Leikur kvikra kannana - rúmfræðileg mynstur

Toni Chehlarova, Evgenia Sendova

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences

Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Inngangur

Mörg áhugaverð rúmfræðiverkefni snúast um leg – mengi punkta sem uppfylla ákveðin skilyrði. Hefðbundin verkefni um leg eru takmörkuð við að finna einfalda ferla en með því að nota kvikt rúmfræðiforrit getum við kannað flóknari fyrirbæri.

Í þessum undirkafla munum við sýna hvernig má beita *Hvað-ef* áætluninni í eftirfarandi samhengi:

- við lausn hefðbundins rúmfræðiverkefnis
- við alhæfingar á þekktu verkefni
- við lausn ólympíudæmis eftir reyndan stærðfræðikennara (Viðauki I)
- við lausn rannsóknarverkefna fyrir framhaldsskólanemendur (Viðauki II, Viðauki III)

1.1 Horft á hið klassíska með kviku auga

Verkefnið:

> *Hvert er leg miðpunkts línustriksins sem tengir saman fastan punkt innan hrings við punktana á hringnum?*

Til þess að leysa þetta verkefni þurfið þið að rannsaka hegðun miðpunktsins sem um ræðir meðan þið hreyfið endapunkt línustriksins á hringnum eftir honum.

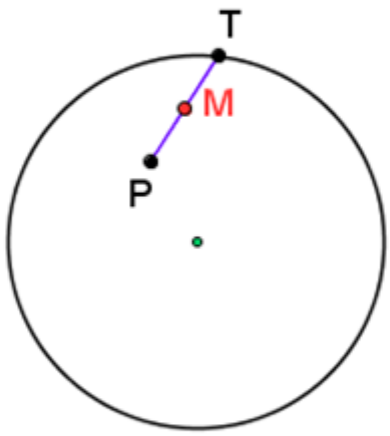
Við byrjum á kvikri smíði (t.d. í GeoGebru):

Verkefni 1. Búið til hring og punkt **T** á honum (með **Hringur** takkanum eða **Hringur** skipuninni)

Verkefni 2. Smíðið svo punkt **P** innan hringsins (með **Punktur** takkanum eða **Punktur** skipuninni)

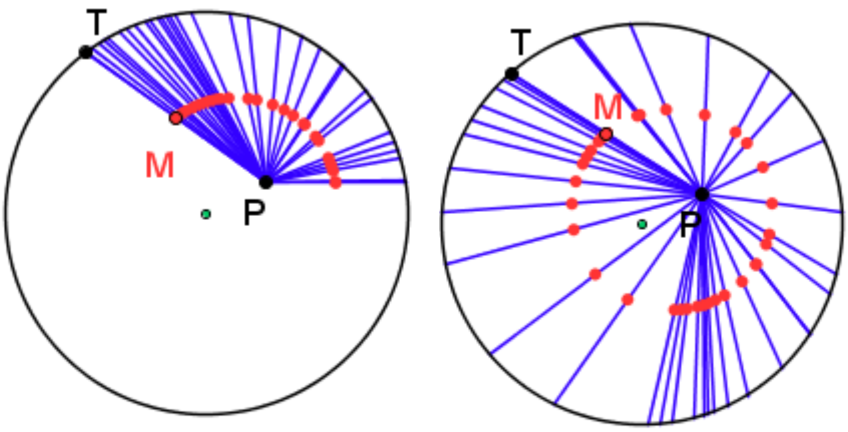
Verkefni 3. Að lokum skuluð þið mynda miðpunkt **M** línustriksins **PT** (með **Miðpunktur** takkanum eða skipuninni)

Smíðin lítur út eins og eftirfarandi:



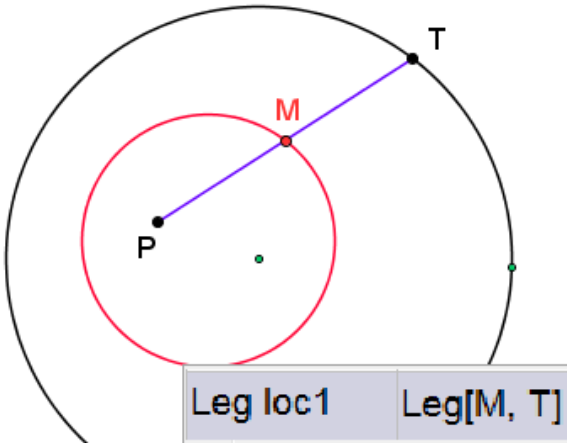
Verkefni 4. Fylgist nú með slóð ferilsins sem **M** myndar. Til að gera það veljið þið **Slóð sýnd** fyrir punktinn **M** (eða fyrir allt línustrikið **PT**) dragið punktinn **T** eftir hringnum.

Þá sést að slóð punktsins **M** lítur út eins og mengi punkta á hring.



Tilgátuna ykkar um lögun legsins má styrkja með ýmsum hætti.

Verkefni 5. Smíðið leg **M** með **Leg** valkostinum (undir **Lína** takkanum) eða **Leg** skipuninni.

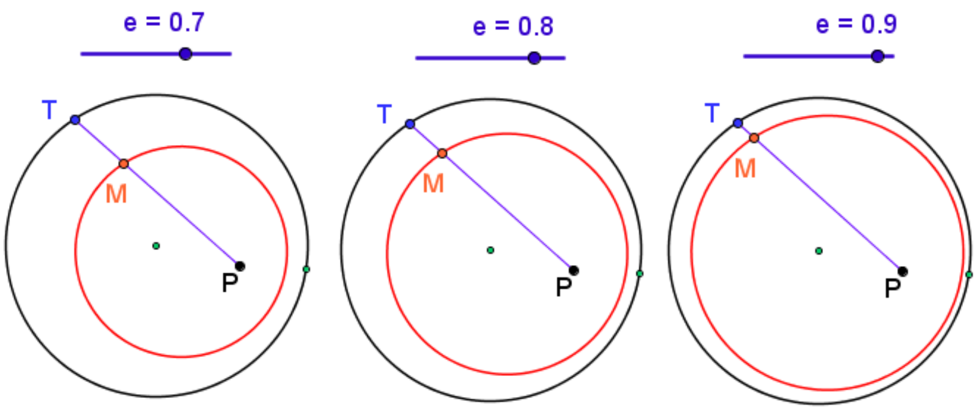


Leiknum er þó ekki lokið. Það er kominn tími til þess að spyrja frekari *Hvað-ef* spurninga, t.d. *Hvað ef **M** er ekki miðpunktur línustriksins, heldur skiptir því í ákveðnu föstu hlutfalli? Hvað ef **P** liggur utan hringsins?*

Þið gætuð haldið að í þessu tilfelli fengist almennari annars stigs ferill – e.t.v. sporbaugur?

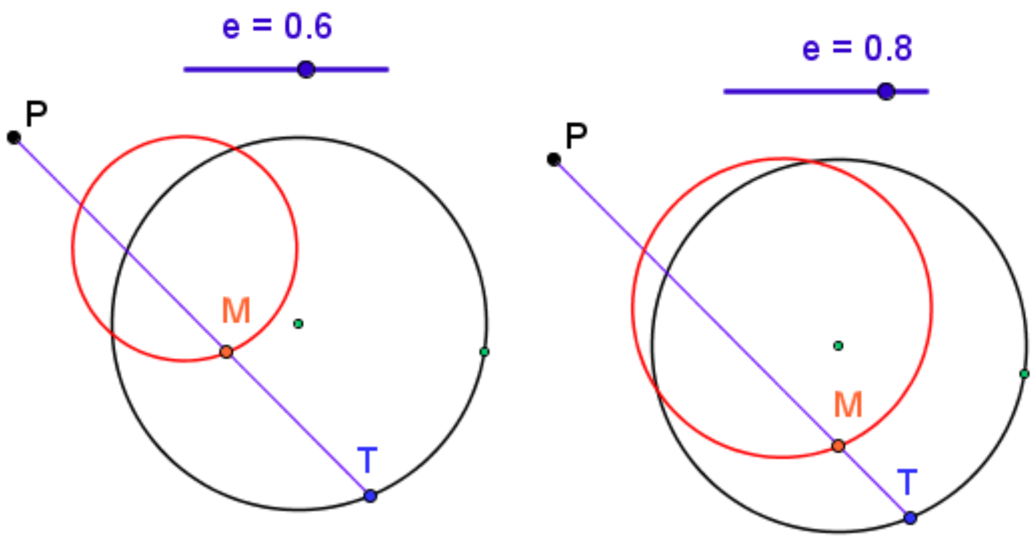
Það er auðvelt að gera kannanirnar hér fyrir ofan almennari:

Verkefni 6. Bætið við rennistiku fyrir hlutfallið **e** sem **M** skiptir línustrikinu í, þ.e. **PM = ePT** og kannið gildin fyrir ýmis gildi á **e**:



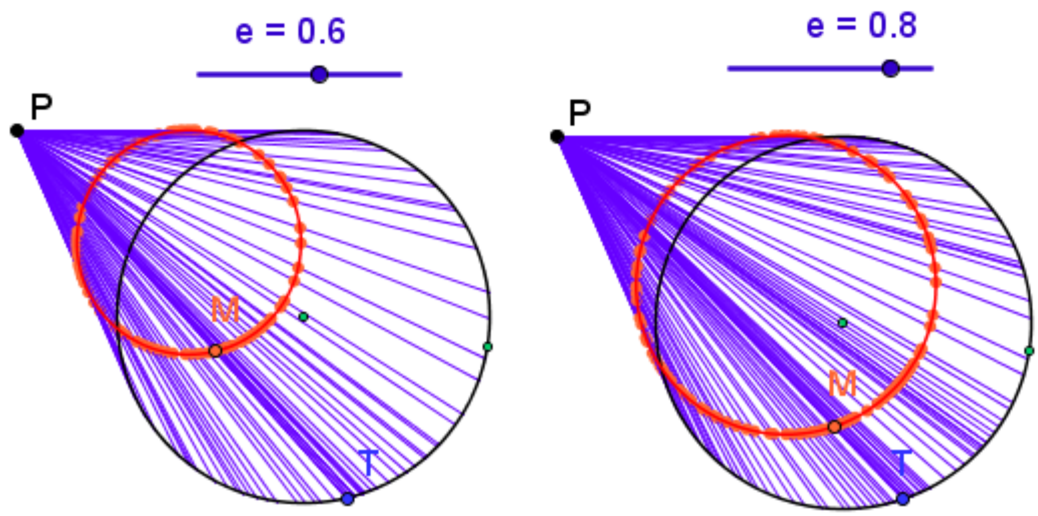
Legið lítur út enn út fyrir að vera hringur á ný!

Verkefni 7. Skoðið hvað gerist ef punkturinn **P** liggur utan hringsins.



Aftur fæst hringlaga lögun!
Leg skipunin gefur nokkuð góða hugmynd um lögun legsins en það virkar einungis fyrir mengi punkta. Hvað ef þið reynið að sjá fyrir ykkur mengi línustrikanna fyrir punkt sem liggur utan hringsins?

Verkefni 8. Setjið á **Slóð sýnd** fyrir línustrikið **PT** þegar **P** liggur utan hringsins og færið **T** fyrir mismunandi (og svo föst) gildi á **e**:



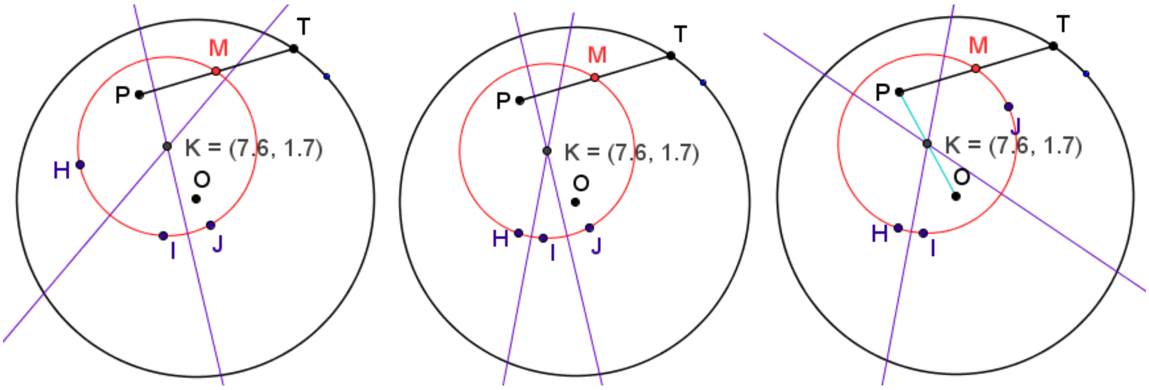
Áhugaverð sjónræn niðurstaða! Getið þið verið algerlega viss að um **M** lýsi hring? Hvað ef þetta er í raun sporbaugur sem er mjög líkur hring...

Áður en þið lesið áfram reynið að hugsa um mögulegar leiðir til þess að sannreyna tilgátuna ykkar.

Ein leið til þess að gera þetta (enn á tilraunastigi) er að búa til 3 punkta (**I**, **J** og **H**) á leginu, mynda hring í gegnum þá og athuga hvort hringurinn falli saman við legið.

Önnur leið sem gæti hjálpað ykkur að sanna tilgátuna á formlegan hátt er að kanna nokkra eiginleika myndsmíðinnar ef nokkrum hjálparþáttum er bætt við:

Verkefni 9. Smíðið 3 punkta (**I**, **J** og **H**) á legið, síðan miðþverla línustrikanna **IH** og **IJ**, og að lokum – skurðpunkt þeirra **K**. Færið nú nokkra af punktunum **I**, **J** og **H** og fylgist með hnitinu **K** auk lengdanna **KJ**, **KI**, **KH**. Hvert er samband **K** og miðju upprunalega hringsins **O**?



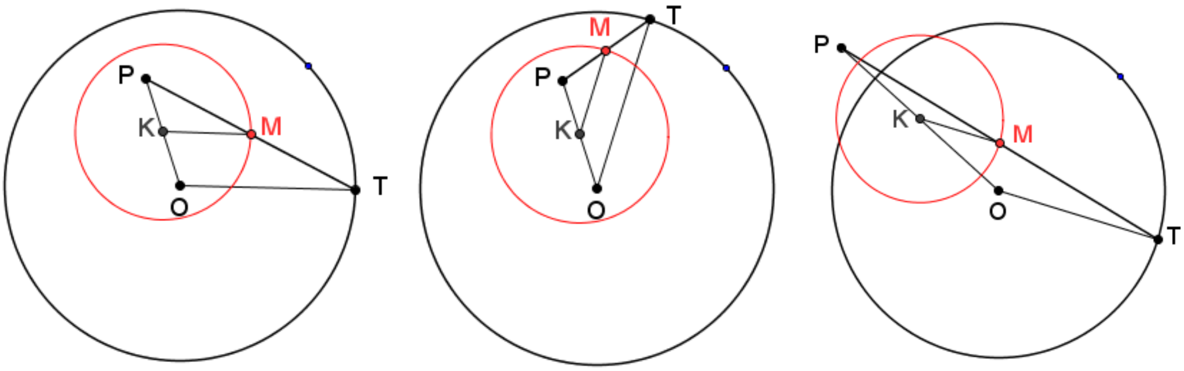
Það má auðveldlega sjá að **K** hefur föst hnit. Að auki er **KJ** = **KI** = **KH,** (þótt aðeins sé um tilraun að ræða höfum við sterkari vísbendingu fyrir því að legið sé hringur).

Ennfremur ættuð þið að hafa tekið eftir því að miðja legsins **K** er miðpunktur **PO** þar sem **O** er miðja upprunalega hringsins.

Við erum nú tilbúin að sanna formlega að legið sé hringur með miðju í **K,** miðpunkti **PO** (þar sem **O** er miðja gefna hringsins), og geislinn er hálfur geisli gefna hringsins.

Sönnunin

Látum **K** vera miðpunkt **PO**. Þá er $\mathbf{KM} = \frac{1}{2}\mathbf{OT}$, þ.e. miðpunkturinn **M** er í fastri fjarlægð frá **K** (hálfum geisli **OT** gefna hringsins) meðan **T** ferðast eftir **O**.



Þar af leiðandi er legið hringur með miðju **K** og geislinn er hálfur geisli gefna hringsins.

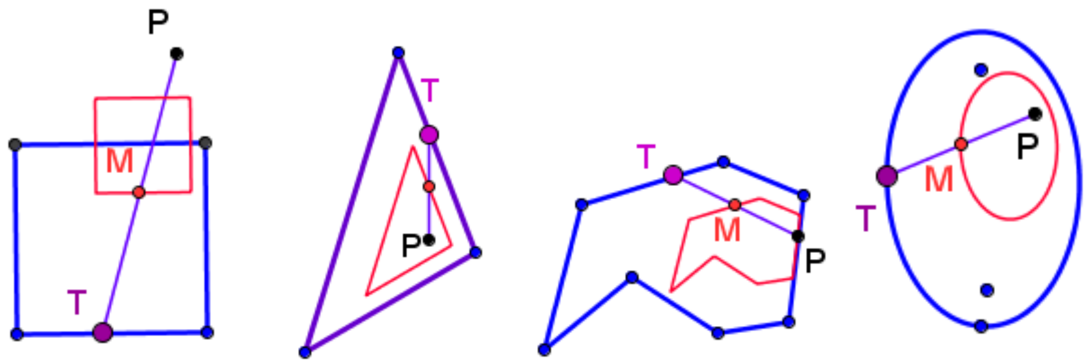
Verkefni 10. Sannið setninguna fyrir almenna tilfellið **PM** = **ePT** .

Verkefni 11. Skiptið út hringnum fyrir:

- ferning
- þríhyrning
- ótiltekinn reglulegan marghyrning
- sporbaug
- feril af eigin vali

Verkefni 12. Alhæfið niðurstöður ykkar

Ef nemendurnir þínir hafa lært *stríkkun* (í búlgörsku námskránni er það kynnt árið eftir fyrstu kynni við *legið*) geta þeir notað það til þess að leysa verkefnin en það er passar vel að alhæfa niðurstöður þeirra (verkefni 12) eftir að við fáum niðurstöðurnar úr verkefni 11:



Með því að beita *Hvað-ef* áætluninni er hægt að leggja rækt við rannsóknaranda í stærðfræðitímum –nemendurnir eru hvattir til þess að kanna áhugaverð sértilfelli til þess að alhæfa tiltölulega einföld verkefni á mismunandi vegu og jafnvel ráðast í og alhæfa verkefni á ólympíustigi [Viðauki I]

2 Að alhæfa vel þekkt verkefni

Í þessum undirkafla sýnum við ferli sem er dæmigert fyrir starfandi stærðfræðinga – við alhæfum vel þekkt verkefni og tökumst á við það sem þeim verkfærum sem við teljum best til þess fallin (í okkar tilfelli er það kvik smíði sem við hönnum lið fyrir lið með því hugarfari að laga og bæta það í hverju skrefi). Við reynum að rannsaka kerfisbundið og veltum fyrir okkur þeim hugmyndum sem við fáum. Það er mun áhugaverðara að skoða sjálft ferlið í stað lýsinga á niðurstöðunum. Að auki myndi það gleðja okkur ef þið, lesendur fengjuð áhuga á því að ráðast í einhver af opnu dæmunum.

Hér er byrjunarpunktur okkar:

Vel þekkt verkefni
Finndu leg skilgreint sem miðpunktar jafnhliða þríhyrninga sem innritaðir eru í jafnhliða þríhyrningi.

Við búumst við því að verkefnið sé vel þekkt flestum lesendum okkar. Metnaðarfull alhæfing væri þá:

Metnaðarfull alhæfing
Finndu leg skilgreint sem miðpunktar reglulegra $\boldsymbol{m}$*-hyrnininga sem eru innritaðir í reglulegum* $\boldsymbol{n}$*-hyrningi,* $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$.

Hér fyrir neðan munum við rita **(*m*;*n*)** til að tákna myndsmíði reglulegs **m**-hyrnings sem innritaður er í reglulegan **n**-hyrning. Athugið að við vitum ekki fyrir hvaða **m** og **n** smíðin **(*m*;*n*)** er möguleg.

Byrjum á því að *ráðast* í minna verkefni sem inniheldur tilfellin **(3;n)** fyrir **n** = 3,4,...

Fyrsta atrennan – (3;*n*) tilfellið
Finndu leg miðja jafnhliða þríhyrninga sem eru innritaðir í reglulegum **n***-hyrningi.*

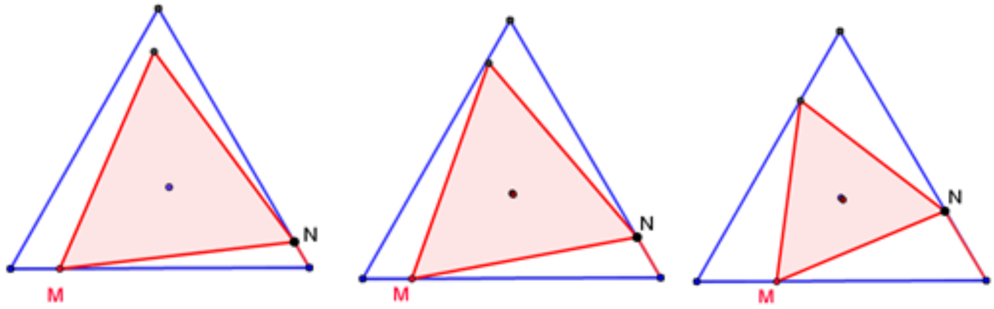
2.1 Frumstætt (handgert) kvikt líkan

Við smíðum jafnhliða þríhyrning sem hefur tvo af hornpunktum sínum á **n**-hyrningnum og færum þann þriðja svo við fáum innritaðan þríhyrning.

Byrjum á byrjunni! Til þess að skilja kviku smíðina sem má þá alhæfa á eftir er eðlilegt að byrja á einfaldasta tilfellinu (**n=3**) og halda svo áfram á þann veg sem kallaður væri *handgerður*:

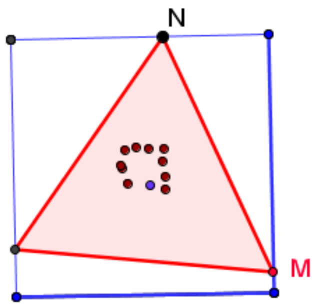
- Við veljum einhverja tvo punkta **M** og **N** á mismunandi hliðum gefna (*bláa*) þríhyrningsins
- Síðan smíðum við jafnhliða (*rauðan*) þríhyrninging með hlið **MN** .
- Næst færum við punktinn **N** (höldum **M** föstum á núverandi staðsetningu) þ.a. *rauði þríhyrningurinn* verður innritaður í þann bláa. Miðja rauða þríhyrningsins er punktur legsins sem við leitum að

- Endurtaktu nú þetta ferli fyrir nýjan punkt **M**.

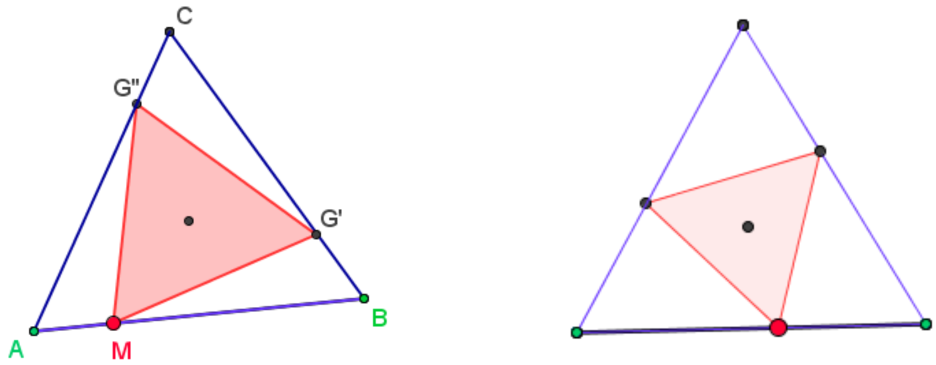


Með því að skoða mismunandi punkta **M** fáum við góða nálgun á leginu – í tilfelli **(3;3)** virðast miðjurnar falla saman (eða nálægt því)...

Ef við beitum svipuðu ferli á tilfelli [(3;4)](#) líta miðjurnar næstum því út eins og ferningur. En að innrita þríhyrninginn *í höndunum* er tímafrek aðferð. (Þó örlítið betri en að teikna beint á pappír og skoða bara eitt tilvik sem gæti verið villandi sökum ónákvæmni [Viðauki II]).



Til þess að gera smíðina sjálfvirka skulum við skoða betur smíði **(3;3).** Það er eðlilegt að geta sér til að í þessu tilfelli sé legið stakur punktur sem fellur saman við miðju gefna þríhyrningsins.



Aljöfnun þríhyrninganna **AMG''** og **BG'M** gefur til kynna að **AM=BG'**. Þar af leiðandi getum við notað í þessu tilfelli kvika smíði byggða á aljöfnun.

2.2 Sjálfvirkt kvikt líkan fyrir (3;3) smíðar

Hér eru ýmsar aðferðir til þess að búa til sjálfvirk líkön fyrir **(3;3)** smíðar:

Fyrsta aðferðin

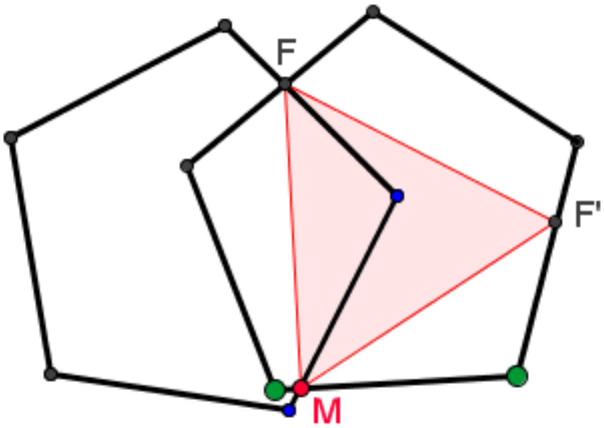
- við smíðum punkt **M** á útlínu reglulegs **3**-hyrnings
- við smíðum hring ***k*** með miðju **B** og geisla **AM**
- við táknum með **G'** skurðpunkt ***k*** og hliðarinnar **BC** á ***n***-hyrningnum (í þessu tilfelli þríhyrningurinn **ABC**)
- við smíðum **G''** á svipaðan hátt
- við tengjum saman punktana **M, G'** og **G''** í þríhyrning

Önnur aðferð

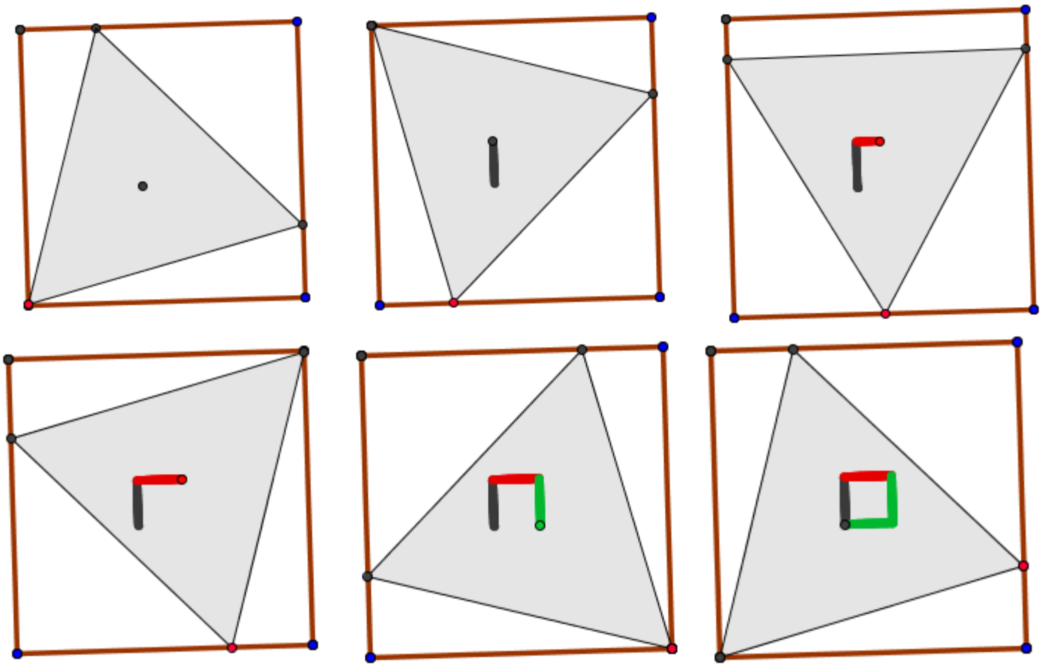
- við smíðum punkt **M** á útlínu reglulegs **3**-hyrnings
- við smíðum mynd **G'** frá **M** með snúningi um miðjuna – miðju gefna þríhyrningsins og hornsins 120°
- síðan smíðum við mynd **G''** frá **G'** með snúningi um miðjuna – miðju gefna þríhyrningsins og hornsins 120°
- við tengjum saman punktana **M, G'** and **G''** í þríhyrning

2.3 Fleiri kvik líkön

- Við smíðum punkt **M** á útlínu reglulegs **n**-hyrnings
- Síðan smíðum við mynd af **n**-hyrningi með snúning um **ρ** með miðju **M** og horn 60°.
- Við smíðum skurðpunkt þeirra **F**. (Hann mun verða annar hornpunktur jafnhliða þríhyrningsins sem er innritaður á **n**-hyrninginn.)
- Síðan smíðum við þriðja hornpunktinn sem frummynd **F'** á **F**.
- Við tengjum saman **M**, **F'** og **F** til að fá jafnhliða þríhyrninginn innritaðan inn í **n**-hyrning.



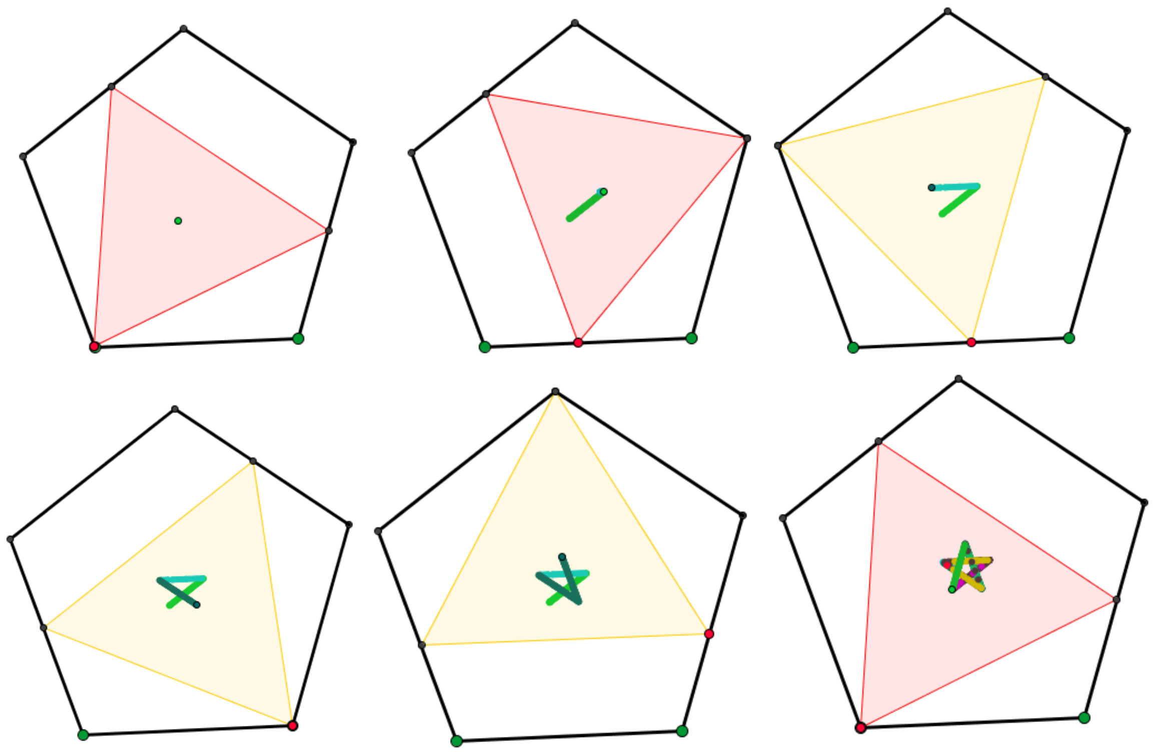
Hér eru nokkrar skjámyndir af slóð miðju þríhyrningsins í (3;4) smíðinni þegar innritaði þríhyrningurinn er færður:



Þegar við færum rauða punktinn (**M**) þangað til að næsti hornpunktur fellur saman við hornpunkt ferningsins (þ.e. hann fer í upphafstöðu sína) sjáum við hvernig slóðin myndar form sem líkist hálfum ferningi. Á hliðstæðan hátt fæst að ef við færum punkt **M** eftir afganginum af hliðum ferningsins mun miðja þríhyrningsins skilja eftir sig slóð sem klárar ferningslaga formið og eftir það endurtaka slóðina (þrisvar sinnum).

Ef ætlaða leg **(3;4)** smíðinnar er ferningur gætum við sett fram samsvarandi tilgátu fyrir leg **(3;5)** smíðinnar að það yrði reglulegur fimmhyrningur?

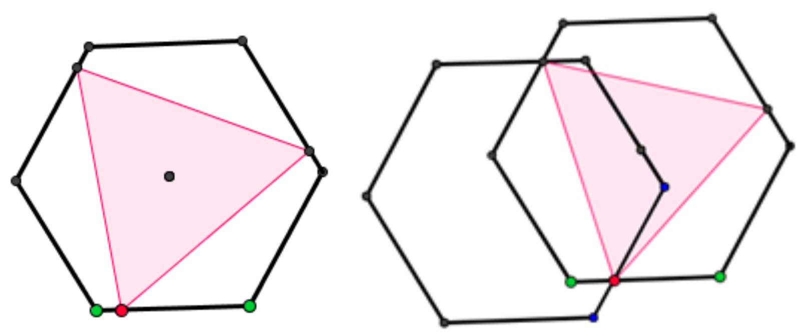
Í seinna tilfellinu er nægjanlegt (á ný vegna samhverfu) að fylgjast einungis með áhrifum hreyfingar rauða punktsins á hluta fimmhyrningsins.



A-a-ah! Enn 5 hliðar en það lítur ekki út sem fimmhyrningur – frekar eins og fimmstirningur! Þá má e.t.v. túlka það sem við töldum vera ferning sem „4-hliða stjörnu“...

Á ný lýsir miðja þríhyrningsins leginu þrisvar sinnum er rauði punkturinn ferðast heila umferð um upprunalega fimmhyrninginn.

Í tilfelli **(3;6)** virðist legið vera stakur punktur:



Þannig var það í tilfelli **(3;3)** smíðinnar. Hliðstætt gætum við sett fram þá tilgátu að sama gildi fyrir **(3;9),** og enn almennara – fyrir **(3;3*k*)**

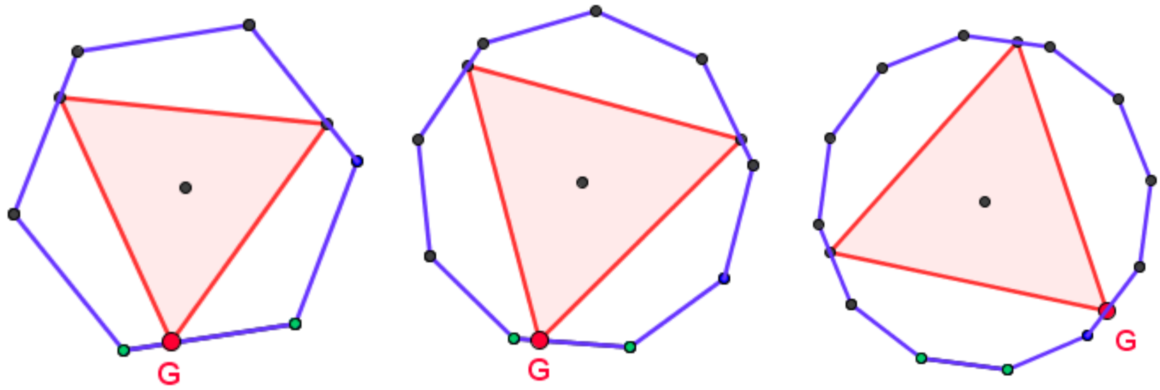
Við getum almennar skoðað **(*m*;*km*)**.

2.4 Frekari kannanir sem gefa innsýn

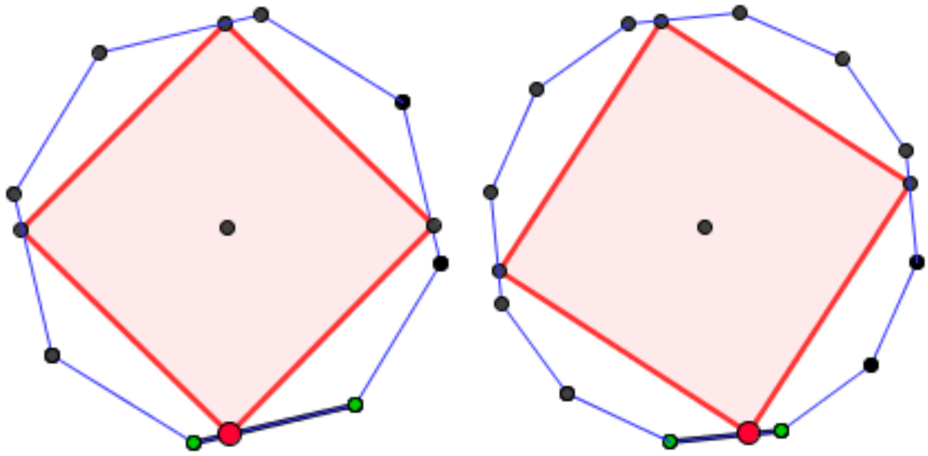
(*m*; *km*) líkanið

Nú er freistandi að skoða

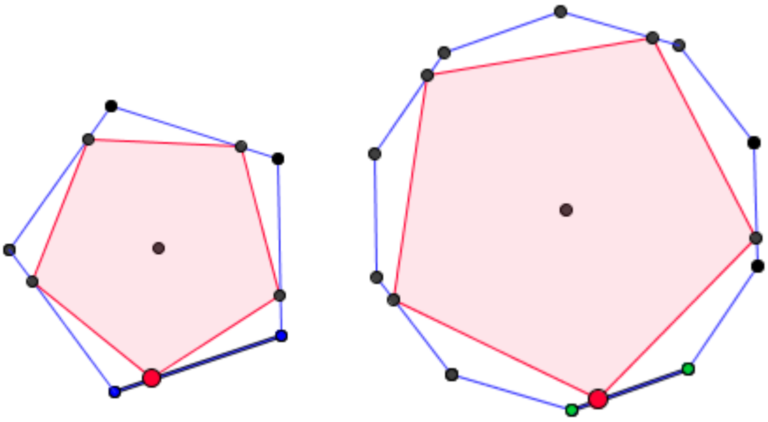
(3;3k)



(4;4*k*)



[(5;5*k*)](#)



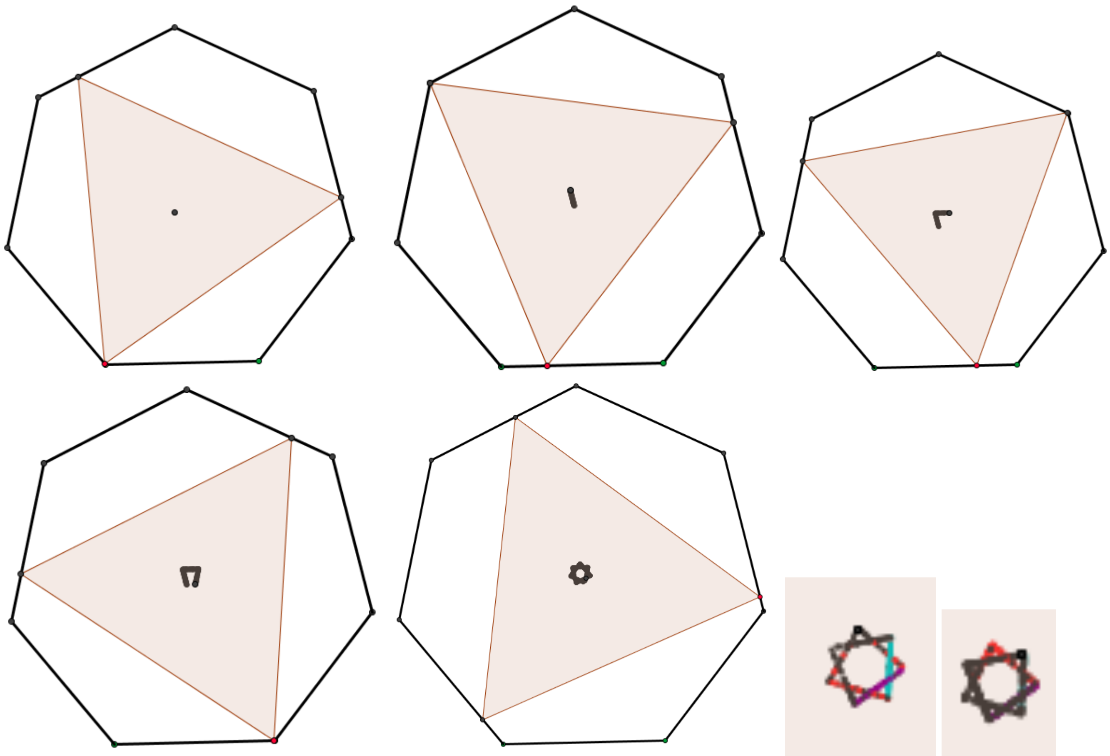
Sú almenna tilgáta sem við getum sett fram eftir að við höfum kannað **(*m*;*km*)** líkanið er að *fyrir hvern punkt **G** á **n**-hyrningnum (**n=km**) er til innritaður **m**-hyrningur með hornpunkt **G** og legið sem um ræðir er einn punktur sem fellur saman við miðju **n**-hyrningsins.*

Það má einnig fá **(*m*;*km*)** myndsmíðarnar með aðferðunum hliðstætt því sem gert var í undirkafla 2.2.

Höldum okkur við rannsóknir okkar á (**3;*n***) líkaninu.

[(3;7) líkanið](#)

Við búumst við því að fá stjörnu úr forritinu þegar farið er eftir hliðum sjöhyrningsins.

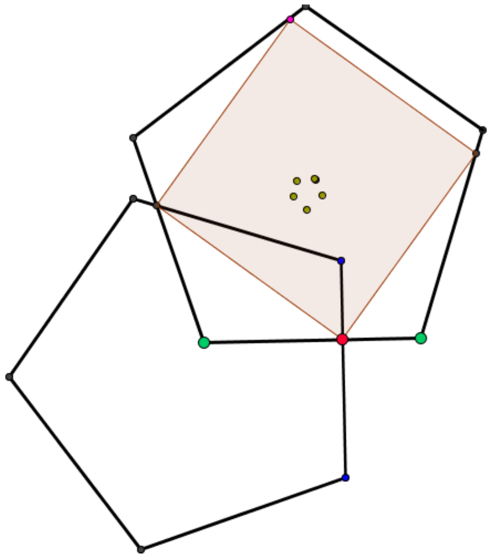


Rannsóknin á (**3;*n***) líkaninu leiðir okkur að þeirri tilgátu að það er ávallt mögulegt að innrita jafnhliða þríhyrning í sérhvern reglulegan ***n***-hyrning. Með öðrum orðum, *það er ávallt hægt að smíða* (**3;*n***).

Það er áhugavert að sjá hverjar aðstæðurnar eru í tilfelli (**4;*n***) líkansins...

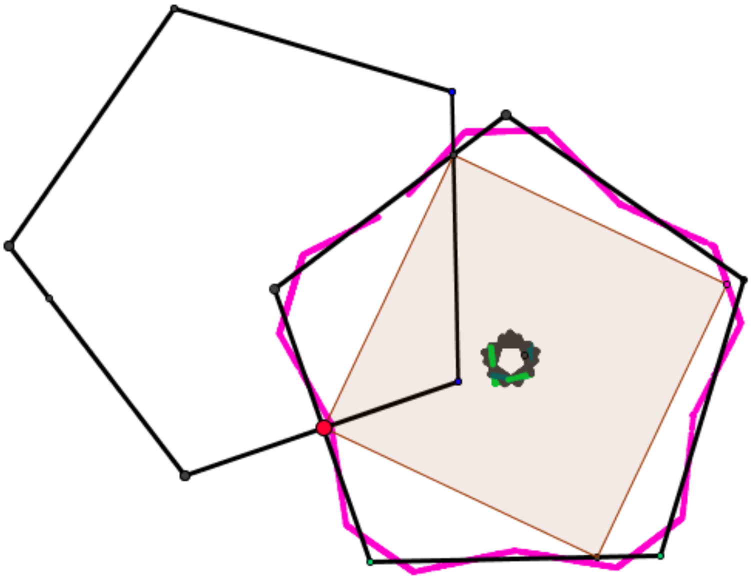
[(4;5) líkanið](#)

Þetta er í raun ferningur innritaður í reglulegan fimmhyrning:

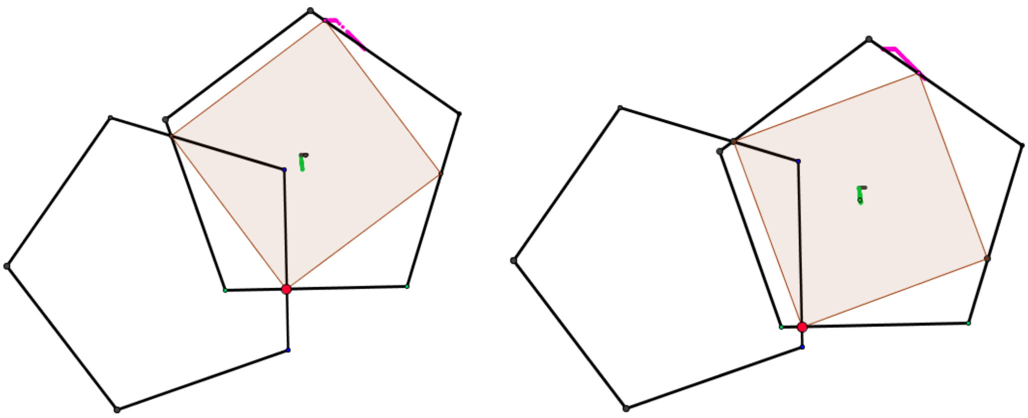


Hér er aftur gefinn n-hyrningur (fimmhyrningur í þessu sértilfelli) og mynd þess undir snúningi um 90° hefur einn skurðpunkt þar sem frummyndin er þriðji hornpunktur ferningsins. Það sem er eftir að athuga er hvenær fjórði hornpunktur ferningsins er á gefna n-hyrningnum.

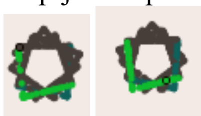
Hér er fjórði hornpunkturinn fjólublár (í *slóðarlíkani*):



Hér fyrir neðan eru nokkrar uppsetningar sem leiða til innritaðs fernings:

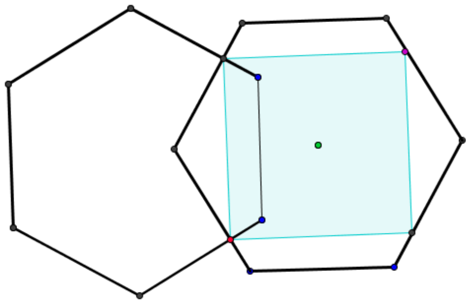


Skoðum nánar slóð miðju þessa fernings með þrjá hornpunkta á ***n***-hyrningnum.



Í raun er þetta leg innritaðs rétthyrnds jafnarma þríhyrnings í reglulegum fimmhyrningi.

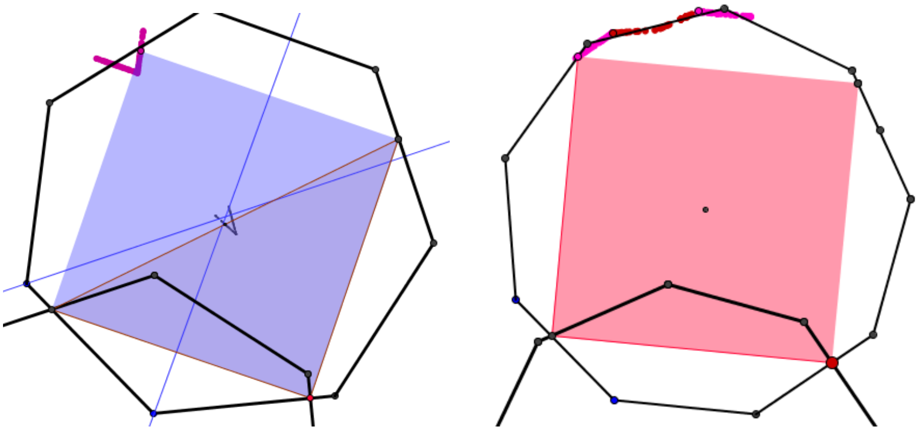
(4;6) líkanið



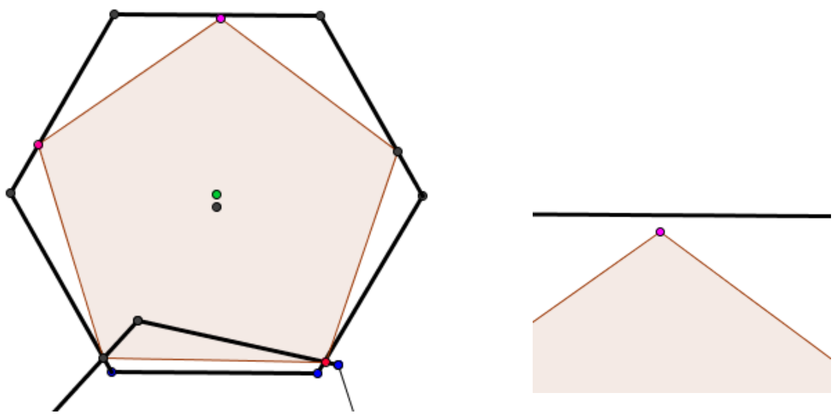
Legið er stakur punktur á ný í tilfellinu (***m, mk***), munurinn í þetta skiptið er að *hann er myndaður sem leg endanlegs fjölda af innrituðum ferningum.*

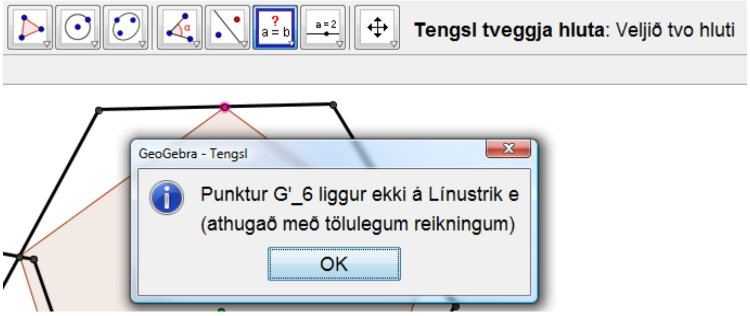
Á þessu tímapunkti væri það góð hugmynd að giska á hve marga punkta leg **(4;7)** og **(4;9)** smíðanna inniheldur. Athugum það með tilraun:

(4;7) og (4;9) líkönin

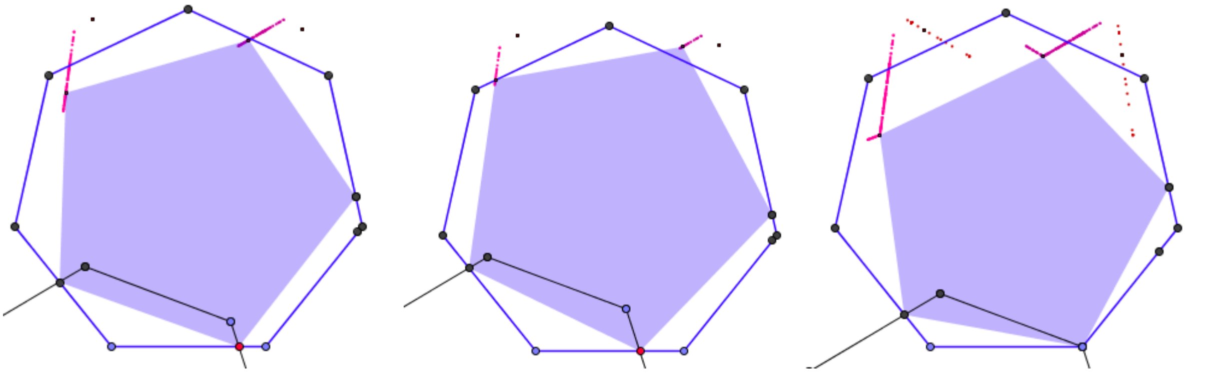


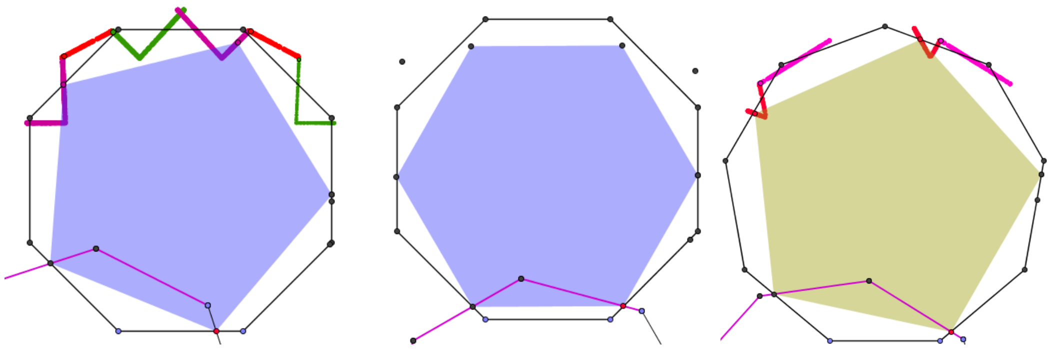
Í **(5;6) líkaninu** lítur við fyrstu sýn út fyrir að fimmti hornpunkturinn sé á sexhyrningnum. Við gætum sannreynt þetta með tilraun með því að þysja inn eða með því að bera saman tvo hluti til að kanna um hvort um tilviljun sé að ræða. En þrátt fyrir að jákvætt svar komi út úr þessu megum við ekki að gleyma því að tölvur vinna með ákveðna (endanlega) nákvæmni.



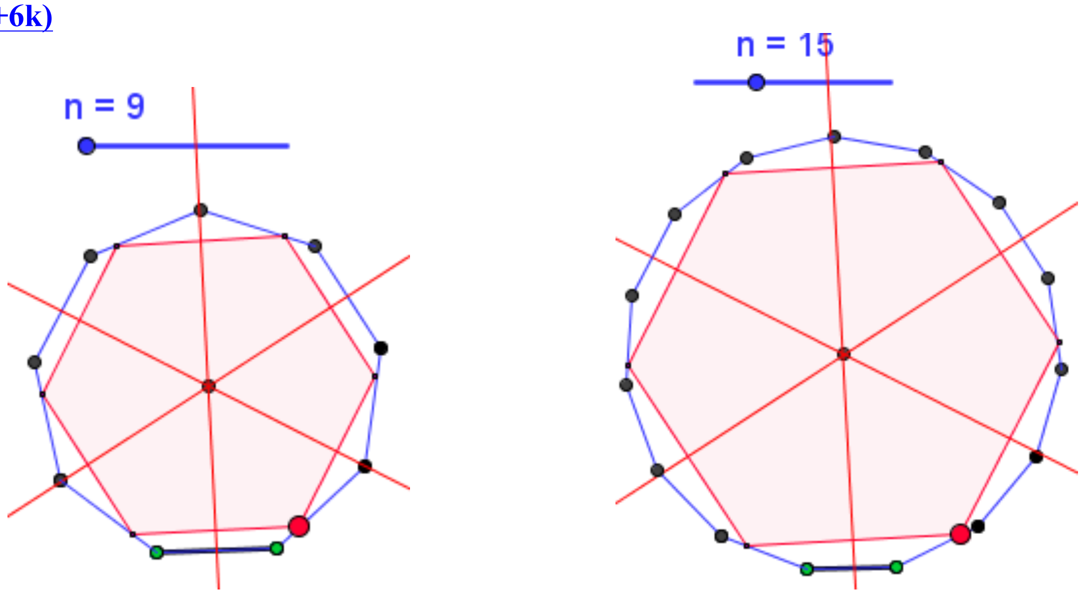


Hér eru nokkur kvik líkön sem gerð voru þegar leitað var að myndsmíðum sem með tilraununum leiddu okkur að þeirri tilgátu að þau væru ómöguleg eða í það minnsta ólíkleg.

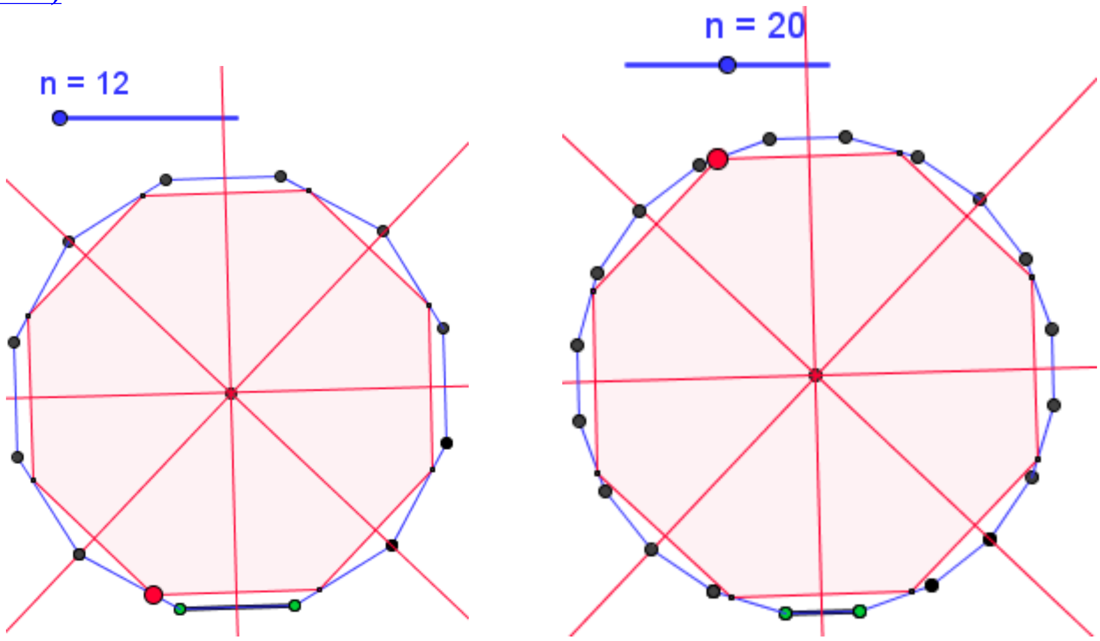




Aftur á móti eru til nokkur sértilfelli eins og þau hér fyrir neðan sem má búa til vegna samhverfu: **[(6;3+6k)]**



(8;4+8k)



Ef **m** er slétt tala gefur línusamhverfa jafngildi línustrikanna í myndsmíðum af gerðinni $\left(\mathbf{m};\frac{\mathbf{m}}{2}+\mathbf{km}\right)$.

Á þessum tímapunkti er góð hugmynd að staldra við og spyrja sig – *hvað er þekkt í sambandi við þau atriði sem við höfum verið að skoða?* Við slógum inn töfraorðin ***reglulegur m-hyrningur innritaður í reglulegan n-hyrning*** og fengum [1]! Nánast sami titill og sama táknmálið sýna hve eðlilegt það er í einfaldleika og gagnorðri lýsingu sinni þegar könnuð eru hin ýmsu tilfelli og tilgátum og niðurstöðum lýst. Höfundarnir Dilworth og Mane setja fram nauðsynlegu og nægjanlegu skilyrðin á **m** og **n** til þess að innrita reglulegan **m**-hyrning inn í reglulegan **n**-hyrning. Það er áhugavert að nefna að þeir bjuggust við því *að þetta verkefni hefði verið leyst á tíma Evklíðs, en það virðist ekki hafa verið alveg leyst.*

Hér er það sem Dilworth og Mane sanna í [1] með tvinntölum:

> **Setning.** *G.r.f. að m, $n \geq 3$. Innrita má reglulegan m-hyrning í reglulegan n-hyrning ef og aðeins ef eftirfarandi sundurlægu skilyrði eru uppfyllt:*
> (a) $m = 3$;
> (b) $m = 4$;
> (c) $m \geq 5$ *og m gengur upp í n;*
> (d) $m \geq 6$ *er slétt tala og n oddatölumargfeldi af m/2* (*Taktu eftir að þetta innheldur tilfellið n=m/2.*)

Í ljós kemur að síðustu dæmin í rannsókn okkar falla undir (d) (Taktu eftir því að [1] inniheldur tilfellið **m** > **n**.)

Hefðum við séð þessa grein áður en við réðumst í verkefnið með kvikum hætti hefðum við hikað við að láta nemendurna fá það (jafnvel þótt þeir væru mjög ákafir í því að kanna ný svið stærðfræðinnar). Hinsvegar notfærði könnunin sjálf sér þá stærðfræðihæfni sem nemendur bjuggu yfir varðandi rúmfræðilegar ummyndanir. Ennfremur kölluðu mynstrin og tengslin, sem við komumst í kynni við þessar kannanir, upp aðrar áhugaverðar spurningar.

Það sem í raun skiptir máli í sambandi við þetta verkefni er ekki lausnin sjálf heldur allt ferlið í því að búa til stökkpall fyrir rannsóknir sem bæta innsæi okkar og skilning á sumum mynstrunum í myndsmíðunum, það að þróa kerfisbundnari nálgun rannsókna, að komast að því að ekki eru allar samsetningar þess að innrita reglulegan ***m***-hyrning í reglulegan ***n***-hyrning mögulegar, og að lokum – trúin á getu kennara til þess að efla rannsóknarbyggðar lærdómsaðferðir í stærðfræði. Í hnotskurn, til þess að sýna fram á „grook“ [2] hins mikla danska stærðfræðings, arkitekts og ljóðskálds Piet Hein:

Viðurkenningar

Við viljum færa þakkir til prófessors Oleg Mushkarov fyrir að stinga upp á almenna verkefninu og fyrir hjálplegar athugasemdir.

Heimildir

[1] Dilworth S. J., S. R. Mane. Inscribing a regular *m*-gon in a regular *n*-gon http://www.math.sc.edu/~dilworth/preprints_files/DilworthManeJOGpublished.pdf (25. október 2011)

[2] *Grooks*, http://www.archimedes-lab.org/grooks.html (25. október 2011)