

GeoCaching – Wer sucht, der findet ... mit Satellithilfe

Andreas Ulovec

1 Einführung

Viele Menschen verwenden GPS-Geräte, um ihre eigene Position herauszufinden, oder eine Route zwischen zwei Punkten zu finden. Immer mehr Fahrzeuge sind damit ausgestattet, und manchmal sieht es so aus, als ob das gute alte Kartenlesen kaum mehr verwendet wird. Aber Du kannst auch noch was anderes mit Deinem GPS-Gerät machen. Es ermöglicht Dir nicht nur, den Weg zu einer bestimmten Stadt oder zur nächsten Tankstelle zu finden, sondern auch, sogenannte Geocaches zu entdecken. Nun, was ist ein Geocache? Ein Geocache ist ein Behälter mit einem Logbuch (die Größe der Behälter variiert von sehr klein, etwa so groß wie der Kopf einer Schraube, bis sehr groß, wie etwa ein Eimer), den jemand versteckt und dann dessen GPS-Koordinaten auf einer Webseite veröffentlicht hat. Deine Aufgabe ist es, mit Hilfe dieser Koordinaten und eines GPS-Gerätes den Behälter zu finden und Deinen Fund sowohl in das Logbuch als auch auf der Webseite einzutragen. Klingt einfach, oder? Na ja, oft ist es nicht so einfach, wie Du vielleicht glaubst. Hier werden wir herausfinden, wie das funktioniert, was Du brauchst, und was das alles mit Mathematik zu tun hat.

2 Wie funktioniert GPS?

GPS (Global Positioning System) basiert auf dreidimensionaler Geometrie und verwendet eine Anzahl an Satelliten in einer Erdumlaufbahn. Diese Satelliten senden andauernd Signale aus, die von einem GPS-Empfänger (manchmal auch GPS-Gerät oder einfach – eigentlich nicht ganz korrekt – GPS genannt) empfangen und interpretiert werden. Die Signale beinhalten die Position des Satelliten, die Zeit, zu der das Signal gesendet wurde, und zusätzliche Informationen über den Zustand des Satelliten und über die anderen Satelliten. Mit Hilfe der Signale von (üblicherweise) mindestens vier Satelliten ist es möglich, die Position des GPS-Empfängers zu berechnen. Wenn man einmal die Fehlerkorrekturen weglässt (welche die Rechnung recht kompliziert machen), funktioniert die Positionsberechnung wie folgt: Der GPS-Empfänger berechnet die Zeitdifferenz zwischen dem Zeitpunkt t_s , zu dem das Signal gesendet wurde, und dem Zeitpunkt t_r , zu dem das Signal beim GPS-Gerät angekommen ist. Da das Signal mit Lichtgeschwindigkeit c unterwegs ist, können wir damit die Entfernung d zum Satelliten berechnen, diese ist $d = c \cdot (t_r - t_s)$. Jetzt wissen wir also, dass sich das GPS-Gerät im Abstand d zum ersten Satelliten befindet. Wir kennen auch die Position des Satelliten, d.h. wir brauchen uns nur überlegen „was ist die Menge der Punkte, die in einem gegebenen Abstand von einem festen Punkt liegen?“ In der Ebene wäre die Antwort „ein Kreis“, da wir uns aber im dreidimensionalen Raum befinden, ist die Antwort „eine Kugel“ (genauer: „die Kugeloberfläche“). Mit dem Signal eines Satelliten wissen wir also nur, dass wir uns irgendwo auf der Oberfläche dieser (virtuellen) Kugel befinden. Mit dem Signal eines zweiten Satelliten können wir eine zweite Kugel konstruieren, dann wissen wir, dass wir uns auf der Oberfläche beider Kugeln befinden, d.h. in der Schnittmenge der beiden Kugeloberflächen. Diese Schnittmenge ist bekanntlich ein Kreis. Ein dritter Satellit liefert uns eine dritte Kugel, und die Schnittmenge der drei Kugeloberflächen besteht jetzt nur mehr aus zwei Punkten. Wenn diese Punkte weit voneinander entfernt sind, kann das schon genügen, da wir ja normalerweise über andere Informationen verfügen, mit deren Hilfe wir entscheiden können, welcher der beiden Punkte unsere eigentliche Position angibt (üblicherweise weiß man, ob man sich gerade irgendwo in Österreich oder in der Nähe des Südpols aufhält). Andererseits können die beiden Punkte auch recht nah aneinander liegen, und es wäre doch nett zu wissen, ob man schon nahe bei seiner Berghütte ist oder noch 20 km zu wandern hat. Im Normalfall brauchen wir also das Signal eines vierten Satelliten, das dann genau einen Schnittpunkt liefert (wir betonen nochmals, dass wir hier die Messfehler und deren Korrektur ignorieren und nur den Idealfall beschreiben).

2.1 Ein Ausflug in die Ebene: Schnittpunkt dreier Kreise

Um die Prinzipien von GPS besser zu verstehen, schauen wir uns eine (hypothetische) zweidimensionale Situation an und [schneiden Kreise](#) statt Kugeln mit Hilfe der Software GeoGebra. Die Situation ist nicht ganz so hypothetisch, sie wird zur Navigation auf der Erdoberfläche (die für kleine Entfernungen fast eine Ebene ist) eingesetzt, wo fixe Sendestationen statt Satelliten in einem Verfahren namens Triangulation verwendet werden (im Laufe der Geschichte wurden verschiedene Verfahren zur Navigation eingesetzt. Näheres kannst Du in [1] nachlesen). Wenn wir mit einer Sendestation anfangen (nehmen wir an sie steht in Passau), erhalten wir einen Kreis:

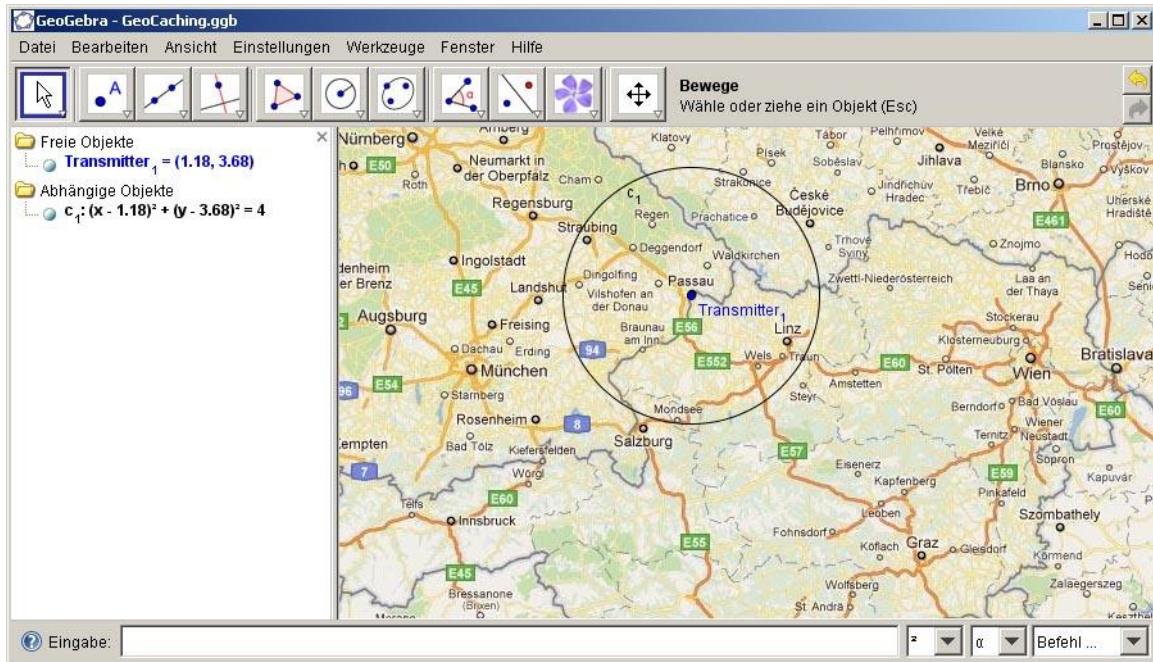


Abb.1 Mit einer Sendestation wissen wir, dass wir uns irgendwo auf diesem Kreis befinden

Verwenden wir eine zweite Sendestation (sagen wir sie ist in St. Pölten), würden wir folgendes erhalten:

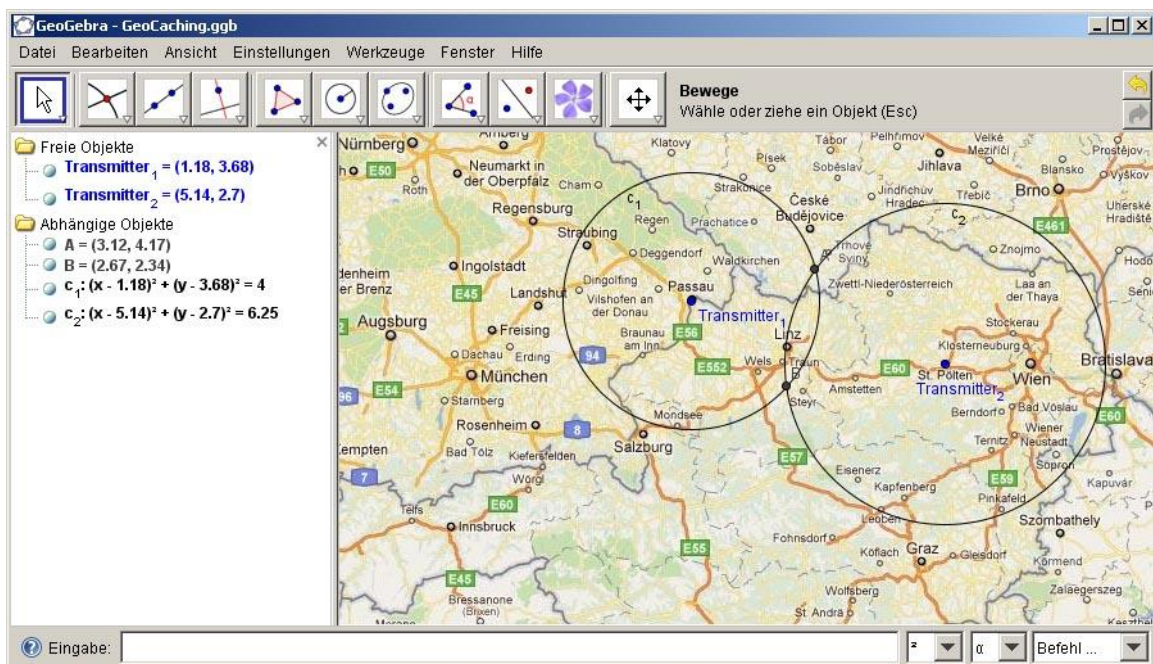


Abb.2 Mit zwei Sendestationen bleiben nur mehr zwei mögliche Positionen über

Wir wissen also, dass wir uns entweder in der Nähe der Stadt Steyr oder nahe der Österreichisch-Tschechischen Grenze befinden. Um unsere exakte Position zu ermitteln, brauchen wir eine dritte Sendestation (wir nehmen an, sie befindet sich in České Budějovice):

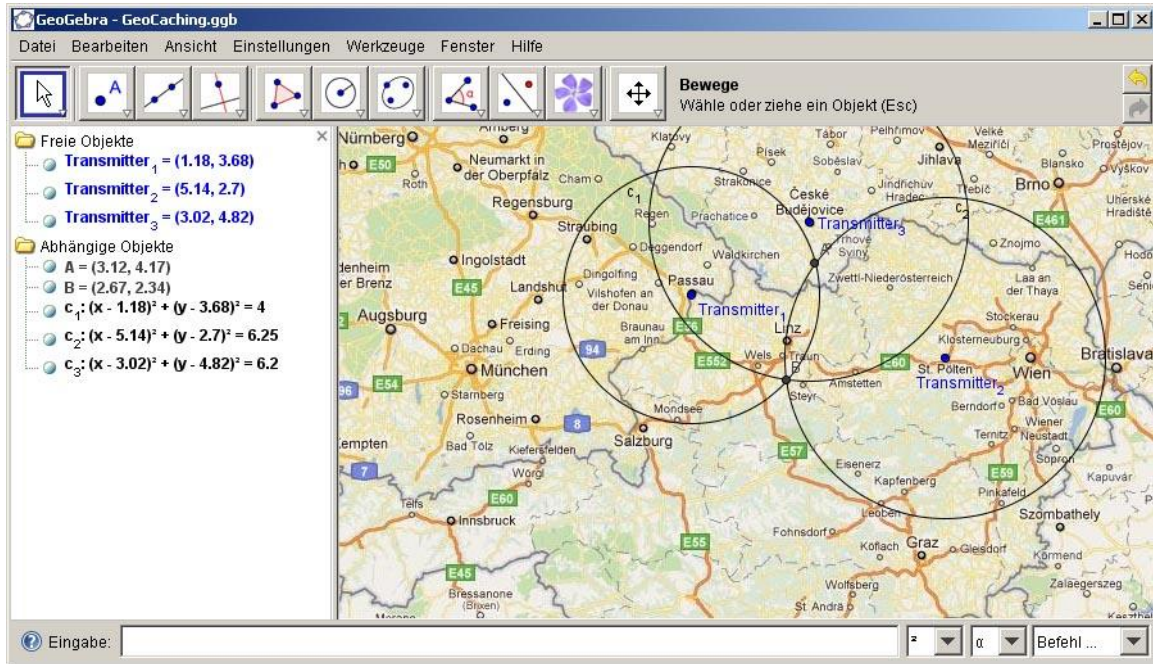


Abb.3 Drei Sendestationen legen die Position genau fest – im Idealfall

In diesem Fall würden wir uns also in der Nähe der oberösterreichischen Stadt Steyr befinden. Dies ist natürlich ein idealisierter Fall. Fehler in der Zeitmessung etc. würden im Realfall zu einer Situation wie dieser führen:

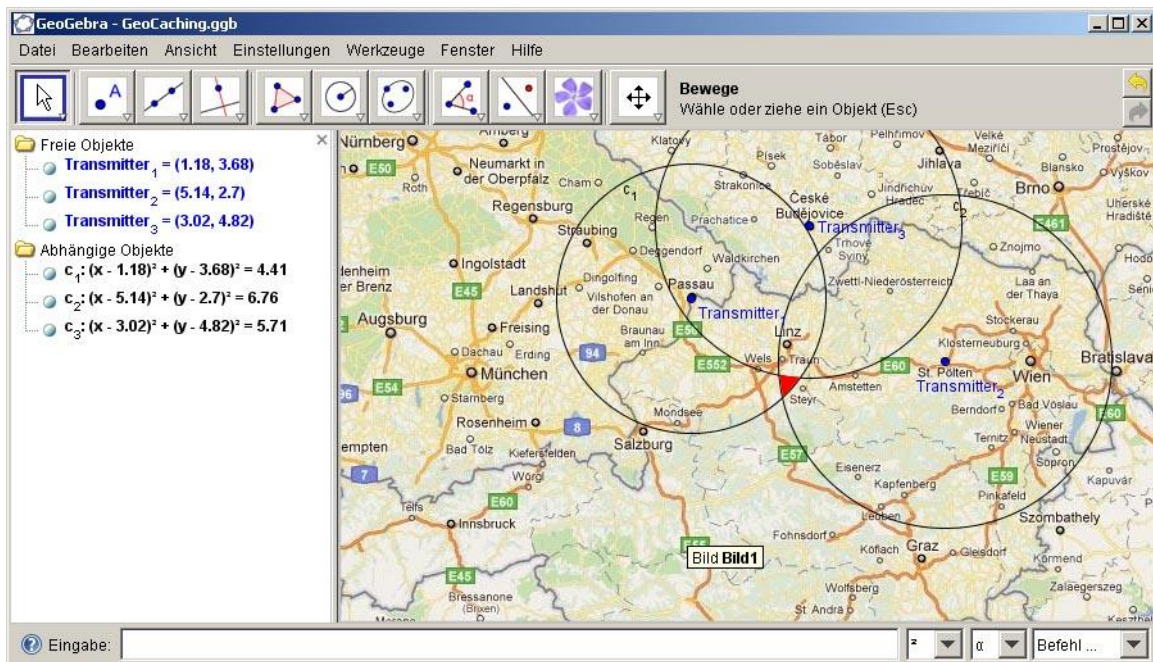


Abb.4 Messfehler führen zu Abweichungen in der Positionsbestimmung

In der Realität erhalten wir also nicht unsere genaue Position, sondern nur eine Näherung. Mehr Sendestationen (d.h. mehr Satellitensignale) würden die Größe des Fehlers reduzieren, eine gewisse Ungenauigkeit bleibt aber immer! Abhängig von den lokalen Gegebenheiten, Wetterbedingungen, der Anzahl der erreichbaren Satelliten etc. kann die Genauigkeit des GPS-Verfahrens stark variieren. Bei Idealbedingungen (auf freiem Feld mit ungehindertem Blick zum Himmel) kannst Du Deine Position auf etwa 5 m genau feststellen. Wenn Du im Wald oder zwischen hohen Gebäuden bist, kann die

Abweichung 20 m oder mehr betragen (wie etwa diese [Daten von einem Jogging-Trip in Wien](#) zeigen).

Aufgaben:

- [1] Berechne den Schnittpunkt zweier bzw. dreier Kreise mit einem Computeralgebrasystem.
- [2] Verwende entweder das Ergebnis von Aufgabe [1] oder verwende die [GeoGebra-Datei](#) um die folgende Frage zu beantworten: Wenn jeder der drei Kreise einen Radius von 200 km hat, und der Radius um 0,01% abweichen kann, um wie viele Meter kann die Position des Schnittpunktes abweichen?

3 Jetzt möchte ich endlich etwas suchen und finden!

3.1 Koordinatensysteme

Unser ursprüngliches Ziel war es, etwas zu finden, das jemand anderer versteckt und dann die Koordinaten des Verstecks auf einer Webseite veröffentlicht hat. Wenn wir von Koordinaten sprechen, dann müssten wir uns zuerst einigen, welches Koordinatensystem wir überhaupt verwenden. In der Schule verwendet man üblicherweise das kartesische Koordinatensystem. In einer Ebene ist das gut geeignet, aber nicht auf der Erdoberfläche, die praktisch die Oberfläche einer Kugel ist (für die Erbsenzähler: Die Erde ist eigentlich ein Geoid, also eine abgeflachte Kugel). In diesem Fall müssen wir ein sphärisches Koordinatensystem verwenden (eigentlich eine dreidimensionale Version der wohlbekannten Polarkoordinaten). Jedes sphärische Koordinatensystem braucht einen Ursprungspunkt (von welchem die Entfernung gemessen wird) und zwei feste Ebenen (von welchen der Längen- und Breitengrad gemessen wird). In der GPS-Navigation wird meist das WGS84-System verwendet. Dessen Ursprungspunkt ist im Erdmittelpunkt; die festen Ebenen sind die Ebene durch den Äquator und die Ebene durch den Nullmeridian nahe Greenwich, UK. Jeder Punkt darin kann durch zwei (wenn wir nur eine Position auf der Erdoberfläche wissen wollen) oder drei (für Positionen unter der Erde, unter Wasser, oder in der Luft) Koordinaten beschrieben werden: Einen Breitengrad, einen Längengrad und (eventuell) eine Höhe (üblicherweise wird die Höhe über dem Meeresspiegel angegeben und nicht der Abstand vom Erdmittelpunkt). Sowohl der Breiten- als auch der Längengrad sind Winkelmessungen, die üblicherweise in Grad und Winkelminuten angegeben werden. Der Breitengrad wird nördlich oder südlich des Äquators angegeben, der Längengrad westlich oder östlich des Nullmeridians. Eine typische WGS84-Position würde so aussehen: N 48° 12.507, E 016° 22.331.

Aufgaben:

- [3] Verwende Google Maps oder GoogleEarth oder ein ähnliches Werkzeug um herauszufinden, wo die Position mit den obigen Koordinaten tatsächlich ist.
- [4] Finde die WGS84-Koordinaten Deiner Wohnstätte und Deiner Schule heraus.
- [5] Um wie viele Meter ändert sich Deine Position, wenn Du den Längengrad um 1° änderst?

3.2 GPS-Daten interpretieren

Wenn Du Dein GPS-Gerät so einstellst, dass es Deinen Weg beim Suchen eines Geocaches aufzeichnet, erhältst Du üblicherweise eine lange Liste von Zahlen. Um diese Zahlen zu interpretieren, ist es nützlich, ein Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. Excel zu verwenden. Im Material über [Flugreisen](#) kannst Du herausfinden, wie man GPS-Daten verarbeiten und graphische Darstellungen davon anfertigen kann. Ein typisches Beispiel für die GPS-Daten einer Geocaching-Tour kannst Du [hier](#) (Excel-Tabelle mit Daten) bzw. [hier](#) (ursprüngliche GPS-Daten) finden.

Aufgaben: (Verwende die gegebenen Daten oder Deine eigenen GPS-Daten)

- [6] Wie lange hat die Geocaching-Tour gedauert?
- [7] Welche Entfernung wurde zurückgelegt?
- [8] Wie hoch war die Durchschnittsgeschwindigkeit?

Verwendet man die gleichen Methoden wie im Materials über Flugreisen, kann man ein v-t-Diagramm und ein v-s-Diagramm anfertigen:

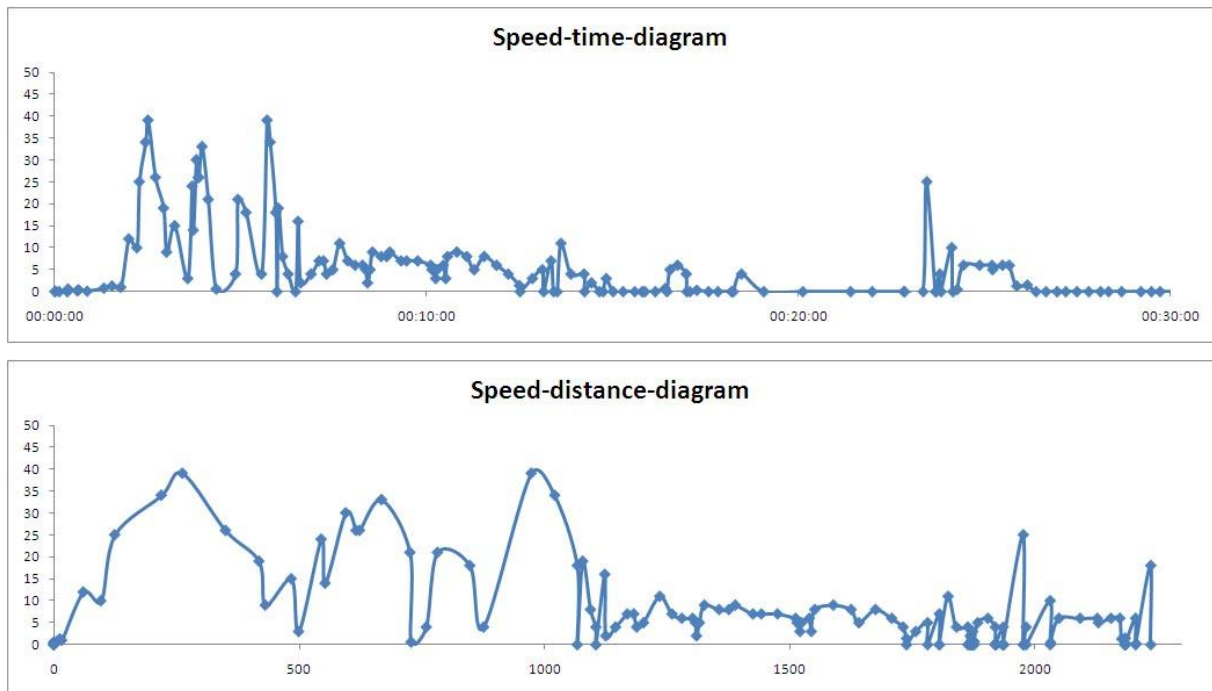


Abb.6 Geschwindigkeitsdiagramme einer Geocaching-Tour

Auf einer Landkarte sieht die Tour so aus:

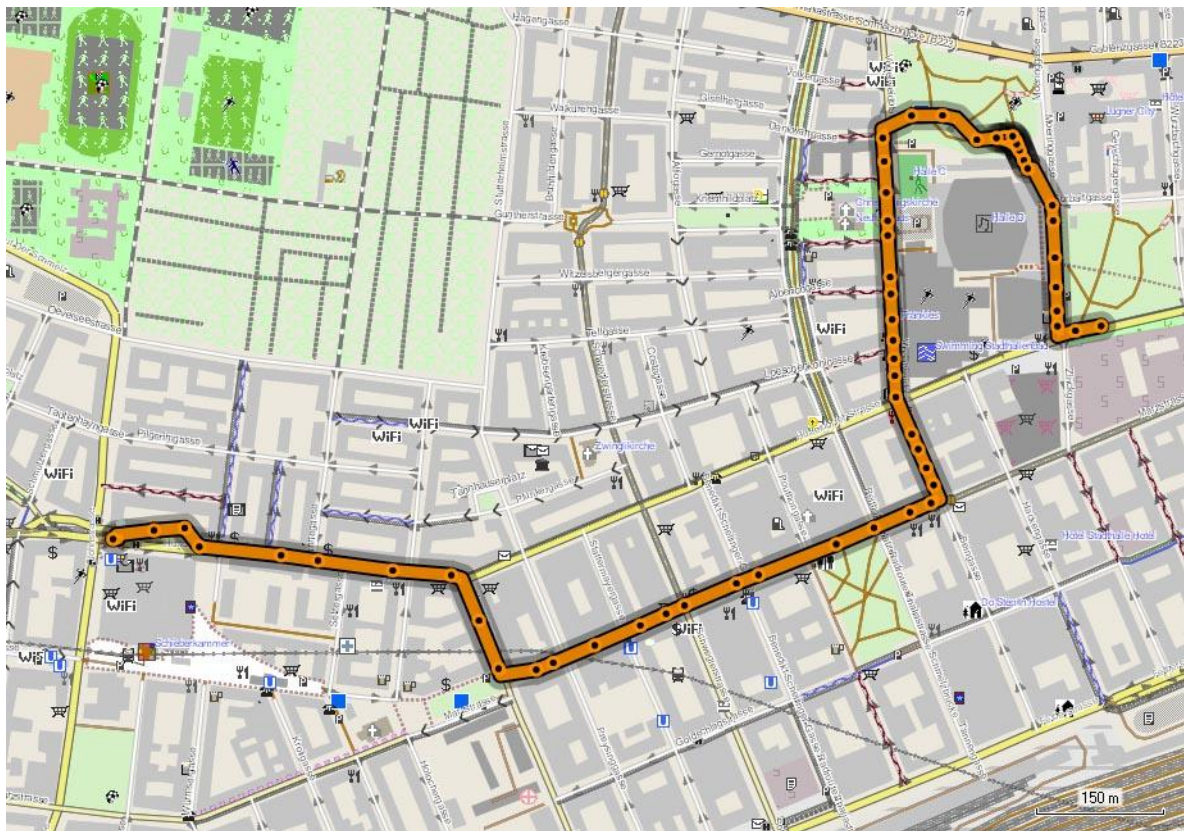


Abb.7 Karte einer Geocaching-Tour

Aufgaben: (Verwende die gegebenen Daten oder Deine eigenen GPS-Daten)

[9] Welche Entfernung wurde mit öffentlichen Verkehrsmitteln zurückgelegt, welche zu Fuß?

- [10] Wo auf der Karte glaubst Du war der Geocache versteckt (Hinweis: nicht am Anfang oder am Ende der orangen Linie; Hinweis 2: Überlege, wie man langes herumsuchen an einer Stelle anhand der Graphen oder der Landkarte erkennen könnte)?
- [11] Wenn Du ein Fahrrad mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 km/h verwendet hättest, wärst Du dann schneller gewesen? Beachte dass Du nicht überall mit dem Fahrrad fahren kannst. Kopiere die Daten in GoogleEarth und finde heraus, wo Du mit dem Fahrrad fahren kannst und wo nicht.

Man kann sich viele Fragen überlegen, die man mit GPS beantworten kann, siehe z.B. [dieses Material](#). Auf jeden Fall kannst Du sehen, dass Mathematik nicht nur für die Schule, sondern auch fürs Leben brauchbar ist!

Literatur

- [1] Taylor, E. G. R. *The haven-finding art; A History of Navigation from Odysseus to Captain Cook*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1971
- [2] <http://www.gps.gov/systems/gps/> (14. Oktober 2011)
- [3] [WGS84 implementation manual](#) (14. Oktober 2011)
- [4] <http://www.geocaching.com> (14. Oktober 2011)