Fraktale – Nicht alle Brüche brauchen einen Gips

Andreas Ulovec and Hannes Hohenwarter

1 Einführung

Jahrhundertelang haben wir versucht, die Natur mit einfachen geometrischen Formen zu beschreiben: Kreise, Quadrate, Kegel, Zylinder … Mit anderen Worten, Objekte aus der sogenannten Euklidischen Geometrie. In den 1970ern und 1980ern hat Benoît Mandelbrot diese Weltsicht kritisiert, indem er sagte: „Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise, Baumrinde ist nicht glatt, und Blitze bewegen sich nicht auf Geraden.“ Um dies zu erklären verwendete er verschiedene Modelle, von denen jenes einer Küste vermutlich am bekanntesten ist: Ein Satellitenfoto der britischen Küste sieht wie eine glatte, ununterbrochene Linie aus, deren Länge einfach zu messen ist. Fliegt man mit einem Flugzeug über dieselbe Küste, kann man scharfe Kanten, Buchten etc. sehen, durch welche die Küstenlinie viel länger wirkt. Wechselt man in einen Paragleiter, kann man Strände, Riffe, Häfen etc. sehen, und die Küstenlinie sieht noch länger aus. Und wenn man die Küste entlang spaziert, sieht sie noch viel gezackter und bizarrer aus – und vor allem, noch länger! Wir sehen schon, wohin das führt – wenn man eine immer feinere Auflösung verwendet, wird die Küstenlinie immer länger. Eigentlich wird sie unendlich lang! Der Fläche des Landes ist hingegen nicht unendlich groß – aber wie kann eine Figur einen endlichen Flächeninhalt, aber unendlichen Umfang haben? Mit den oben erwähnten Euklidischen Formen funktioniert das nicht; mit Fraktalen hingegen schon! Schauen wir mal, wie das geht!

2 Was sind Fraktale?

2.1 Definition der formlosen Formen

Wie Du Dir vorstellen kannst, ist es nicht ganz einfach, etwas zu definieren, das sogar Euklid als „formlos“ bezeichnet hat (Mandelbrot selbst verwendete jedoch die Bezeichnung *fraktale Form* oder einfach *Fraktal*, vom lateinischen *fractus*, was gebrochen bedeutet). Es gibt mehrere mögliche Definitionen für Fraktale. Wir verwenden jene, die unserer Meinung nach am besten die Eigenschaften von Fraktalen zusammenfasst.

Definition: Eine Struktur heißt Fraktal, wenn sie selbstähnlich ist und eine nicht-ganzzahlige Dimension haben kann.

Um diese Definition zu verstehen, müssen wir noch zwei Dinge klären – Selbstähnlichkeit und Dimension.

2.2 Selbstähnlichkeit

Was meinen wir mit Selbstähnlichkeit? Ein typisches Beispiel aus der Natur wäre ein großer Baum. Nimmt man einen großen Ast dieses Baumes her, dann sieht der eigentlich genauso aus wie der ganze Baum, nur kleiner. Bricht man davon einen kleineren Ast ab, dann sieht dieser sehr ähnlich aus wie der große Ast (und wie der ganze Baum), aber wieder etwas kleiner. Bricht man davon einen kleinen Zweig ab, sieht der wieder ähnlich aus etc. In der Natur kann man das nur ein paar Mal machen, aber in der fraktalen Geometrie kann man diesen Vorgang endlos wiederholen, und man erhält immer ein Objekt, das ähnlich aussieht wie das Ganze. Wir definieren daher:

Definition: Ein Objekt heißt *selbstähnlich*, wenn Teile davon skalierte (nicht notwendigerweise exakte) Kopien von sich selbst enthalten. Ein Objekt heißt *exakt selbstähnlich*, wenn es nur aus exakten (skalierten) Kopien von sich selbst besteht.

Bevor das endgültig zur Verwirrung führt, zeigen wir ein Beispiel eines (exakt) selbstähnlichen Objekts. Dieses Objekt heißt Kochkurve (wir werden gleich sehen, wie es konstruiert wird).

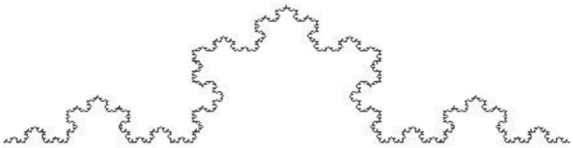


Abb.1 Kochkurve

Man sieht das vielleicht nicht sofort, aber diese Kurve besteht aus vier Kopien von sich selbst. Um das besser zu zeigen, färben wir die vier Teile in verschiedenen Farben ein:

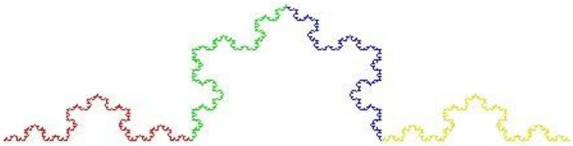


Abb.2 Kochkurve in Farbe

Der rote Teil der Kurve sieht also genauso aus wie die ganze Kurve, nur kleiner. Würden wir nur den linken Teil der roten Kurve anschauen, würde dieser wieder genauso wie die ganze Kurve aussehen.

2.3 Gebrochene Dimensionen

Wir sind ganzzahlige Dimensionen gewohnt: Geraden haben Dimension 1, Ebenen, Quadrate, Kreise etc. haben Dimension 2, Würfel, Kugeln, Kegel etc. haben Dimension 3. Aber was haben wir schon im ersten Kapitel erfahren? „Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise, Baumrinde ist nicht glatt, und Blitze bewegen sich nicht auf Geraden.“ Um Fraktale zu beschreiben, brauchen wir daher auch Dimensionen, die keine ganzen Zahlen sind. Die Kochkurve hat zum Beispiel eine Dimension von ungefähr 1,262, d.h. sie ist etwas zwischen einer Geraden und einer Ebene. Je näher die Dimension bei 2 liegt, desto mehr „füllt“ das Fraktal die Ebene aus.

Na gut, wir brauchen nicht-ganzzahlige Dimensionen, aber wie definieren wir diese? Es gibt mehrere Möglichkeiten das zu tun. Wir verwenden hier die sogenannte *Hausdorff-Dimension* (ebenso wie Mandelbrot das getan hat), und davon eigentlich nur einen Spezialfall, nämlich die sogenannte *Selbstähnlichkeits-Dimension* (die für exakt selbstähnliche Objekte definiert ist).

Definition: Ein geometrisches Objekt, das aus n disjunkten Teilen besteht, welche exakte 1:m-Kopien (in linearer Ausdehnung gemessen) dieses Objekts sind, hat die *Selbstähnlichkeits-Dimension*

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

Daraus lässt sich recht einfach die Selbstähnlichkeits-Dimension der Kochkurve bestimmen. Sie besteht aus vier exakten Kopien von sich selbst, die den Maßstab 1:3 haben, d.h. ihre Dimension ist

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$$

Praktischerweise ist die „normale“ (d.h. Euklidische) Dimension in dieser Definition enthalten. Berechnet man z.B. die Selbstähnlichkeits-Dimension eines Quadrates, erhält man immer noch 2:

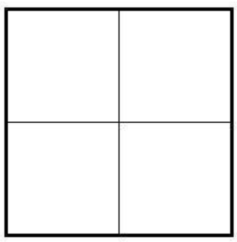


Abb.3 Quadrat in vier Teilen

Wie man leicht sieht, besteht das große Quadrat aus 4 kleinen Quadraten, die einfach 1:2-Kopien (in linearer Ausdehnung, d.h. jede Seite ist eine 1:2 Kopie) des großen Quadrats sind. Die Selbstähnlichkeits-Dimension wäre also:

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2$$

Aufgaben:

[1] Zeige auf ähnliche Weise, dass die Selbstähnlichkeits-Dimension eines Rechtecks 2 ist.

[2] Zeige auf ähnliche Weise, dass die Selbstähnlichkeits-Dimension eines Würfels 3 ist.

3 Wie macht man Fraktale?

Bis jetzt haben wir nur „fertige“ Fraktale analysiert. Aber wie konstruiert man eigentlich ein Fraktal? Und warum hat das bis ins späte 20. Jahrhundert niemand wirklich gemacht, obwohl die Rechnungen doch so einfach sind?

Die erste Frage – wie man ein Fraktal konstruiert – hat mehrere mögliche Antworten. Der Grund dafür ist, dass der Begriff Fraktal aufgrund seiner Definition sehr weit gefasst ist, d.h. eine Menge ziemlich verschiedener Strukturen sind fraktale Objekte, und man kann nicht einfach eine einzige Konstruktionsmethode für diese Vielfalt haben. Es gibt aber eine große Klasse von Fraktalen, die alle auf die gleiche Art konstruiert werden.

3.1 Klassische Fraktale

Mit dem Begriff *klassisches Fraktal* meinen wir ein Fraktal, das exakt selbstähnlich ist und mit Hilfe einer wiederholten Ersetzung konstruiert werden kann: Ein Startobjekt (meist eine Gerade oder Strecke), der sogenannte *Initiator*, wird durch ein anderes geometrisches Objekt (welches aus mehreren Initiatoren besteht) ersetzt, dem *Generator*. In der daraus resultierenden Figur wird wieder jeder Initiator durch den Generator ersetzt, und dieser Prozess unendlich oft wiederholt. Das Fraktal ist der Grenzwert dieses Prozesses. Mathematisch können wir das durch eine rekursive Funktion, oder auch durch eine rekursiv definierte Folge, beschreiben:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

wobei x_0 der Initiator ist, und $x_1 = f(x_0)$ der Generator.

Bevor uns das zu sehr verwirrt, demonstrieren wir den Vorgang wieder anhand der Kochkurve.

Beispiel: Der Initiator der Kochkurve ist eine Strecke. Der Generator besteht aus vier Strecken, deren Länge ein Drittel der Länge der ursprünglichen Strecke ist. Er wird durch eine Dreiteilung der ursprünglichen Strecke erzeugt, wobei das mittlere Drittel entfernt und durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundlinie ersetzt wird. Das Ganze wird klarer, wenn man es als rekursive Funktion anschreibt:

$x_0 =$ ——— $x_1 = f(x_0) =$ 

Diese vier Strecken werden dann wieder durch den Generator ersetzt, was zu einer Figur, die aus 4x4=16 Strecken besteht, führt. Diese Strecken werden wieder durch den Generator ersetzt usw. Man erhält also die folgende Konstruktion:

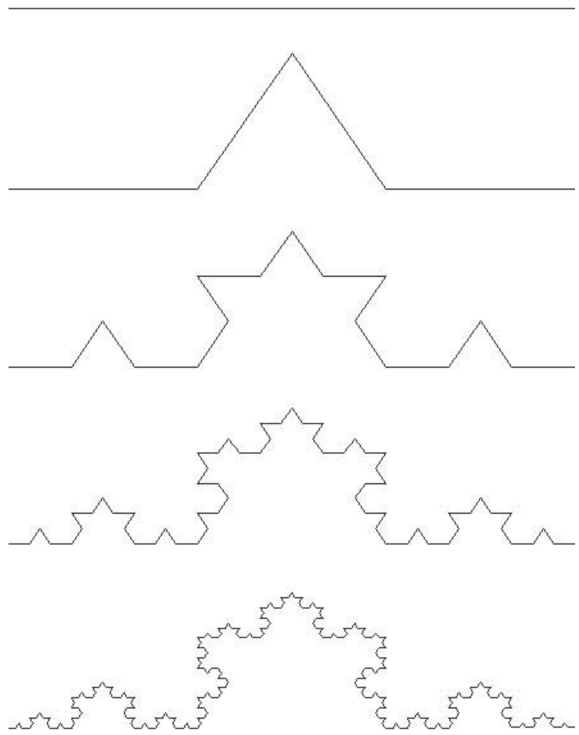


Abb.4 Iterationen der Kochkurve

Wenn wir unendlich so weiter machen würden, erhielten wir die Kochkurve. Aber bereits die ersten fünf Iterationen zeigen schon eine gute Näherung der Kurve. Die Konstruktion beantwortet auch die zweite Frage, die wir oben gestellt hatten: Warum wurde das nicht bereits schon früher im Lauf der Geschichte gemacht? Na ja, einige Konstruktionen wurden schon früher gemacht, aber wenn Du mal versuchst, das Ganze mit der Hand zu zeichnen, wirst Du merken, dass selbst die dritte oder vierte Iteration schon sehr mühsam zu konstruieren ist. Nur mit Hilfe des Computers war es möglich, solche Konstruktionen in einer vernünftigen Zeit und mit der notwendigen Genauigkeit zu machen.

3.2 Kann ich das auch?

Na klar! Alles was Du brauchst ist irgendeine Programmiersprache, mit der Du Dich auskennst. Wir haben eine Konstruktion in Logo vorbereitet, aber Du kannst auch eine andere Programmierumgebung verwenden (hier z.B. eine Java-Version; Logo-Versionen von vielen Fraktalen findest Du in [1]). Die Programme lassen sich auch leicht ändern, um andere Fraktale zu erzeugen – Du musst nur die rekursive Funktion ändern. Schauen wir uns zunächst die rekursive Funktion der Kochkurve in Logo an:

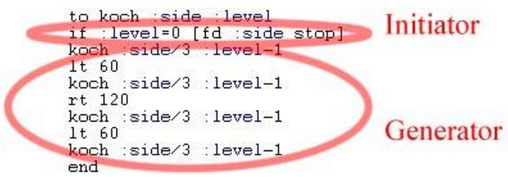
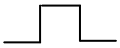


Abb.5 Rekursive Funktion im Programm *koch_curve.lgo*

Selbst wenn Du keine große Programmiererfahrung hast, kannst Du sehen, was sich hier tut: Der Initiator zeichnet eine Strecke mit gegebener Länge in einem gegebenen Winkel, und der Generator besteht aus vier Strecken (deren Länge ein Drittel der Länge der ursprünglichen Strecke beträgt), die zuerst in die gleiche Richtung, dann in einem Winkel von 60° nach links, dann 120° nach rechts, und wieder 120° nach links gezeichnet werden, was sie wieder in die ursprüngliche Richtung bringt. Das erzeugt ein Dreieck (ohne Grundlinie), wie oben bei der Definition der Kochkurve gezeigt. Nehmen wir an, wir wollen, dass der Generator kein Dreieck, sondern ein Quadrat in der Mitte hat, d.h. etwa so:

$x_0 =$ ———— $\qquad x_1 = f(x_0) =$ 

Das bedeutet, dass der Generator aus fünf Strecken besteht, die zuerst in die gleiche Richtung, dann in einem Winkel von 90° nach links, dann 90° nach rechts, nochmal 90° nach rechts, und wieder 90° nach links gezeichnet werden, was sie wieder in die ursprüngliche Richtung bringt. In Logo würde das so aussehen:

```
to koch :side :level
if :level=0 [fd :side stop]
koch :side/3 :level-1
lt 90
koch :side/3 :level-1
rt 90
koch :side/3 :level-1
rt 90
koch :side/3 :level-1
lt 90
koch :side/3 :level-1
end
```

Abb.6 Rekursive Funktion im Programm *koch_curve_square.lgo*

Wenn wir das Programm mit dieser rekursiven Funktion laufen lassen, erhalten wir:

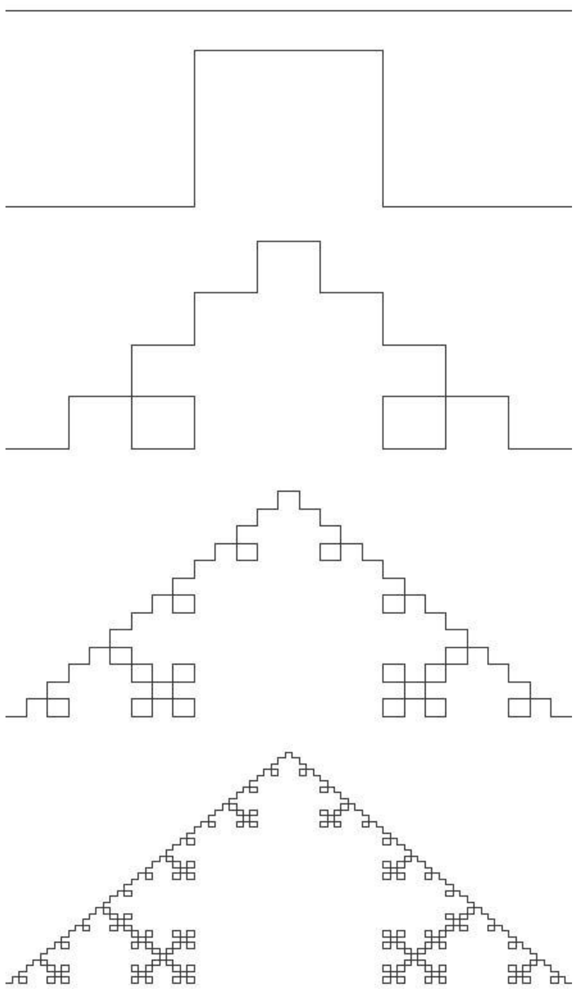


Abb.7 Modifizierte Kochkurve mit quadratischem Generator

Aufgabe:

[3] Überlege Dir andere geometrische Figuren (z.B. n-Ecke), die das Dreieck bzw. Quadrat ersetzen könnten, und modifiziere das Programm entsprechend.

4 Endlose Kurven zeichnen

Wie lang ist die Kochkurve? Um diese Frage zu beantworten erinnern wir uns, dass man jedes klassische Fraktal durch eine Folge beschreiben kann, wie in Kapitel 3.1 gezeigt. Daher kann man auch die Länge des Fraktals durch eine Folge beschreiben. In unserem Fall (wir nehmen an, dass der Initiator die Länge 1 hat) können wir die Länge l_n der n-ten Iteration wie folgt berechnen:

$$l_0 = 1,$$

so viel ist ja klar. Wir haben oben gesagt, dass „der Generator aus vier Strecken besteht, deren Länge ein Drittel der ursprünglichen Strecke beträgt“, d.h. die Länge der ersten Iteration wäre

$$l_1 = 4 \cdot \frac{l_0}{3} = \frac{4}{3} \cdot l_0 = \frac{4}{3}.$$

In der nächsten Iteration wird jede der vier Strecken wieder durch vier Strecken ersetzt, deren Länge ein Drittel der Länge der vorhergehenden Strecke beträgt, d.h. die Gesamtlänge wäre

$$l_2 = 4 \cdot \frac{l_1}{3} = \frac{4}{3} \cdot l_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot l_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Wir sehen schon, wohin das führt. Die n-te Iteration hat die Länge

$$l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Da die Kochkurve der Grenzwert der Folge ist, beträgt die Länge der Kochkurve

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

d.h. die Kochkurve ist unendlich lang (das bedeutet auch, dass man die Kochkurve nicht wirklich zeichnen kann, sondern nur eine Näherung)! Wie sieht es mit der Fläche unterhalb der Kurve aus? Man würde vermuten, dass diese ebenfalls unendlichen Flächeninhalt hat. Bei klassischen (euklidischen) Objekten wäre das auch so, aber wie ist das bei Fraktalen?

Der Initiator ist einfach eine Strecke, d.h. der Flächeninhalt der darunterliegenden Fläche ist

$$A_0 = 0.$$

In der ersten Iteration wird dieser Flächeninhalt vermehrt um den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{3}$. Wenn wir uns an die Gleichung für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks erinnern, erhalten wir

$$A_1 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot {a_1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

In der zweiten Iteration wird dieser Flächeninhalt wieder vermehrt, und zwar um den Flächeninhalt von 4 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge $a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, d.h. der gesamte Flächeninhalt ist

$$A_2 = A_1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot {a_2}^2 = A_1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{9}\right].$$

In der dritten Iteration wird der Flächeninhalt wieder vermehrt, diesmal um den Flächeninhalt von $4^2 = 16$ gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge $a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, der gesamte Flächeninhalt ist also

$$A_3 = A_2 + 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot {a_2}^2 = A_2 + 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\right].$$

Allgemein wäre der Flächeninhalt der Fläche unter der *n*-ten Iteration der Kochkurve gegeben durch

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{n} 4^{i-1} \left(\frac{1}{9}\right)^{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}.$$

Da die Kochkurve der Grenzwert der Folge ist, wäre der Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1},$$

Um diesen Grenzwert zu berechnen, müssen wir den Grenzwert einer Reihe berechnen, nämlich

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i}.$$

Das ist eine geometrische Reihe mit Startwert $b_1 = 1$ und Quotient $q = \frac{4}{9}$. Die Summe dieser Reihe ist

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Damit lässt sich einfach der Flächeninhalt der Fläche unter der Kochkurve berechnen:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

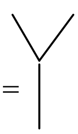
Auf jeden Fall ist der Flächeninhalt endlich, während die Länge der Kurve unendlich ist!

Aufgabe:

[4] Berechne die Länge der modifizierten Kochkurve mit dem quadratischen Generator, wie wir sie oben konstruiert haben. Wie groß ist der Flächeninhalt der Fläche unter dieser Kurve?

5 Bäume

Um zu zeigen, wie nahe man der Natur mit Fraktalen kommen kann, haben wir die Konstruktion eines Baumes in Logo (und in Java) vorbereitet. Dieser Baum beginnt einfach mit einem Stamm. Nach einem Jahr wachsen aus dem Stamm zwei Äste. Im nächsten Jahr wachsen aus diesen Ästen wieder jeweils zwei Äste usw. Mathematisch gesprochen ist der Initiator eine senkrechte Strecke, der Generator fügt an deren Ende zwei Strecken (mit Länge ¾ der ursprünglichen Strecke) hinzu, eine im Winkel 30° nach links, die andere im Winkel 45° nach rechts. Als Funktion angeschrieben wäre das

$x_0 = |$
$x_1 = f(x_0) =$ 

Aufgaben:

[5] Berechne die Länge des letzten Zweiges der vierten Iteration dieses Baumes.

[6] Wenn Du von ganz unten auf diesen Baum klettern willst, wie lang ist die Kletter-Strecke?

So würde dieser Baum in der siebenten Iteration aussehen:

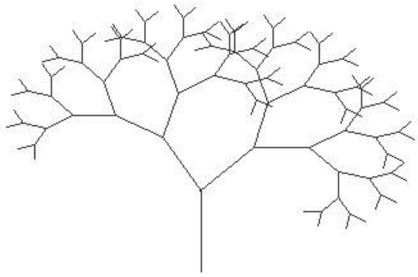


Abb.8 Baum in siebenter Iteration

Aufgaben:

[7] Modifiziere das Programm sie, dass jeder Ast jedes Jahr drei neue Äste bekommt. Wähle selbst passende Winkel und Längen für die Äste (sie können auch unterschiedliche Längen haben).

[8] Wie lang ist einer der Äste in Deinem Baum in der vierten Iteration?

6 Fraktale sind überall

Dieses Kapitel zeigt ein paar Beispiele von Fraktalen, und auch Beispiele, wo Fraktale und die Chaostheorie (die hinter den Fraktalen steckende mathematische Theorie) im Alltag vorkommen.

6.1 Wetter-Frosch oder Wetter-Fraktal?

„Wetterchaos!“ Diese Schlagzeile kann man immer wieder lesen, aber hast Du gewusst, dass sie ein Stück mathematische Wahrheit enthält? Wetter ist ein typisches Beispiel für etwas, dass Mathematikerinnen und Mathematiker als *chaotisches System* bezeichnen. Das bedeutet, dass sehr kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen nach einiger Zeit große Änderungen des ganzen Systems bewirken können. Dies trifft auch oft auf Fraktale zu. Wenn Du Dir die ursprüngliche Kochkurve anschaust und sie mit der modifizierten Kochkurve vergleichst, siehst Du, dass sich die beiden überhaupt nicht ähnlich sehen, obwohl wir nur ein Dreieck durch ein Quadrat ersetzt haben. Dieser Effekt macht Wettervorhersagen so schwierig, vor allem Langzeitvorhersagen!

6.2 Julia-Mengen und Mandelbrotmenge

Eines der ersten in der Chaostheorie untersuchten Systeme hört sich sehr einfach an: „Multipliziere einen Wert x mit sich selbst und addiere einen Parameter c“. Mathematisch betrachtet ist das eine Folge $z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$. Wenn wir mit $z_0 = 0.5$ und $c = 0$ beginnen, erhalten wir die Folge 0.5, 0.25, 0.0625, 0.00390625 … Nach ein paar Iterationen sehen wir, dass das Ergebnis sich immer mehr 0 nähert. Nicht gerade spannend, könnte man meinen. Andere Startwerte und Parameter führen aber zu überraschenden Ergebnissen:

Aufgabe:

[9] Berechne mit dem Taschenrechner oder dem Computer die ersten paar Werte der oberen Folge, zuerst mit den Parametern $z_0 = 0.5$ und $c = -1$, dann mit $z_0 = 0.5$ und $c = 2$.

Man würde erwarten, dass sich die Folgen ähnlich wie die erste Folge verhalten, aber das ist überhaupt nicht der Fall! Die eine Folge wechselt zwischen 0 und 1, die andere scheint überhaupt kein vorhersagbares Verhalten zu zeigen. Gaston Julia hat sich für genau diese Folge $z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$ interessiert. Er wollte wissen, für welche (in seinem Fall komplexen) Werte die Folge konvergiert, oder zumindest beschränkt ist, und für welche sie unbeschränkt ist. Die ausgefüllte Julia-Menge (hier eine Java-Version) mit gegebenem Parameter *c* beantwortet diese Frage: Eine komplexe Zahl z_0 ist ein Element der ausgefüllten Julia-Menge, wenn die Folge $z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$ mit Startwert z_0 beschränkt ist, ansonsten ist z_0 kein Element dieser Menge. Wenn wir jene Elemente der komplexen Zahlenebene schwarz zeichnen, die Elemente der ausgefüllten Julia-Menge sind, erhalten wir (mit Parameter $c=-1$):

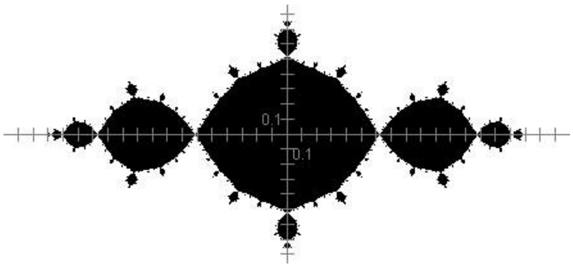


Abb.9 Ausgefüllte Julia-Menge mit $c=-1$

Zoomen wir in diese Menge, können wir wieder Selbstähnlichkeit beobachten:

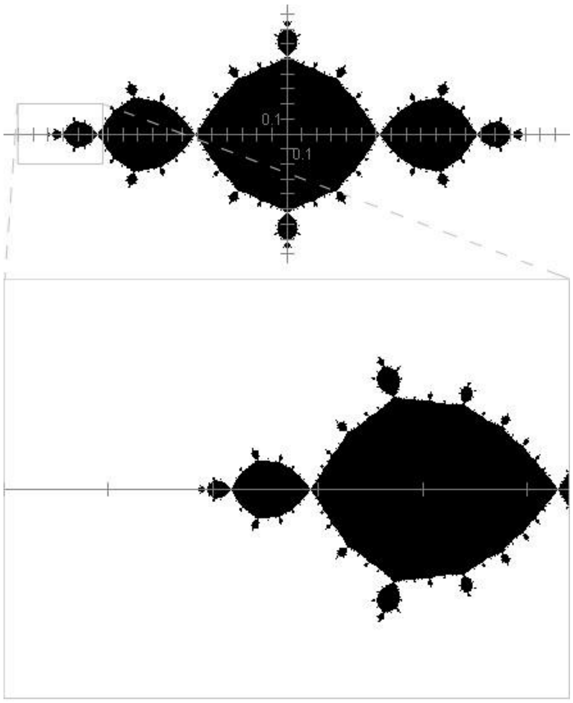


Fig.10 Das sieht doch sehr (selbst-)ähnlich aus …

Aufgaben:

[10] Zeichne die ausgefüllte Julia-Menge mit $c=-1.25$, und dann mit $c=-1.4$.Was siehst Du?

[11] Zeichne die ausgefüllte Julia-Menge mit $c=-0.5+i\cdot 0.6$.

Diese Aufgaben zeigen ganz klar, dass kleine Änderungen des Parameters zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen führen. Einen Überblick über das Aussehen der ausgefüllten Julia-Mengen für verschiedene Werte des Parameters *c* liefert [2].

Benoît Mandelbrot, ein Schüler von Gaston Julia, hat sich ebenfalls für die Folge $z_{n+1}=z_n^{\,2}+c$ interessiert. Während Julia aber den Parameter *c* fixiert und das Verhalten der Folge für verschiedene Startwerte z_0 untersucht hat, ging Mandelbrot anders herum vor: Er wollte wissen wie sich die Folge für verschiedene Werte von *c* verhält, wenn man immer mit $z_0=0+0i$ beginnt. Die Mandelbrotmenge (in Logo und Java) ist das Ergebnis seiner Arbeit: Eine komplexe Zahl *c* ist ein Element der Mandelbrotmenge, wenn die Folge $z_{n+1}=z_n^{\,2}+c$ mit Anfangswert $z_0=0+0i$ beschränkt ist, ansonsten ist *c* kein Element dieser Menge. Wenn wir jene Elemente der komplexen Zahlenebene schwarz zeichnen, die Elemente der Mandelbrotmenge sind, erhalten wir die folgende berühmte Darstellung, die auch als „Apfelmännchen“ bekannt ist:

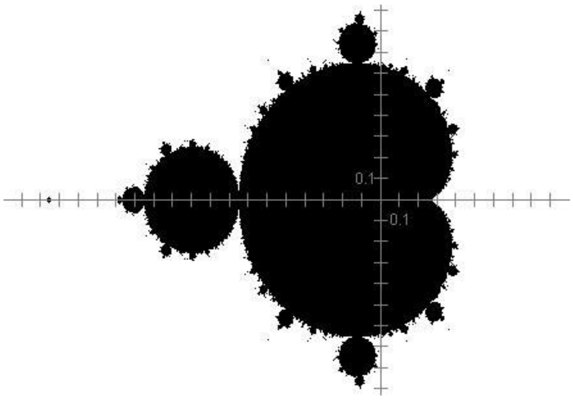


Abb.11 Mandelbrotmenge

Aufgabe:

[12] Zoome in die Mandelbrotmenge (die Randregionen sind besonders interessant) und schau, ob Du Selbstähnlichkeit beobachten kannst.

Manchmal kann man auch farbige Darstellungen der Mandelbrotmenge (in Logo und Java) sehen. Dies kann man erreichen, indem man nicht nur zwischen schwarz (die Folge ist beschränkt) und weiß (die Folge ist unbeschränkt) unterscheidet, sondern je nach „Geschwindigkeit" der Divergenz verschiedene Farben zuweist. Dies kann auf unterschiedliche Arten geschehen, die folgende Abbildung ist also nur eine von vielen möglichen Darstellungen:

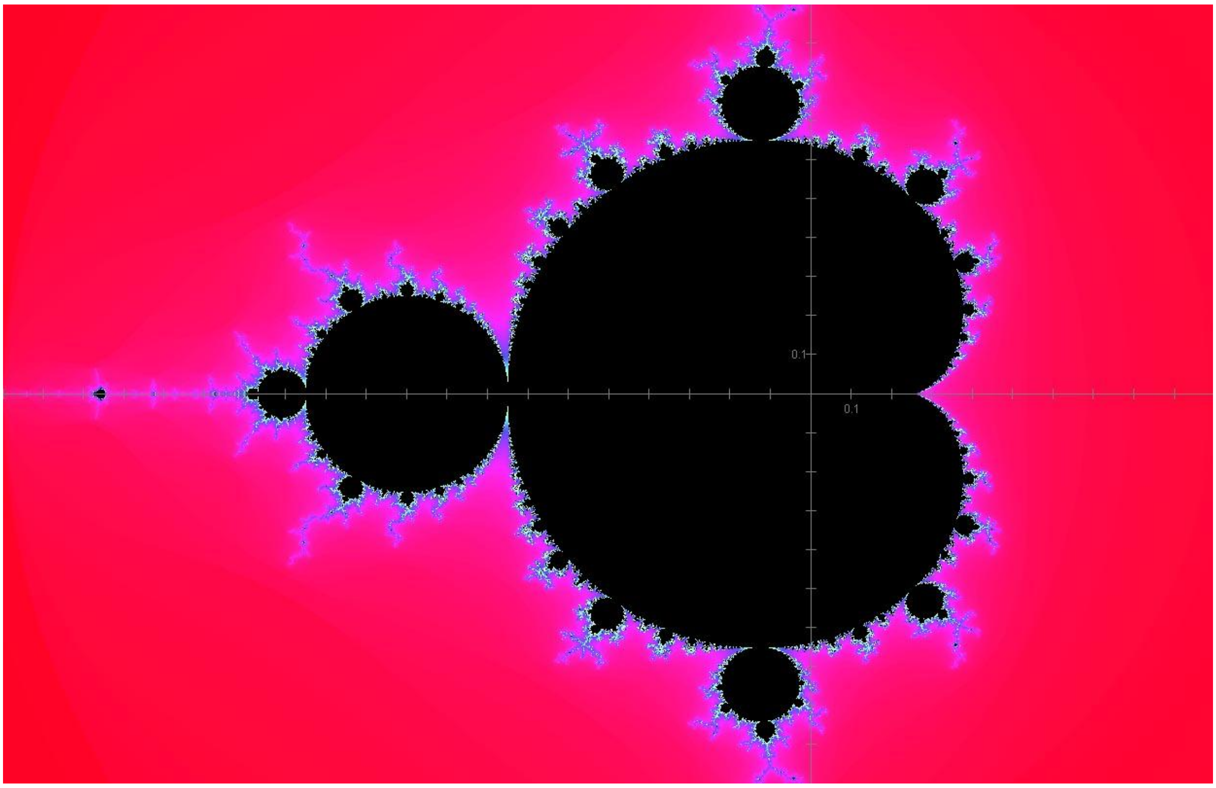


Abb.12 Apfelmännchen in Farbe

Diese Abbildungen sehen sehr hübsch aus, aber wie werden sie eigentlich erstellt? Sowohl die Julia- als auch die Mandelbrotmenge würden theoretisch die Berechnung von Grenzwerten von sehr vielen Folgen erfordern. Das wäre nicht nur mathematisch schwierig, es würde auch ein sehr komplexes Programm erfordern – und viel Zeit. Wir können aber eine gute *Näherung* der Julia- und Mandelbrot-mengen auf recht einfache Weise erstellen, da wir ja eigentlich nicht die genaue *Größe* des Grenzwerts wissen wollen, sondern nur, ob die Folge überhaupt einen (endlichen) Grenzwert *hat* bzw. beschränkt bleibt. Man kann beweisen dass, wenn die Folge $z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$ (mit fixem Parameter c und variablem Startwert z_0 im Falle der Julia-Mengen, oder mit variablem Parameter c und fixem Startwert $z_0 = 0 + 0i$ im Falle der Mandelbrotmenge) einen Wert z_i mit $|z_i| > 2$ erreicht, die Folge keinen endlichen Grenzwert hat bzw. unbeschränkt ist. Für eine exakte Berechnung der Julia- oder Mandelbrotmengen würde uns das natürlich nicht viel nützen, denn wie wollen wir herausfinden ob die Folge einen Wert z_i mit $|z_i| > 2$ für irgendeinen Index i erreicht? Für eine Näherung ist das aber schon sehr brauchbar, denn wir können einfach sagen: Berechnen wir mal die ersten paar Werte von z_i, und wenn für diese Werte alle $|z_i| \leq 2$ gilt, dann können wir recht sicher sein, dass die Folge beschränkt bleibt. Etwas genauer ausgedrückt wählt man eine Zahl m (ein typischer Wert wäre etwa $m = 20$), dann berechnet man $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{20}$, und wenn für alle diese Werte $|z_i| \leq 2$ gilt, sagen wir, die Folge ist beschränkt. Gilt für einen der Werte $|z_i| > 2$, dann hören wir mit der Berechnung auf und sagen, dass die Folge unbeschränkt ist. Je größer der Wert für m ist, desto genauer ist die Näherung. Um dies zu zeigen, können wir uns eine Näherung der ausgefüllten Julia-Menge mit $c = -1$ für verschiedene Werte von m anschauen:

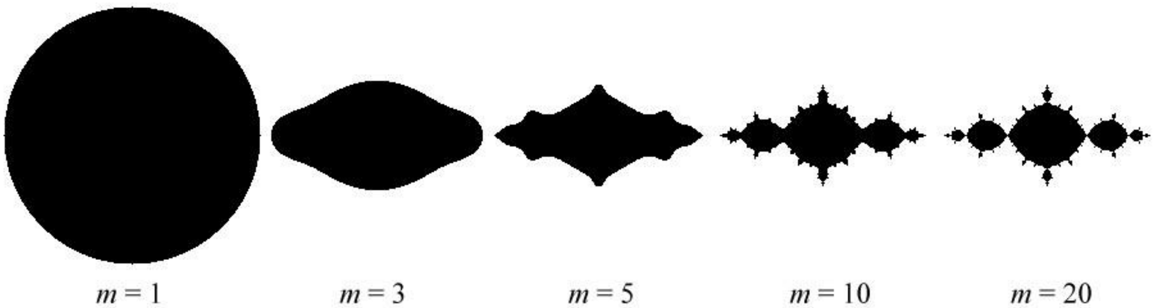


Abb.13 Näherung der ausgefüllten Julia-Menge mit $c = -1$ für verschiedene Werte von m

Ähnliches kann man auch mit anderen Julia-Mengen und mit der Mandelbrotmenge machen.

Aufgaben:

[13] Führe die gleiche Approximation für die ausgefüllte Julia-Menge mit $c = -1.25$ und dann mit $c = -1.4$ durch. Was kannst Du beobachten?

[14] Probiere die Näherung der Mandelbrotmenge aus. Wie sieht die Figur für $m = 1$ aus? Warum?

6.3 Leben am Rande des Chaos

Auch in der Biologie beginnt man sich für die Chaostheorie zu interessieren. Und wie beim Apfelmännchen scheinen die interessanten Dinge in den Randregionen zu passieren. Einige Wissenschaftler glauben, dass sich das Leben am *Rande des Chaos* entwickelt: Zu viel Chaos, und das Leben kann sich nicht entwickeln (wenn sich die Bedingungen dauernd drastisch ändern, können sich die meisten Lebensformen nicht schnell genug anpassen), zu viel Stabilität und Starre, und das Leben kann sich nicht an seine Umwelt anpassen und stirbt aus. Details über die Anwendungen in der Biologie finden sich hier.

6.4 Fraktale Kunst sieht nicht künstlich aus

Wie wir in einigen der Abbildungen oben gesehen haben, sind Fraktale nicht „nur“ mathematische Objekte, die man untersuchen kann, sondern sie können auch ästhetisch und schön aussehen. Kein Wunder also, dass mehrere Künstler und Designer graphische Darstellungen von Fraktalen in ihren Arbeiten verwenden. Und viele dieser Arbeiten sehen ziemlich „natürlich“ aus, was uns, wenn man die fraktale Struktur vieler Objekte in der Natur bedenkt, auch nicht besonders überrascht. Wenn Du mehr über Fraktale in Architektur und Design wissen willst, kannst Du in [3] nachlesen. Viele Beispiele für Fraktale in der Kunst lassen sich in [4] finden.

Literatur

[1] http://www.dm.unipi.it/~olymp/comenius/ (9. August 2011)

[2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a9/Julia-Teppich.png (14. Oktober 2011)

[3] Bovill, C. *Fractal geometry in architecture and design*, Birkhäuser, Boston, 1996

[4] http://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos_and_Fractals/Fractal_art/ (28. Februar 2012)