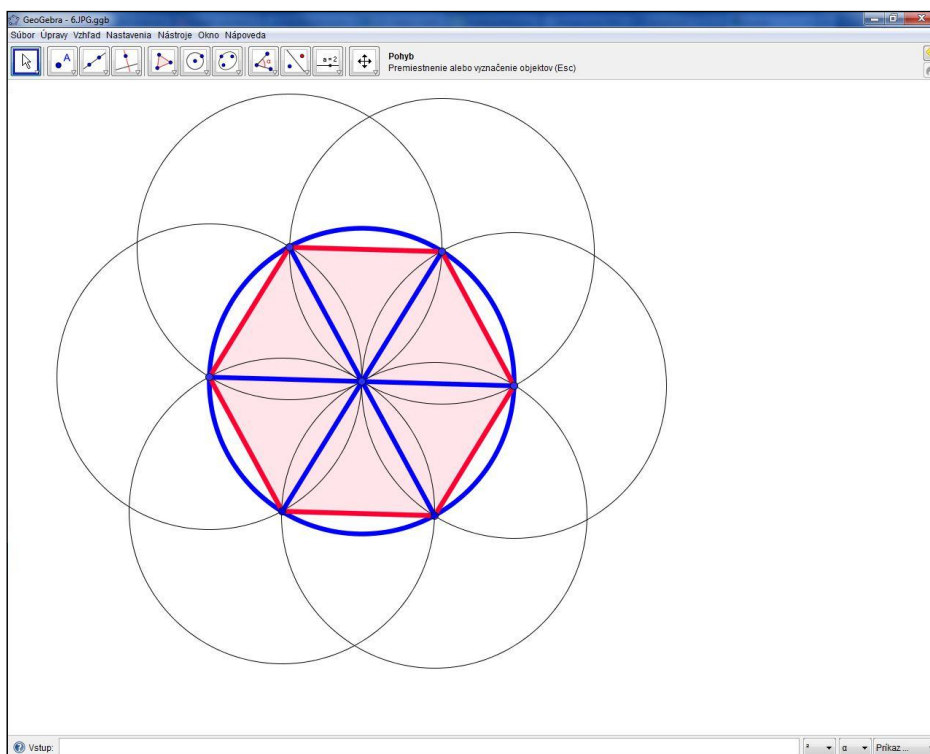
*Løsning:*

Det er vigtigt at eleverne indser at alle eger har samme længde. De svarer til linjestykker der går fra hjulets centrum til punkter på fælgen. Dvs. de går fra centrum ud til punkter på samme cirkel hvor de ligger med samme afstand (Fig. 2)



**Fig.2** Regulær sekskant på bilhjul med seks eger.

Opgaven for eleverne bliver at konstruere en regulær sekskant indskrevet i en cirkel med diameter 12 centimeter samt linjestykkerne der går fra sekskantens centrum ud til vinkelspidserne. Se Fig. 3.



**Fig.3** Den regulære sekskant konstrueret i GeoGebra.

## Opgave 2

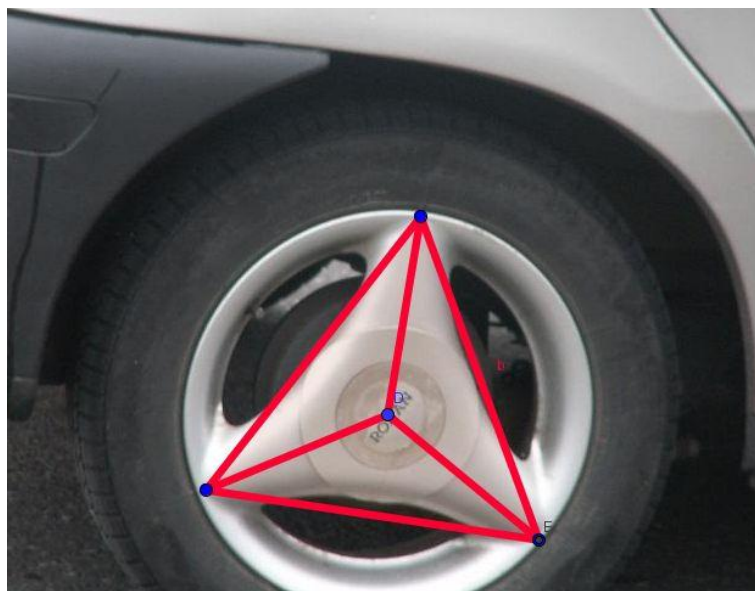
På billedet (Fig. 4) ser du et bilhjul med tre eger. Konstruer en model af dette hjul med eger hvor fælgdiameteren er 10 cm.



**Fig.4** Bilhjul med tre eger.

*Løsning:*

Den geometriske situation der skjuler sig bag dette tre-eger hjul handler om at indskrive en ligesidet trekant i en cirkel med diameter 10 cm. Cirkelns centrum er trekantens centroide, dvs. det punkt hvor medianerne mødes. Man kan se egerne som den lange del af medianerne regnet fra deres skæringspunkt (Fig. 5)



**Fig.5** Ligesidet trekant indtegnet på hjul med tre eger.

For at konstruere den ligesidede trekant indskrevet i cirklen konstruerer vi først en cirkel med diameter 10 cm. Dernæst konstrueres en linje gennem cirkelns centrum og en af trekantens vinkelspidser. Hvor denne linje skærer cirklen på den anden side af centrum konstrueres, med dette skæringspunkt som centrum, en ny cirkel med samme diameter som den første. Hvor de to cirkler skærer hinanden har vi trekantens to andre vinkelspidser og konstruktionen kan gøres færdig (Se Fig. 6).

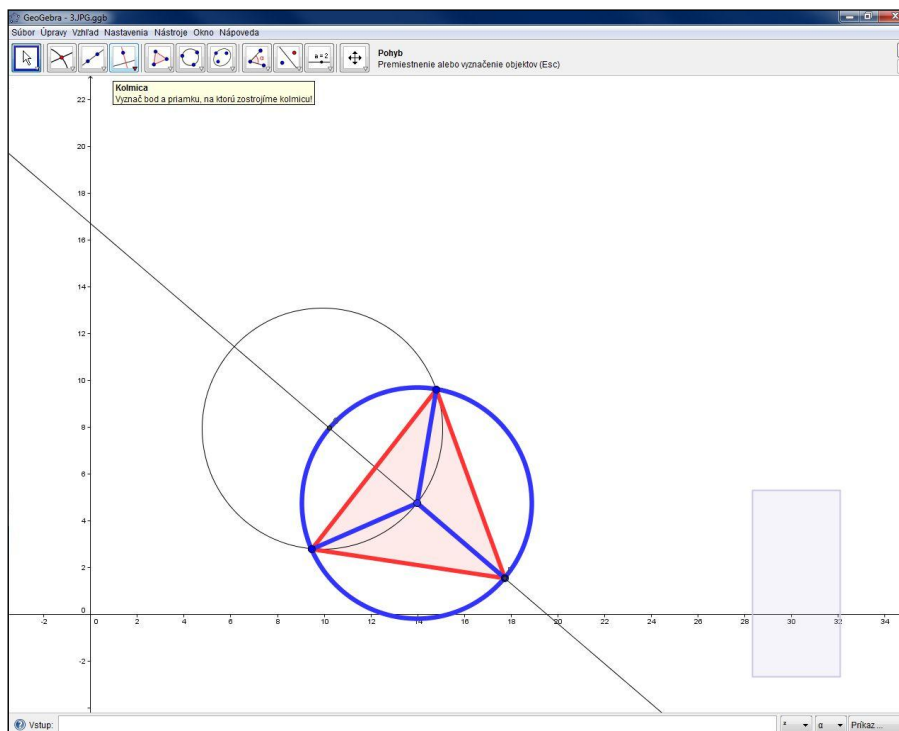


Fig.6 Den ligesidede trekant konstrueret i GeoGebra.

På samme måde kan lignende opgaver formuleres med udgangspunkt i bilhjul med andre antal eger udvalgt således at polygonerne kan konstrueres udelukkende med lineal og passer - altså ved klassisk Euklidisk konstruktion. Når man sætter denne begrænsning på konstruktionsmetoden bliver nogle af konstruktionerne særdeles udfordrende og rækker ud over folkeskoleniveau.

Dropper man begrænsningen bliver det noget lettere - med et redskab som GeoGebra til rådighed.



Fig.7 Flere eksempler på regulære polygoner indtegnet på bilhjul.

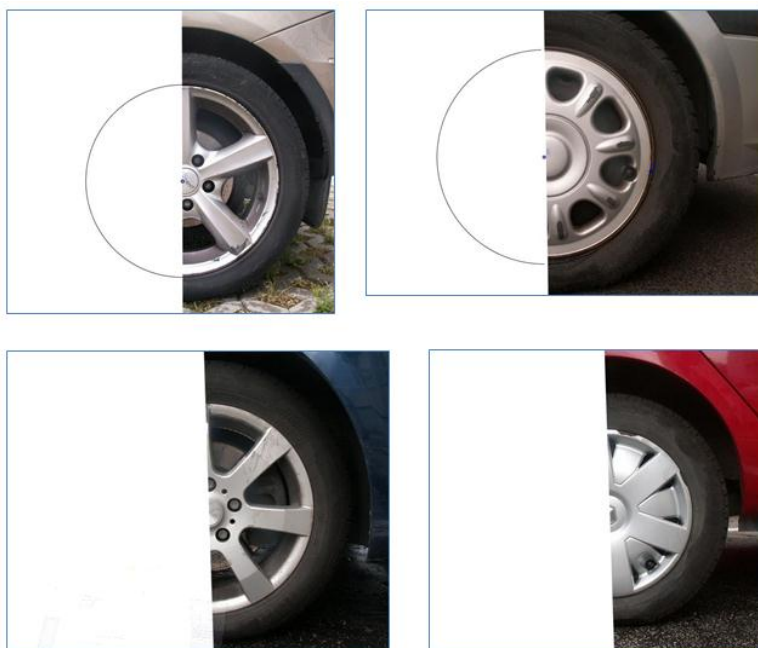
## 2.2 Aksesymmetri for regulære polygoner

Afhængigt af antallet af vinkelspidser har regulære polygoner forskellige symmetriakser. Hvis antallet af vinkelspidser er et ulige tal vil en sådan symmetriakse gå gennem en vinkelspids og midtpunktet af den modstående side. Hvis antallet af vinkelspidser er et lige tal vil den ene halvdel af symmetriakserne gå gennem par af modstående vinkelspidser og den anden halvdel gennem midtpunkterne for modstående sider.

Nedenfor er forslag til opgaver der kan støtte en gradvis udvikling af forståelse for disse påstande.

### Opgave 4

Tegn billederne af nedenstående bilhjul færdig så nøjagtigt som muligt. Sørg for at der er den rigtige afstand mellem egerne.



**Fig.8** Halve bilhjul til øvelser med aksesymmetri.

### Løsning:

For at få den mest præcise løsning skal eleverne indse at de skal arbejde med de synlige dele af egerne og betragte dem som halve symmetriakser for regulære polygoner. Billederne er valgt så både tilfælde med lige såvel som ulige antal eger kommer på tale så eleverne tvinges til at forholde sig til forskellene når billederne skal fuldendes.

### 3 Tangenter

Når man kører i bil sker det sommetider at en lille sten slynges op fra hjulet på den forankørende bil og rammer vindspejlet eller forenden af din bil og udretter skade.

#### Opgave 5

På dette billede ser du din bil og hjulet fra den forankørende bil. Tegn en skærm til hjulet foran dig så din bils frontrude ikke vil blive ramt af opslyngede sten.



Fig.9 Illustration til opgave 5.

#### Løsning:

En analytisk løsning til dette problem vil være alt for vanskelig før elever i folkeskolen, men det vil være overkommeligt at løse det grafisk.

Fra fysikken ved vi at en ting der slippes fri fra en cirkelbevægelse vil fortsætte ad tangenten til cirklen i det punkt hvor den frigives. En sten der har sat sig fast i et dækmønster fortager netop en cirkelbevægelse. I det øjeblik den slynges af sker det i tangentens retning. I princippet vil den, under indflydelse af tyngdekraften, følge en parabelbue - eller det ville den hvis vi kan se bort fra luftmodstanden. Men for at simplificere beskrivelsen forestiller vi os at den korte del af banen, som er af interesse i denne situation, netop er tangenten til hjulet.

Eleverne skal konstruere nogle tangenter til hjulet foran for at finde ud af hvilke sten der faktisk kan ramme forruden på bussen. Det viser sig at mulighederne afgrænses af de to tangenter som rammer henholdsvis overkant og underkant af forruden. Herved får man bestemt det område der skal dækkes af skærmen.

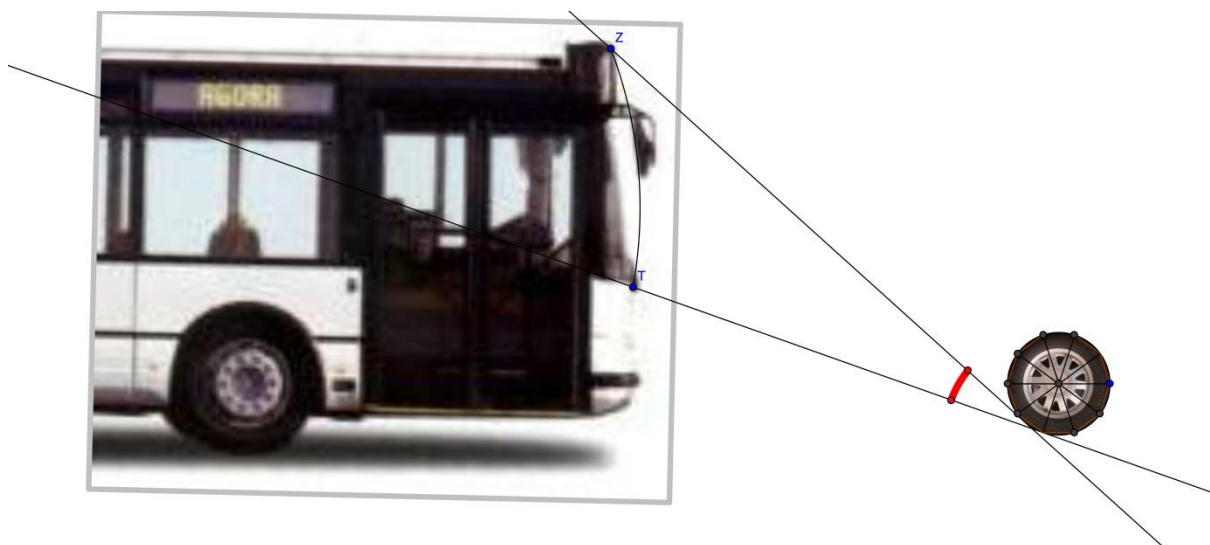


Fig.10 Løsningen til opgave 5.

Vi har løst denne opgave med GeoGebra hvor vi ved hjælp af en skyder har gjort det muligt at bevæge tangenter langs cirklen.

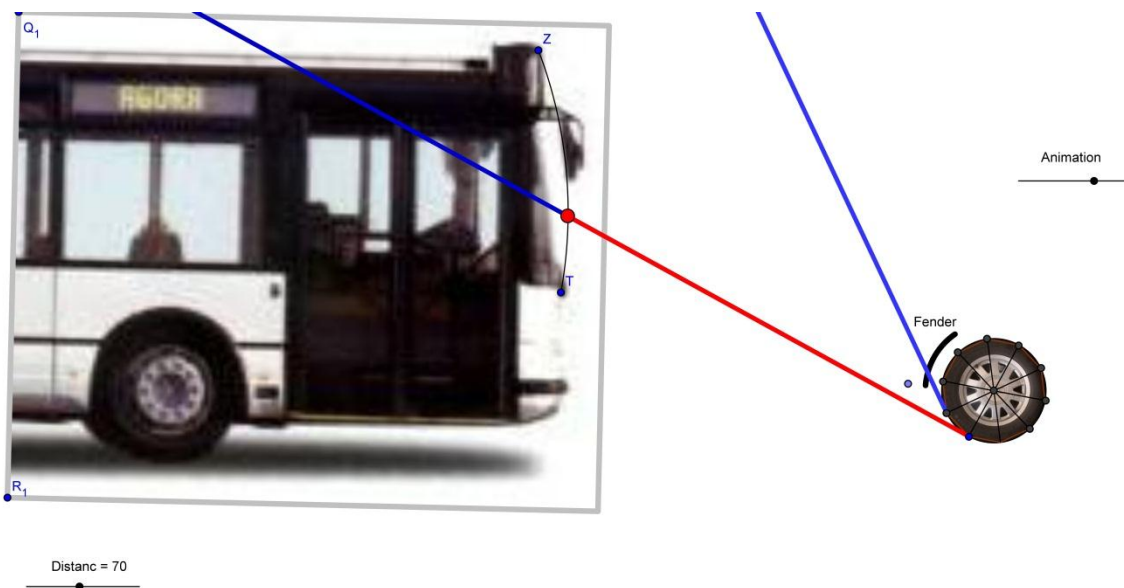


Fig.11 Dynamisk løsning til opgave 5.

## 4 Konklusion

Opgaverne i dette kapitel er lavet som inspiration til måder at indføre elever i forskellige geometriske principper vedrørende konstruktion af regulære polygoner, cirkler og deres tangenter og studiet af disses egenskaber - bl.a. aksesympetri. De er især tænkt som oplæg til lærere og lærerstuderende der vil undersøge muligheder for at udvikle nye måder at introducere klassiske geometriske emner på. Der kan f.eks. arbejdes videre med at finde sammenhænge og eksempler der kan bruges til at arbejde med konstruktion af stjernepolygoner og lignende.

## Referencer

- [1] Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky pre žiakov stredných škôl*, Exam, Bratislava, 2002, ISBN 80-968298-7-4
- [2] Čermák, P., Červinková, P. *Zmaturuj z matematiky*, Didaktis, Bratislava, 2004, ISBN 80-89160-01-8
- [3] Kuzma, J., Reiterová, M. *Matematika základnej školy v kocke: Príprava na prijímacie skúšky na stredné školy*, Príroda, Bratislava, 2011, ISBN 978-80-07-01899-0
- [4] [http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie\\_oblasti/matematika\\_a\\_isced2.pdf](http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_a_isced2.pdf) (July 11, 2011)
- [5] [http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie\\_oblasti/matematika\\_i\\_sced3a.pdf](http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_i_sced3a.pdf) (July 11, 2011)