Frattali – broken senza bisogno di riparazioni

Andreas Ulovec and Hannes Hohenwarter

1 Introduzione

Per secoli, abbiamo cercato di descrivere la natura con semplici forme geometriche: cerchi, quadrati, coni, cilindri ... in altre parole, oggetti di ciò che chiamiamo geometria euclidea. Negli anni 1970 e 1980 Benoît Mandelbrot ha contestato tale vista con il suo famoso proverbio "Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, e la corteccia non è liscia, né viaggi lampo in linea retta!" Per spiegare questo, ha utilizzato diversi modelli, di cui la lunghezza di una costa è probabilmente il più noto: Una fotografia satellitare della costa britannica si presenta come una morbida, linea ininterrotta che è facile da misurare. Volare su un aereo sulla stessa costa, si possono già vedere i posti frastagliate, rientranze, ecc con cui il litorale appare molto più a lungo. Se si modifica un piccolo deltaplano, si possono vedere le spiagge, i riff, porti, ecc rendendo la costa alla ricerca anche di più rispetto dal piano. E se si cammina lungo la costa, la linea sembra ancora più frastagliata e bizzarra - e ancora, più a lungo! Siamo in grado di vedere dove questo sta andando - con più fine e la risoluzione più fine, il litorale si allunga e più a lungo. In realtà, è infinitamente lungo! Eppure, l'area del Regno Unito non è infinitamente grande - ma come si può avere una figura con un'area finita, ma una circonferenza infinita? Con le suddette forme euclidee, non si può, ma con forme frattali, si può! Vediamo come funziona!

2 Che cosa sono I frattali?

2.1 Definire le forme senza forma

Come potete immaginare, non è abbastanza facile definire qualcosa che anche Euklid chiamato "informe" (lo stesso Mandelbrot ha coniato il termine forma frattale o semplicemente frattale, dal latino fractus, che significa frattura o rotto). Ci sono diverse possibili definizioni di frattali, di cui ci daranno quello che meglio riassume le proprietà dei frattali.

Definizione: Una struttura (ad esempio, un oggetto o un insieme) è chiamato frattale, se mostra auto-similarità e se ha un valore non intero dimensione.

Per comprendere questa definizione, abbiamo bisogno di discutere di due cose: di auto-similarità e dimensione.

2.2 Strutture tipo self-similar

Cosa si intende con l'auto-similarità? Un tipico esempio in natura sarebbe un grande albero. Se si prende un ramo importante di esso, sembra fondamentalmente la stessa tutto l'albero, solo più piccolo. Se rompere un ramo più piccolo da quello grande, sembra ancora molto simile al grande ramo (e tutto l'albero), ma ancora più piccolo. Se rompere un piccolo ramo laterale da questo, sembra ancora una volta simili, ma più piccola. In natura, si può fare solo questo così spesso, ma in geometria frattale, è possibile ripetere questo più e più volte e si finisce sempre con un oggetto che è simile al tutto. Così possiamo definire:

Definizione: Un oggetto è auto-similare, se parti di essa contengono ridotto (non necessariamente esatto) copie di se stesso. Un oggetto è esattamente auto-similare se si tratta solo di copie esatte di se stesso. Prima di questa diventa troppo confusa, ci mostra un esempio di (esattamente) auto-similare oggetto. Si chiama Koch-curva (vedremo come costruire questo qui sotto).

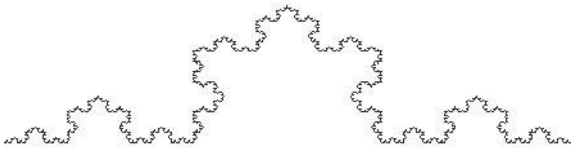


Fig.1 Koch-curve

Forse non lo vedi subito, ma questa curva si compone di quattro copie di se stesso. Per mostrare meglio questo, ci sarà il colore le quattro parti in diversi colori:

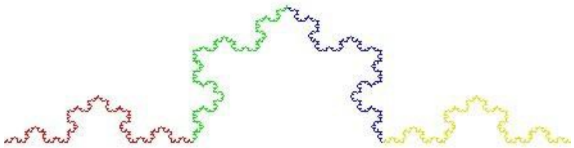


Fig.2 Koch-curve in colours

Ora la parte rossa della curva appare esattamente la stessa della curva intera, solo più piccola. Se si avrebbe solo la parte sinistra della curva rossa, nuovamente sarebbe lo stesso aspetto della curva intera.

2.3 Dimensioni frazionali

Siamo abituati a dimensioni intere: Lines ha dimensione 1, aerei, quadrati, rettangoli, cerchi, ecc hanno dimensione 2, cubi, sfere, coni ecc hanno dimensione 3. Ma ciò che abbiamo imparato nel primo comma? "Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, e la corteccia non è liscia, né viaggi lampo in linea retta!" Così, ovviamente, per descrivere i frattali, abbiamo bisogno di dimensioni che non sono numeri interi. Ad esempio, la Koch-curva ha dimensione 1,262, che significa che è qualcosa tra una linea e un piano. Più la dimensione è di 2, più il frattale "riempie" il piano.

OK, non abbiamo bisogno di interi dimensioni, ma come possiamo definirli? Ci sono diverse possibilità per farlo. Useremo il cosiddetto Hausdorff-Dimension (come Mandelbrot fatto), e in realtà solo un caso particolare di essa, la cosiddetta auto-similarità dimensione (che lavora per gli oggetti esattamente self-simili).

Definizione: Un oggetto geometrico consistente in n parti disgiunte che sono esatte copie 1: m di questo oggetto ha la dimensione di auto-similarità

$$D = \frac{Log\ n}{Log\ m}.$$

È abbastanza facile ora per determinare la dimensione del Koch-curva. È costituita da quattro copie con una scala di 1:3, cioè la dimensione

$$D = \frac{Log\ 4}{Log\ 3} = 1.262$$

Ben abbastanza, la "solita" (cioè euclidea) dimensione è anche inclusa nella auto-similarità dimensione, il che significa che se si calcola la dimensione di auto-similarità, per esempio, una piazza, si potrebbe ancora ottenere dimensione 2. Perché è così? Bene, consideriamo un quadrato:

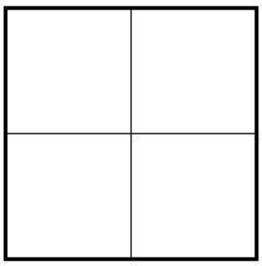


Fig.3 Square in four parts

Come si può facilmente vedere, la grande piazza è composta da 4 piccoli quadrati, che sono solo 1:02 copie della grande piazza. L'auto-simila dimensione sarebbero pertanto:

$$D = \frac{Log\ 4}{Log\ 2} = 2.$$

Quesiti:

[1] Fai una prova simile per dimostrare che l'auto-similarità dimensione di un rettangolo è anche 2 .
[2] Fai una prova simile per dimostrare che l'auto-similarità dimensione di un cubo è pari a 3.

3 Come creare I frattali

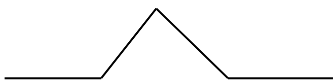
Fino ad ora, abbiamo appena analizzato frattali esistenti. Ma come si fa in realtà la costruzione di un frattale? E perché, se i calcoli sono così facili, non ha nessuno che realmente fatto questo fino al tardo 20° secolo?
La prima domanda - come costruire un frattale - ha diverse risposte possibili. La ragione di ciò è che il termine frattale, per definizione, è molto ampia, cioè un sacco di piuttosto diverse strutture sono di natura frattale, e non c'è modo di avere un unico metodo di costruzione per tutti loro. Ma c'è una vasta classe di frattali che sono tutti costruiti nello stesso modo.

3.1 Frattali classici

Con il termine classico frattale si intende un frattale che è esattamente auto-simili e può essere costruito mediante un processo iterativo di sostituzione: un oggetto di partenza (per lo più una linea o segmento), il cosiddetto iniziatore, è sostituito da un altro geometrica figura (costituito da iniziatori diversi), il generatore. Nella figura risultante ciascun iniziatore viene nuovamente sostituito da un generatore, e questo processo è ripetuto indefinitamente. Il frattale è il limite di questa iterazione. Matematicamente possiamo descrivere questo come una funzione ricorsiva o, per quella materia, come una successione:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

dove x_0 e' il termine di partenza e $x_1 = f(x_0)$ e' il generatore.
Prima di tutto, noi ancora una volta dimostriamo questo con l'aiuto della curva di Koch.
Esempio: L'iniziatore della curva di Koch è un segmento di linea. Il generatore è costituito da quattro segmenti la cui lunghezza è un terzo della lunghezza dei segmenti originali ', dato dal trisecazione segmento originale e sostituendo il terzo centrale del segmento di un triangolo equilatero la cui base è tagliata. Scrivere questo come una funzione ricorsiva lo rende più chiaro:

$x_0 =$ $x_1 =$ 

Questi quattro segmenti vengono quindi nuovamente sostituiti dal generatore, risultante in una struttura di 4x4 = 16 segmenti. Questi segmenti sono ancora una volta sostituiti dal generatore ecc. Ciò risulta nella costruzione seguente:

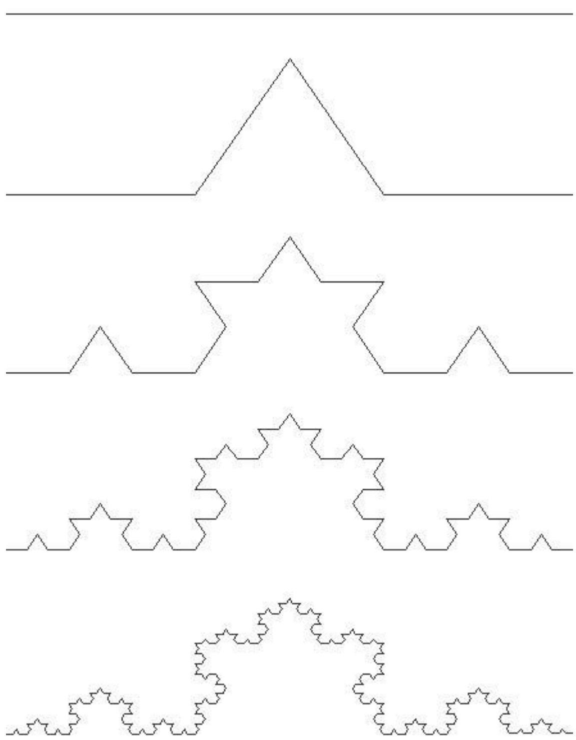


Fig.4 Iterations of the Koch-curve

Se vogliamo continuare indefinitamente, si otterrebbe la curva di Koch. Ma anche i primi cinque iterazioni mostrano già una buona approssimazione della curva. La costruzione risponde anche alla seconda questione che abbiamo sollevato sopra: Perché non è stato fatto in precedenza nella storia? Beh, alcune costruzioni sono state fatte in precedenza, ma se si cerca di rendere questa costruzione a mano, si scopriranno presto che anche fare la terza o la quarta iterazione è già un processo molto noioso. Solo con l'aiuto del computer è stato possibile realizzare costruzioni come questi in un tempo ragionevole e con la precisione necessaria.

3.2 Posso farlo?

Assolutamente! Tutto ciò che serve è un linguaggio di programmazione che si ha familiarità con. Abbiamo preparato alcune costruzioni con Logo, ma si può anche usare qualsiasi altro ambiente di programmazione (ad esempio una versione di Java; versioni Logo di frattali numerosi possono essere trovati in [1]). E 'anche facile da cambiare i programmi per creare i tuoi frattali - l'unica cosa che si avrebbe bisogno di cambiare è la funzione ricorsiva. Diamo innanzitutto un'occhiata alla funzione ricorsiva della curva di Koch-programma:

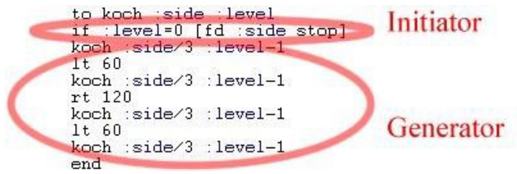
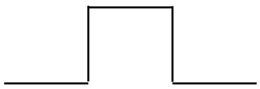


Fig.5 Recursive function in program *koch_curve.lgo*

Anche se non sei un programmatore, si può vedere cosa sta succedendo qui: L'iniziatore disegna un segmento di linea con una certa lunghezza in un dato angolo, e il generatore è composto da quattro segmenti di linea (la cui lunghezza è un terzo del segmento di linea originale) che vanno primo rettilineo, poi in un angolo di 60 ° a sinistra, quindi 120 ° a destra, e ancora 60 ° a sinistra per riportarlo ad una retta, creando così un triangolo (senza linea di base) come illustrato sopra. Ora supponiamo che vogliamo cambiare il generatore di non avere un triangolo in mezzo, ma una piazza, vale a dire avere qualcosa come questo:

$x_0 =$ $x_1 = f(x_0) =$ 

Ciò significa che il generatore è costituito da cinque linee che vanno prima rettilinei, poi in un angolo di 90 °, 90 ° sinistra a destra, di nuovo a 90 ° a destra, e 90 ° per essere lasciati indietro a una linea retta. Nel programma, che sarebbe simile a questa:

```
to koch :side :level
if :level=0 [fd :side stop]
koch :side/3 :level-1
lt 90
koch :side/3 :level-1
rt 90
koch :side/3 :level-1
rt 90
koch :side/3 :level-1
lt 90
koch :side/3 :level-1
end
```

Fig.6 Recursive function in program *koch_curve_square.lgo*

Se lasciamo che il programma eseguito con questa funzione ricorsiva, si ottiene quanto segue:

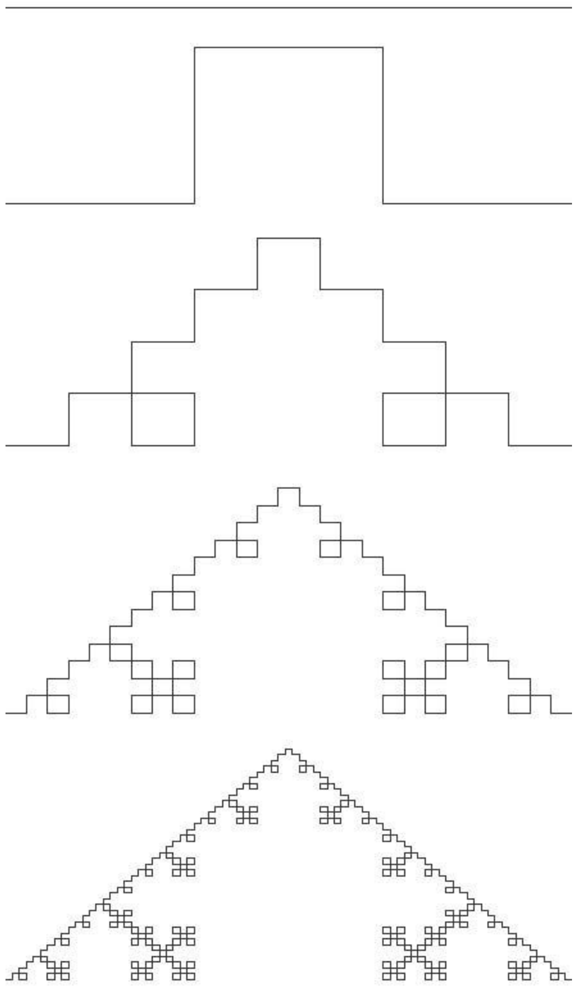


Fig.7 Modified Koch-curve with square generator

Quesito:

[3] Pensate di altre figure geometriche che possono sostituire il triangolo / quadrato e modificare il programma di conseguenza.

4 Traccciare curve di lunghezza infinita

Qual è la curva di Koch? Per rispondere a questa domanda dobbiamo ricordare che siamo in grado di descrivere ogni frattale classico da una sequenza, come descritto nel precedente punto 3.1. Anche la lunghezza di un frattale classica può essere descritta come una sequenza. Nel nostro caso (supponendo che l'iniziatore ha lunghezza 1), si può calcolare la lunghezza ln della n-esima iterazione come segue

$$l_0 = 1$$

tanto è chiaro. Abbiamo già detto che "Il generatore è costituito da quattro segmenti di lunghezza è uno terzo della lunghezza dei segmenti originali '", cioè la lunghezza della prima iterazione sarebbe

$$l_1 = 4\,\frac{l_0}{3} = \frac{4}{3}.$$

Nella successiva iterazione, ognuno dei quattro segmenti è ora nuovamente sostituito da quattro segmenti la cui lunghezza è un terzo del segmento precedente, cioè la sua lunghezza totale sarebbe

$$l_2 = 4\,\frac{l_1}{3} = \frac{4}{3}\,\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Siamo in grado di vedere dove questo porta a. Il n-esima iterazione ha lunghezza

$$l_n = 4\,\frac{l_{n-1}}{3} = \cdots = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Come la curva di Koch è il limite della sequenza, la lunghezza della curva di Koch è l'infinità che significa che la curva di Koch è infinitamente lunga (che significa anche che nessuno può davvero disegnare una curva di Koch-, solo un'approssimazione)! Ora, come sulla zona sotto la curva? Ci si aspetterebbe che sia anche infinitamente grande. Con i classici oggetti geometriche euclidee, questo sarebbe il caso, ma come la mettiamo frattali?
L'iniziatore è solo una linea retta, cioè l'area sotto è

$$A_0 = 0.$$

Nella prima iterazione, questa area è aumentata l'area di un triangolo equilatero con lato di lunghezza a_1.
Ricordando l'equazione per l'area di un triangolo equilatero, otteniamo

$$A_1 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,{a_1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{9}.$$

Nella seconda iterazione, questa zona viene nuovamente aumentata dalle aree di 4 triangoli equilateri con lato $a_2 = 1/9$. L'area diventa

$$A_2 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,{a_2}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{9}\left[1 + \frac{4}{9}\right].$$

Nella terza iterazione, questa zona viene nuovamente aumentata dalle aree di 16 triangoli equilateri con lato $a_3 = 1/27$. L'area diventa

$$A_3 = A_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,{a_3}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right].$$

In generale abbiamo

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,{a_n}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

Come Koch-curva è il limite della sequenza, l'area sotto la curva di Koch e’

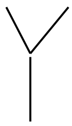
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20}$$

In ogni caso, l'area sotto la curva Koch è finito, mentre la sua lunghezza è infinita!
Quesito:

[4] Calcolare la lunghezza e l'area del modificato Koch-curva con generatore di piazza che abbiamo costruito sopra.

5 Alberi crescent

Per vedere come si arriva vicino alla natura con i frattali, abbiamo preparato anche una costruzione di un albero in Logo (e in Java). Questo è un albero che inizia come un semplice tronco. Dopo un anno, il tronco si sviluppa due rami. L'anno successivo, ciascuno dei rami cresce altri due rami ecc Matematicamente parlando, l'iniziatore è un segmento di linea verticale, il generatore aggiunge due segmenti di linea (con lunghezza ¾ del segmento originale), uno in un angolo di 30 ° a sinistra , uno in un angolo di 45 ° verso destra. In termini funzionali, questo significa

$x_0 =$ $x_1 =$ 

Quesito:

[5] Calcolare la lunghezza del ramo ultima iterazione quarto di questo albero.

[6] Se vuoi salire da terra fino alla fine di un ramo, qual è la lunghezza totale della scalata?

Ecco come questo albero assomiglia nella sua settima iterazione:

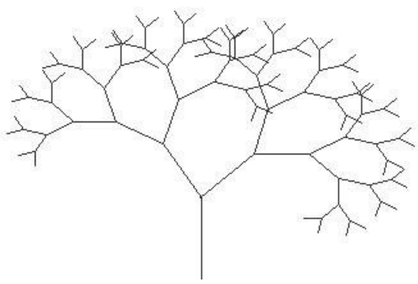


Fig.8 Tree in its seventh iteration

[7] Modificare il software in modo che l'albero cresce tre filiali all'anno. Scegliere angoli e lunghezze adatte per i rami (ma possono anche avere diverse lunghezze).

[8] Quanto è lungo un ramo in quarta iterazione vostro albero?

6 Frattali sono ovunque.

Questo capitolo mostra alcuni esempi di altri frattali, così come dove frattali e la teoria del caos (la teoria matematica sottostante) è usato anche nella vita quotidiana.

6.1 Rane meteo o frattali meteo?

"Caos meteo!" Potreste aver letto da qualche parte che il titolo, ma lo sapevate che ci sia qualche verità matematica in esso? Il tempo è che i matematici chiamano un sistema caotico, il che significa che i

Task:
cambiamenti molto piccoli in condizioni può avere effetti enormi dopo un po '. Lo stesso vale per i frattali, dove un piccolo cambiamento delle condizioni può anche avere un grande effetto sul risultato. Se si vede come l'originale Koch curva sembra che rispetto alla curva di Koch-modificato, si può vedere che le due curve non si somigliano affatto, anche se abbiamo solo sostituito un triangolo da un quadrato. Questo è ciò che rende le previsioni del tempo così difficile, in particolare previsioni a lungo termine!

6.2 Insiemi tipo Julia e Mandelbrot

Uno dei primi sistemi molto dinamici che la teoria del caos ricercato sembra piuttosto semplice: "moltiplicare valore x con se stesso e aggiungere un parametro c "(matematicamente si tratta di una sequenza di tipo

$$z_{n+1} = z_n{}^2 + c\ .$$

Se Iniziamo con $z_0 = 0.5$ si ottiene la seguente successione: 0,5, 0,25, 0,0625, 0,00390625 ... Dopo poche iterazioni, possiamo vedere dove questo sta andando - il risultato si avvicina sempre più a 0. Non molto interessante, si potrebbe pensare. Tuttavia, valori di inizio e parametri diversi porterà a risultati sorprendenti:

Quesito:

[9] Use a calculator or a computer to calculate the first couple of values for the above sequence with parameters $z_0 = 0.5$ and $c = -1$ e poi con $z_0 = 0.5$ e $c = 2$.

Ci si aspetterebbe un comportamento simile a quello della prima sequenza, ma che non succede nulla! Un insieme di valori porta ad una oscillazione tra i valori 0 e -1, l'altro non sembra avere qualsiasi prevedibilità sorta. Gaston Julia era interessato esattamente in questa sequenza e volevo sapere per il quale (nel suo complesso caso) i numeri di sequenza converge o almeno è stato limitato, e per i quali i parametri era illimitata. Il set riempito Julia (qui è una versione più veloce, ma meno istruttivo Java) con un dato parametro c risponde a questa domanda: Un numero complesso z_0 è un elemento del Julia set, quando la successione $z_{n+1} = z_n{}^2 + c$ `\ e limitata. Se colorare quegli elementi del piano complesso in nero, che sono elementi del set pieno di Julia, si ottiene il seguente (qui abbiamo usato il parametro c)

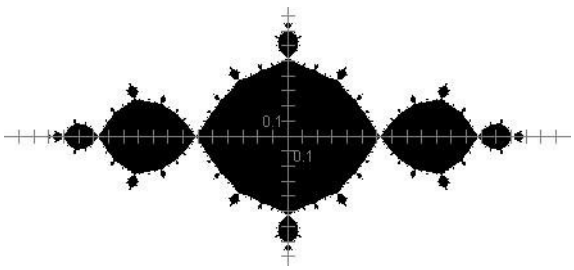


Fig.9 Filled Julia-set with c 1

Se lo zoom nella serie, si può osservare ancora una volta auto-similarità:

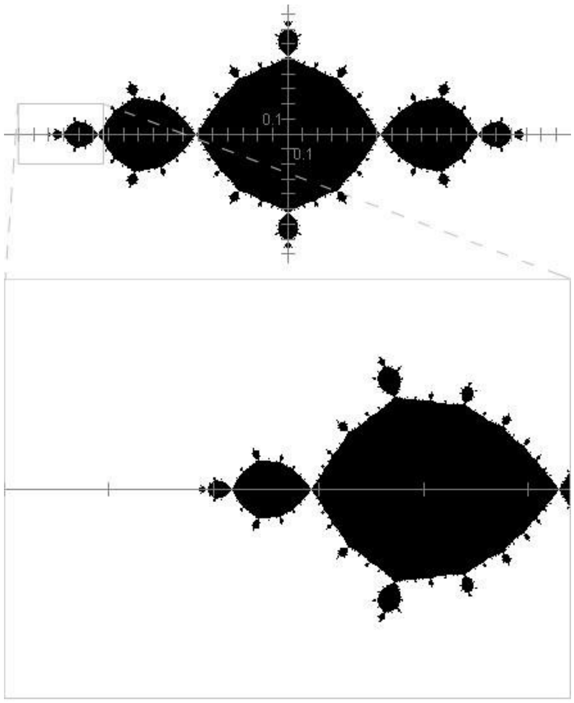


Fig.10 This looks very (self-) similar.

[10] Disegnare gli insiemi di Julia con $c = -1.25$ e $c = -1.4$. Che cosa si vede?
[11] Disegnare gli insiemi di Julia con $c = -1.5 + i0.6$.
Queste attività mostrano chiaramente che anche piccole variazioni nei parametri portare a risultati molto diversi. Una panoramica dei risultati per diversi valori di c si possono trovare in [2].
Benoît Mandelbrot, che era allievo di Gaston Julia, era anche interessato nella sequenza

$$z_{n+1} = {z_n}^2 + c \, .$$

Mentre Julia ha lasciato il c parametro fissato e controllato il comportamento sequenze per le diverse valori iniziali z_0 , Mandelbrot ha fatto il contrario: voleva conoscere il comportamento del successione per diversi valori di c, sempre partendo con $z_0 = 0$.
L'insieme di Mandelbrot (Logo o Java versione) è il risultato del suo lavoro: Un numero complesso c è un elemento del insieme di Mandelbrot, quando la successione

$$z_{n+1} = {z_n}^2 + c \, .$$

con $z_0 = 0$ e' limitata.

Se il colore gli elementi del piano complesso in nero, che sono gli elementi del set di Mandelbrot, otteniamo la seguente rappresentazione famoso, che è anche conosciuto come "l'uomo mela":

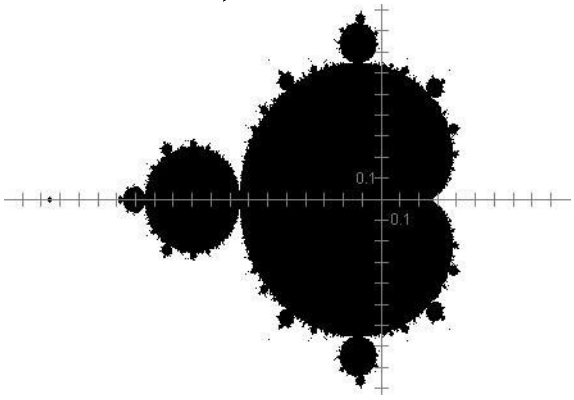


Fig.11 Mandelbrot set

[12] Zoom nel set di Mandelbrot (in particolare le regioni di confine sono interessanti) e vedere se si può scoprire di auto-similarità.

Task:

A volte si può vedere rappresentazioni più colorate del set di Mandelbrot (Logo o la versione Java). Ciò può essere fatto non solo distinguere tra nero (la sequenza è limitato) e nero (la sequenza non è limitato), ma assegnando colori diversi a "velocità" di divergenza. Questa assegnazione di colori può avvenire in vari modi, quindi il seguente quadro è solo una delle tante rappresentazioni:

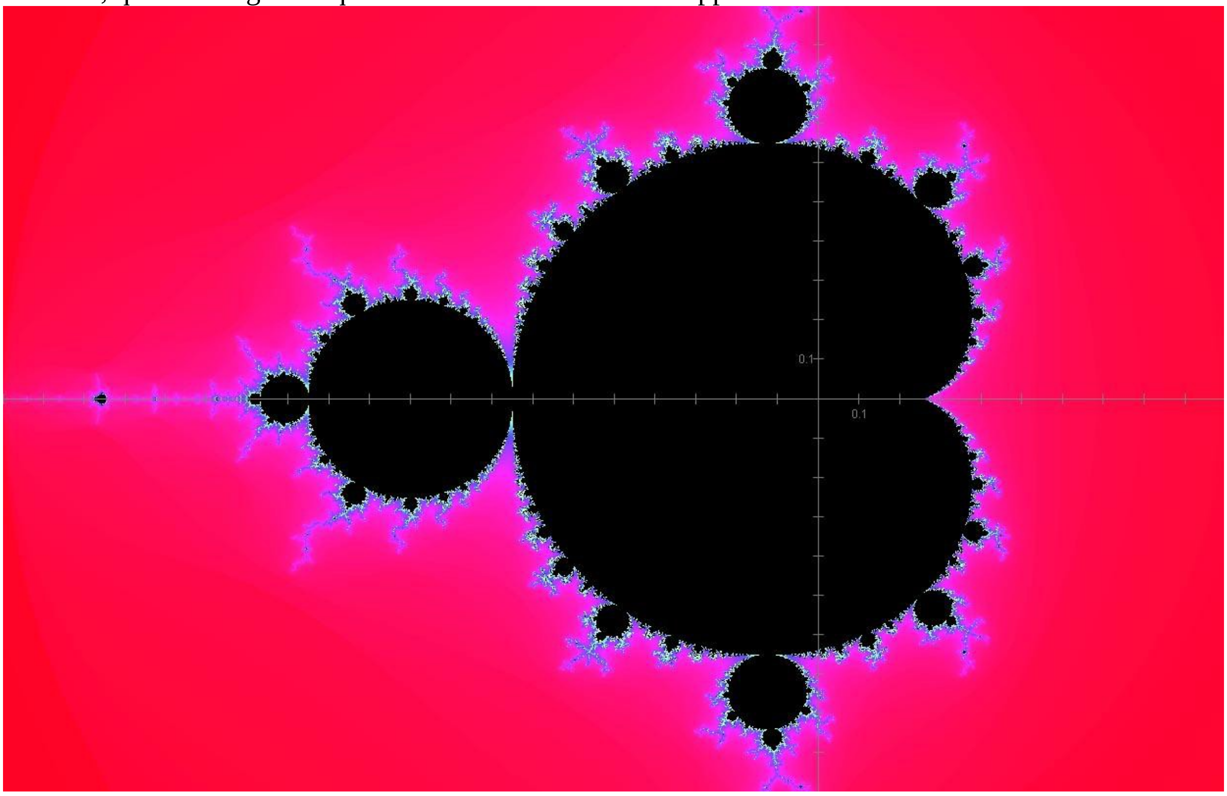


Fig.12 Colourful apple man

Le immagini sembrano molto bello, ma come vengono effettivamente creata? Sia la Julia e l'insieme di Mandelbrot avrebbe teoricamente bisogno di calcolare i limiti di un sacco di serie. Non soltanto questo sarebbe matematicamente difficile, richiederebbe software molto complesso - e un tempo lungo. Ma possiamo creare ottime approssimazioni della Julia e di Mandelbrot imposta abbastanza facilmente, perché in realtà non è necessario conoscere l'esatto valore del limite, vogliamo solo sapere se la sequenza ha limite (finito). Per questo, si può dimostrare che se la successione c (sia con c parametro fisso e uno variabile a partire elemento z_0 nel caso degli insiemi Julia, o con un parametro c variabile e fisso punto di partenza z_0 .

Per il calcolo esatto della Julia o di insiemi di Mandelbrot, questo non aiuterebbe tutti noi troppo, perché come potremmo sapere se la sequenza raggiunge un valore con modulo maggiore di 2 per un indice, allora la succesisone non e' limitata?

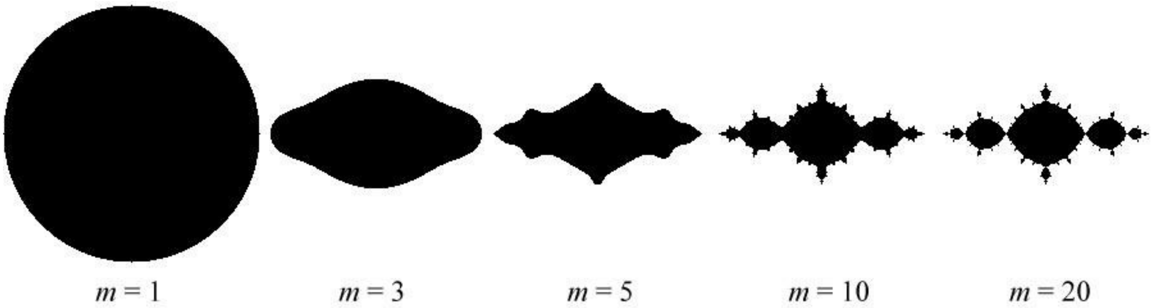


Fig.13 Approximation of the Julia set with c 1 for different values of m

Attività simile può essere fatto con altri insiemi Julia, nonché con l'insieme di Mandelbrot.

Quesiti:

[13] Provare la stessa approssimazione per gli insiemi di Julia con con *c=-1.25 e c=-1.4*. Che cosa si vede

[14] Provate il ravvicinamento l'insieme di Mandelbrot. Come funziona con m=1? Perche'?

6.3 La vita al margine del caos

La biologia sta iniziando a utilizzare la teoria del caos pure. E come in l'uomo mela, le aree di interesse sembrano essere le regioni di confine. Alcuni scienziati ritengono che la vita si sviluppa ai margini del caos: troppo caos, e la vita non può svilupparsi (se le condizioni cambiano drasticamente tutto il tempo, maggior parte delle forme di vita non può seguire abbastanza veloce), la stabilità troppo e rigidità, e la vita non è possibile regolare sufficiente a il suo ambiente e si estingueranno.

References

[1] http://www.dm.unipi.it/~olymp/comenius/ (August 9, 2011)

[2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a9/Julia-Teppich.png (October 14, 2011)