

# GeoCaching – hvordan man finder det ... ved hjælp af satellitter

Andreas Ulovec, Universität Wien

## 1 Introduktion

Masser af mennesker bruger GPS til at bestemme deres egen geografiske placering, eller til at finde vejen mellem to punkter. Flere og flere biler er udstyret med dem og det kan næsten se ud som om god gammeldags kortlæsning er på vej i glemmebogen. Men du kan også bruge GPS til andre ting. Ud over at vise dig vej til næste by eller nærmeste benzintank kan du finde de såkaldte geocacher. Hvad er så det? En geocache er en beholder (med en logbog) af en eller anden slags (størrelsen kan variere meget) som nogen har gemt og derpå uploadet beholderens koordinater til en webside. Din opgave er at bruge koordinaterne og din GPS til at finde beholderen, skrive noget i den fysiske logbog i beholderen og desuden på websiden. Måske lyder det meget let men sådan er det nu ikke altid. I dette kapitel kan du læse om hvordan det virker, hvad du skal bruge og hvad det har med matematik at gøre.

## 2 GPS - hvordan den virker

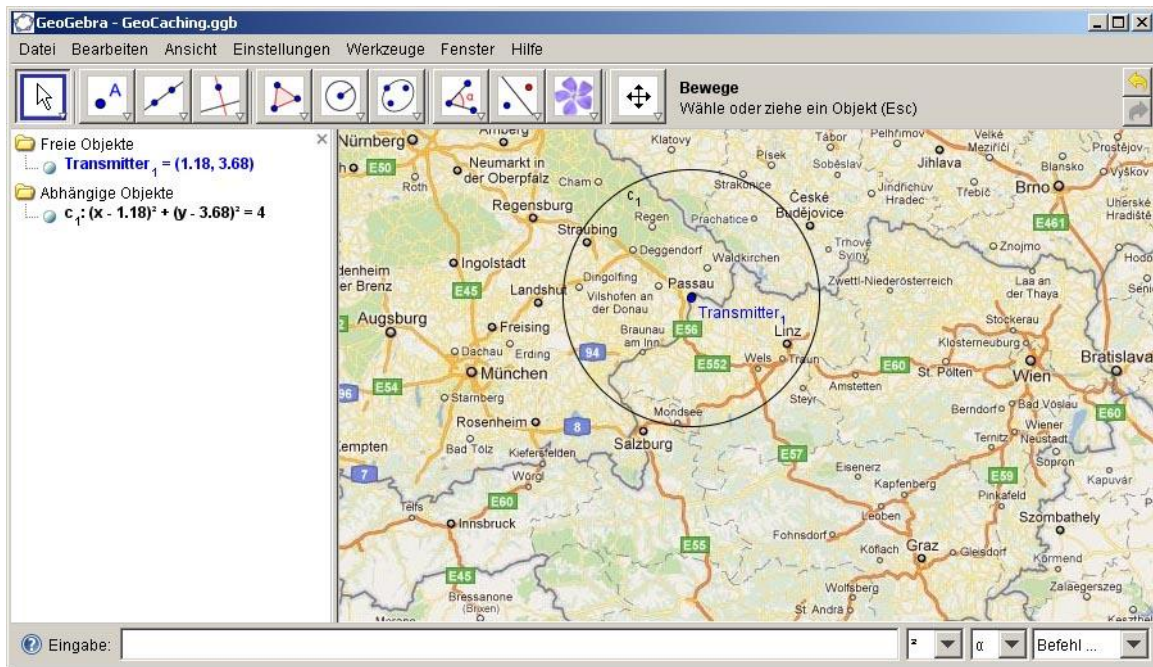
GPS (Global Positioning System) baserer sig på et vist kendskab til rumgeometri idet man udnytter et antal satellitter der er i kredsløb om jorden. Disse satellitter sender hele tiden signaler som kan modtages og fortolkes af en GPS modtager (ofte blot omtalt som en GPS). Satellitsignalet indeholder oplysninger om satellittens position, tidspunktet hvor det blev afsendt samt supplerende oplysning om satellittens tilstand og de andre satellitter i nærheden. Ved hjælp af signaler fra (sædvanligvis) fire satellitter er det muligt at beregne koordinater for GPS-modtagerens placering. Idet vi ser bort fra fejlkorrigeringsberegninger (der er ret så komplicerede) foregår beregningen af placeringen således: Modtageren beregner forskellen mellem det tidspunkt  $t_s$  hvor signalet blev sendt og tidspunktet  $t_r$  hvor det blev modtaget. Da signalet bevæger sig med lysets hastighed  $c$  kan man derpå beregne afstanden  $d$  til satellitten som  $d = c \cdot (t_r - t_s)$ . Nu ved vi at vi (eller rettere sagt GPS-en) befinder sig i afstanden  $d$  fra den første satellit. Vi kender også satellittens position så vi skal nu gøre os overvejelser om hvilke geometrisk figur der udgøres af mængden af punkter der har en given afstand til et givet punkt. Havde vi arbejdet todimensionelt, altså plangeometrisk, ville mængden have været en cirkel, men da vi er i det tredimensionelle rum er det en kugleflade vi har med at gøre. Så hvis der kun var en satellit ville vi altså vide at vi befandt os et eller andet sted på en virtuel kugleflade. Modtager GPS-en også tilsvarende signaler fra en anden satellit kan vi konstruere en anden kugleflade og nu ved vi at vi befinder os der hvor de to kugleflader skærer hinanden. Skæringen mellem to kugleflader er en cirkel (overvej). En tredje satellit giver os endnu en kugle og skæringen mellem de tre kugleflader består af to punkter. Hvis disse to punkter ligger langt fra hinanden skulle det være nok til at fastslå vores placering da vi normalt har yderligere information til at afgøre hvilket af dem vi befinder os ved (f.eks. ved vi normalt om vi befinder os i Østrig eller på Sydpolen). Men hvis de to punkter er ret tæt på hinanden kan det være rart at vide om vi er tæt på vores hotel eller om der er endnu 20 km vandretur tilbage. Så til praktisk brug er det nødvendigt med en fjerde satellit, så vi ender med netop et punkt (husk at vi har valgt at droppe beregninger af usikkerheder og fejlkorrekationer og blot beskæftiger os med den ideelle situation hvor den slags ikke forekommer).

### 2.1 Sidespring: Tre skærende cirkler

Som støtte til at forstå det principielle I det foregående vil vi se på en tænkt todimensionel GPS situation hvor der i stedet for kugler arbejdes med cirkler i det dynamiske geometriprogram GeoGebra.

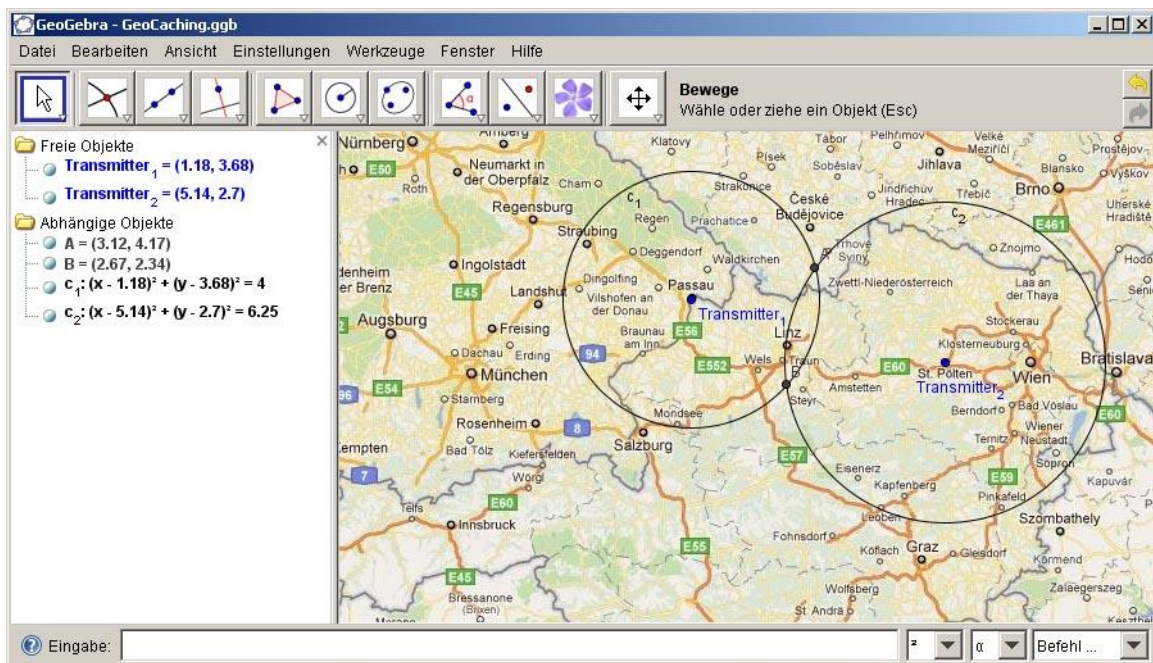
Man har faktisk arbejdet med situationer der ligner denne til navigation på jordens overflade der jo er næsten plan hvis vi ser på tilstrækkelig små områder. Man brugte så faststående sendere i stedet for satellitter til en proces der blev kaldt trilateration (I historiens løb har mange forskellige metoder været brugt til navigation. Hvis du vil vide mere om det kan du læse i [1]).

Hvis vi begynder med at se på et signal (f.eks. fra en sender placeret i Passau) fremkommer en cirkel:



**Fig.1** Med en sender ved vi at vi befinder os et sted på en cirkel.

Tilføjer vi en anden sender (f.eks. placeret i St. Pölten) får vi dette:



**Fig.2** Med to sendere er der kun to punkter at vælge imellem

Vi ved nu at vi enten er nær den østrigske by Steyr eller nær den tjekkisk-østrigske grænse. For at få vores præcise placering skal vi bruge en tredje sender (som f.eks. kan stå i České Budějovice):

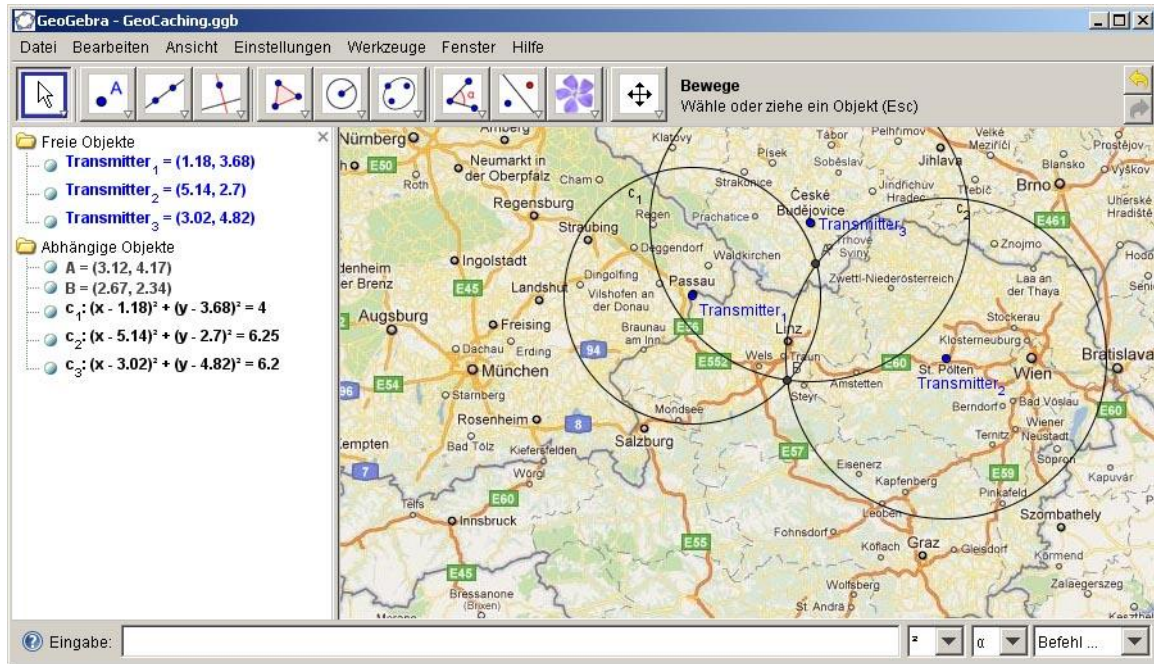


Fig.3 Tre sendere udpeger din placering - ideelt set.

I dette tilfælde ved vi nu at vi er nær den østrigske by Steyr, men det er altså ideelt set: Fejl i tidsmålinger mm. vil føre til en situation i stil med denne:

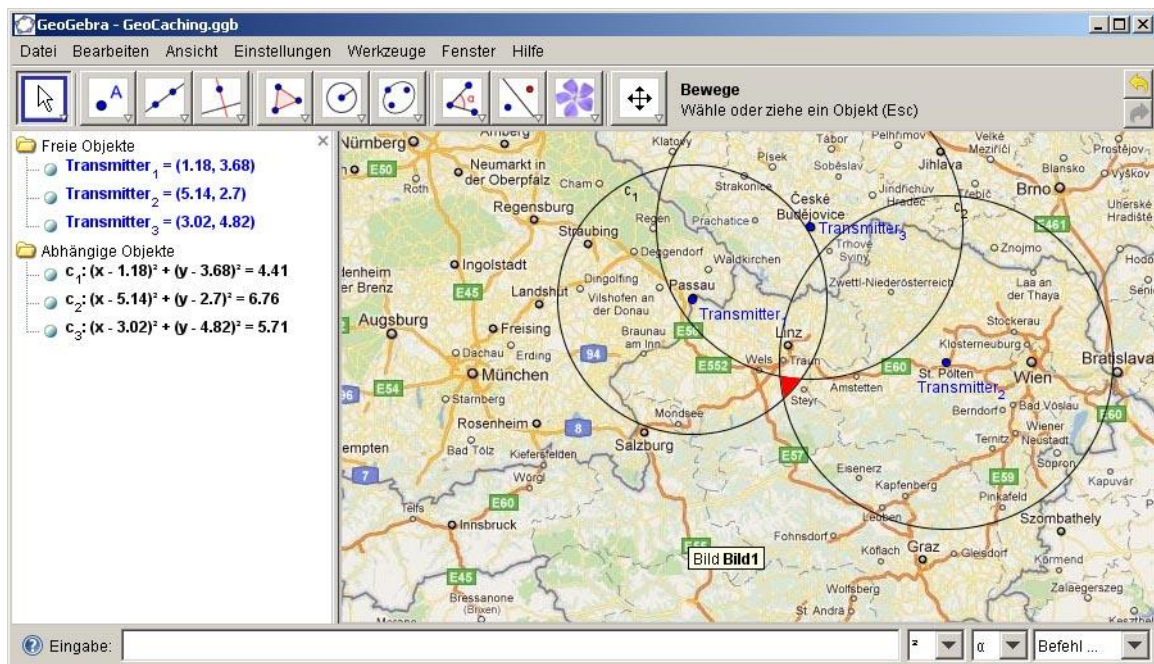


Fig.4 På grund af fejl er din placering ikke helt så nøjagtigt bestemt som i den ideelle situation

Så I virkeligheden er vi ikke i stand til at udpege den eksakte placering men kun en tilnærmelse til denne. Flere sendere (flere satellitter) vil reducere fejlmarginen, men en vis unøjagtighed er uundgåelig! Afhængigt af lokale betingelser, vejret, antallet af satellitter der er "synlige" (for GPS-modtageren) mm. kan nøjagtigheden ved GPS-lokalisering variere en hel del. Ved ideelle betingelser (åbent landskab, frit udsyn til himlen) kan man bestemme sin position med cirka 5 meters nøjagtighed. Hvis man er i en skov eller mellem høje bygninger kan det variere 20 meter eller mere.

*Opgaver:*

- [1] Brug Computer Algebra System (CAS-værktøj) til at beregne skæringen mellem to og tre circler.
- [2] Brug enten resultatet fra opgave [1] eller GeoGebra til at undersøge, hvor unøjagtig en positionsbestemmelse kan være, hvis cirklernes har radier på 200 km og disse radier er bestemt med en unøjagtighed på 0,01 %.

## 3 Lad os finde noget!

### 3.1 Koordinatsystemer

Vores oprindelige mål var at finde noget som nogen havde gemt og derefter offentliggjort gemmestedets koordinater på en webside. Når vi taler om koordinater skal vi være enige om, hvilke koordinater der er på tale. I skolen arbejder man almindeligvis mest med retvinklede koordinater. De er fine på plane flader men ikke særlig brugbare på jordens overflade der næsten ligner en kugleflade (for at være mere nøjagtig: jordens form er en geoide, en slags lidt fladtrykt kugle med buler hist og her - lidt kartoffelagtig). Vi bruger i stedet et såkaldt sfærisk koordinatsystem. I stedet for koordinataksler skal man til et sfærisk koordinatsystem bruge et fast begyndelsespunkt hvortil punkters afstand måles. Desuden skal man bruge to planer hvorfra vinklerne længdegrad og breddegrad måles. Til GPS-navigation bruger folk almindeligvis WGS84 systemet. Det har det faste begyndelsespunkt i jordens centrum og de to planer er planen gennem ækvator samt planen gennem den såkaldte Greenwich-meridian lidt øst for London. Ethvert punkt kan nu beskrives ved to (hvis vi bare vil kende placeringen på jordens overflade) eller tre (hvis vi også vil hvor langt der er under havets overflade eller oppe i luften) koordinater: En breddegrad og en længdegrad og eventuelt en højde (altitude/elevation). Sædvanligvis angiver man højden over havoverfladen i stedet for afstanden til jordens centrum.

Både breddegrad og længdegrad er vinkelmål, der sædvanligvis angives i grader og bueminutter. Bredden regnes nord eller syd for ækvator medens længden regnes vest eller øst for Greenwich meridianen. En typisk WGS84 position kunne se sådan ud: N 48° 12.507, E 016° 22.331.

*Opgaver:*

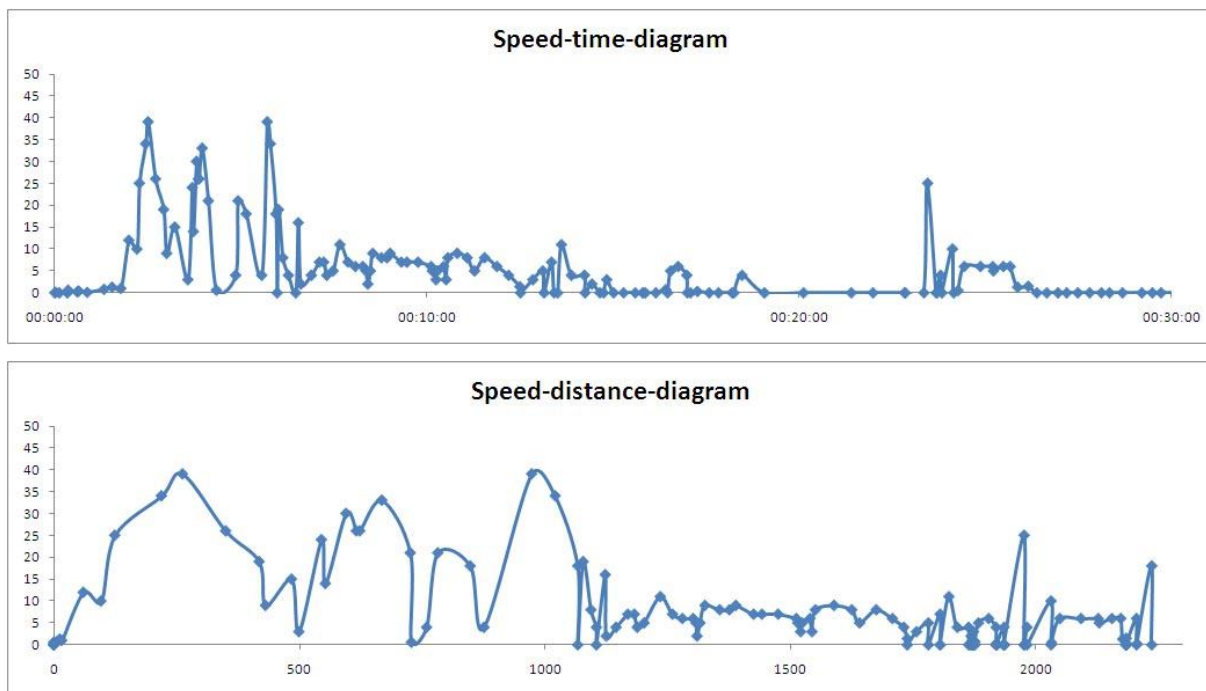
- [3] Brug Google Maps eller Google Earth eller et lignende program til at finde ud af hvor den ovenfor viste position faktisk er.
- [4] Find WGS84 koordinaterne for der hvor du bor og for din skole.
- [5] Hvor mange meter ændrer din position sig hvis din længdegrad ændrer sig 1°?

### 3.2 Fortolkning af GPS data

Hvis du sætter din GPS-modtager til at spore (tracke) dine data medens du leder efter en geocache så får du en lang tabel med tal. For at bearbejde disse tal kan man kopiere dem over i et regneark. For eksempel i afsnittet om GPS og flyvning kan du se hvordan man behandler GPS-data i et regneark hvor man også kan fremstille grafer over GPS-målingerne. Man kan også kopiere data ind i Google Earth og få vist forskellige grafer her.

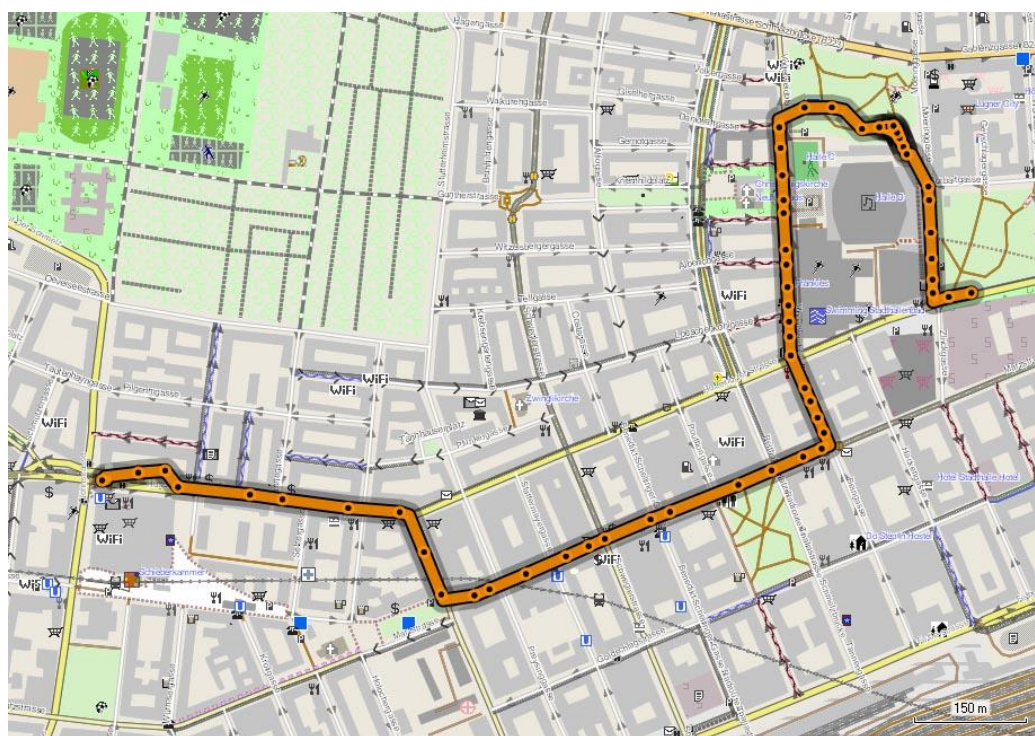
*Opgaver: (Brug graferne nedenfor til at besvare de følgende spørgsmål):*

- [6] Hvor lang tid varede geocachingturen?
- [7] Hvor lang var den?
- [8] Hvad var gennemsnitsfarten?



**Fig.6** To hastighedsgrafer for geocachingturen - hvad fortæller de?

På et kort ser turen således ud:



**Fig.7** Kort over geocachingturen

- [9] Hvor meget af turen foregik med offentlig transport og hvor meget foregik til fods?
- [10] Hvor på kortet tror du geocachen lå?
- [11] Kunne du have gjort det hurtigere på cykel hvis du kunne holde 20 km/h?

Find på flere spørgsmål i forbindelse med GPS-data over ture. Man kan udlede mange detaljer om et forløb. F.eks. bruger sportsfolk - også masser af motionister - det til at analysere deres løbe- eller cykelture.

## Referencer

- [1] Taylor, E. G. R. *The haven-finding art; A History of Navigation from Odysseus to Captain Cook*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1971
- [2] <http://www.gps.gov/systems/gps/> (October 14, 2011)
- [3] [WGS84 implementation manual](#) (October 14, 2011)
- [4] <http://www.geocaching.com> (October 14, 2011)