

# Modellierung optischer Linsen mit Dynamischer Geometriesoftware

Andreas Ulovec

## 1 Einführung

Wenn im Physikunterricht der Zeitpunkt gekommen ist, den Weg eines Lichtstrahls durch Glas, Linsen oder ein ganzes Linsensystem zu zeigen, beginnen viele Physiklehrkräfte zu stöhnen – die Versuche sind ziemlich komplex und man braucht eine Menge Material. Es ist schwierig genug, einen Lichtstrahl in Luft sichtbar zu machen – man braucht Rauch, Staub oder irgendein anderes Hilfsmittel. Um den Lichtstrahl in einem Festkörper sichtbar zu machen, braucht man schon eine spezielle Ausrüstung, z.B. Linsen aus Rauchglas. Diese sind nicht immer verfügbar, außerdem können Veränderungen eines optischen Systems nur durchgeführt werden, indem man einen Teil entfernt und durch einen anderen Teil ersetzt. Die SchülerInnen können also beobachten, wie sich das System vor und nach der Veränderung verhält – das ist aber nicht gerade eine fließende Veränderung bei der man sehen kann, wie sich der Lichtstrahl tatsächlich verändert. Wir wollen hier demonstrieren, wie man den Weg eines Lichtstrahls durch eine Linse mit Hilfe von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) simulieren kann.

Dieses Material kann für Physiklehrkräfte nützlich sein, die es zum Modellieren von Experimenten mit Linsen, Reflexion und Brechung verwenden können – nicht *statt* dem tatsächlichen Experiment (wenn man Experimente nur in Simulation sieht, ist der didaktische Wert nicht derselbe), sondern ein solches Experiment *begleitend*. Es kann auch für Mathematiklehrkräfte nützlich sein. Hm, wo ist hier die Mathematik? Da steckt eine Menge davon drin! Wenn ein Lichtstrahl die Glasoberfläche einer Linse trifft, wird ein Teil davon in einem bestimmten Winkel reflektiert (Spiegelung oder Reflexion), ein anderer Teil dringt in das Glas ein und geht in einem anderen Winkel weiter (Brechung). Das gleiche passiert, wenn der Lichtstrahl die andere Oberfläche der Linse erreicht – wieder braucht man Mathematik, um den Reflexions- und den Brechungswinkel zu berechnen. Für ideale Linsen gibt es eine einfache Gleichung, um diese Effekte zu berechnen – aber das ist nur ein Modell, welches nur gut für dünne Linsen funktioniert, und nur dann, wenn das Licht nahe zur Linsenmitte einfällt. Bei dickeren Linsen und nicht-zentralem Lichteinfall werden die Berechnungen komplizierter, und es wäre schwierig, nur aus den Gleichungen den physikalischen Sachverhalt abzuleiten. Mit DGS ist es möglich, die Eigenschaften einer Linse zu simulieren, ohne tatsächlich eine Linse, einen Laser oder ähnliches zu brauchen. Aber selbst mit DGS brauchen wir Mathematik, um die Simulation überhaupt erst einmal erzeugen zu können.

## 2 Ein einfacher Anfang – Licht trifft auf eine ebene Oberfläche

### 2.1 Reflexion

Wenn ein Lichtstrahl auf eine ebene Glasoberfläche trifft, wird ein Teil davon reflektiert. Das *Reflexionsgesetz* sagt, dass der Eintrittswinkel (zwischen dem Lichtstrahl und der *Normalen*) gleich dem Austrittswinkel (Reflexionswinkel) ist:

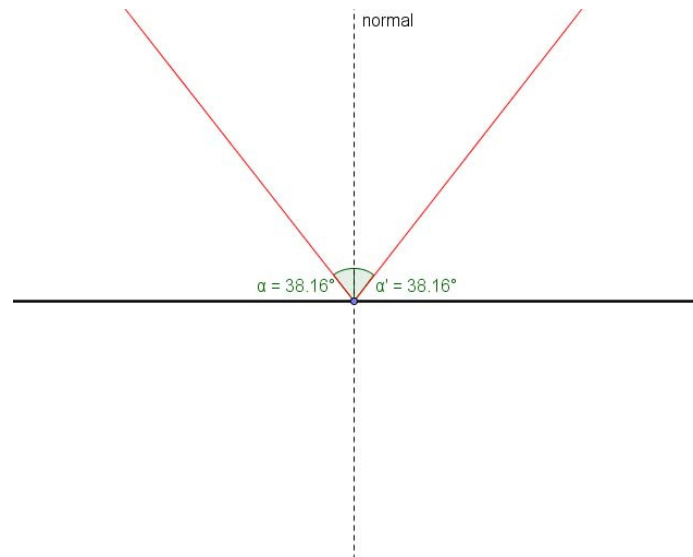


Abb.1 Reflexion von Licht an einer ebenen Oberfläche

## 2.2 Brechung

Es wird jedoch nicht das ganze Licht reflektiert (außer im Fall eines idealen Spiegels oder im Fall einer *Totalreflexion*). Ein Teil davon wird *gebrochen*, d.h. er geht durch das Glas hindurch. Wegen der unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien (hier: Luft und Glas) geht das Licht allerdings nicht einfach gerade weiter durch das Medium, sondern es wird gebrochen, d.h. es geht in einem anderen Winkel als den Einfallswinkel weiter. Dieser Winkel kann durch das Brechungsgesetz von Snellius berechnet werden, welchen besagt, dass der Brechungswinkel  $\alpha''$  vom Einfallswinkel  $\alpha$  wie folgt abhängt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \frac{n_2}{n_1}$$

wobei  $n_1$  der Brechungsindex des ersten Mediums (hier: Luft, welche einen Brechungsindex von ungefähr 1 hat) ist, und  $n_2$  der Brechungsindex des zweiten Mediums (hier: Glas, dessen Brechungsindex stark von der Glassorte abhängt; ein typischer Wert wäre 1,5). Das ergibt:

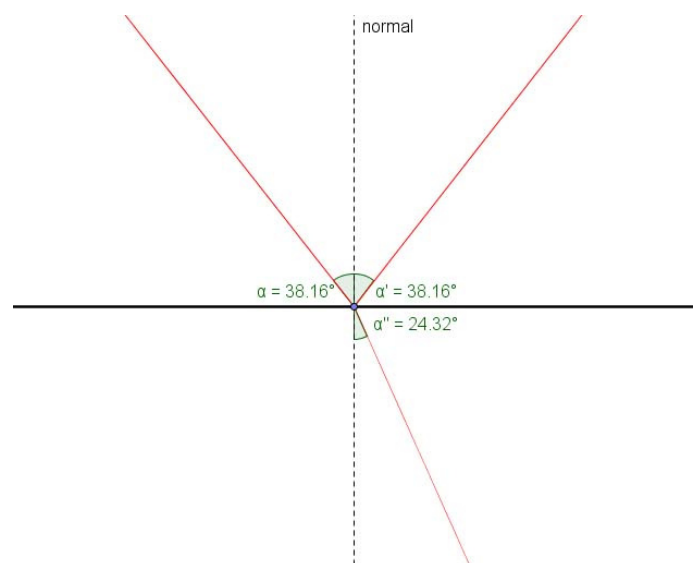


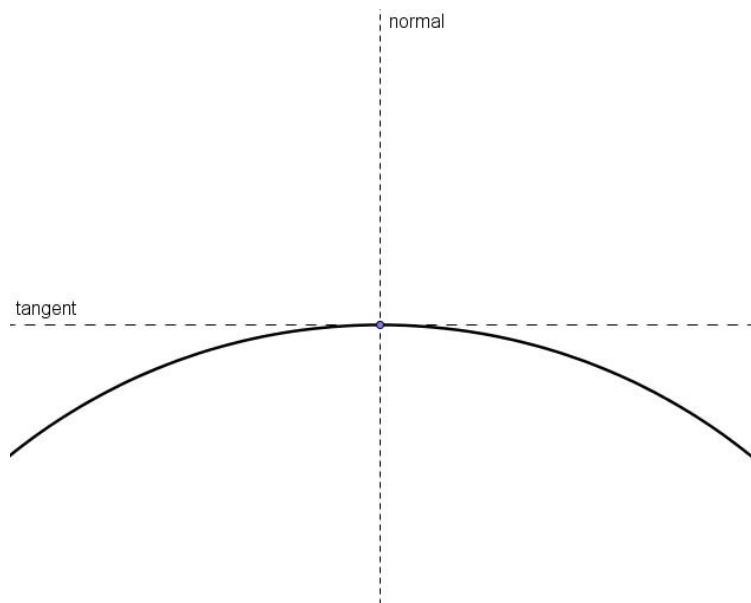
Abb.2 Reflexion und Brechung von Licht an einer ebenen Oberfläche

Aufgaben:

- [1] Ändere den Einfallswinkel auf  $45^\circ$ . Berechne den Brechungswinkel mit einem Brechungsindex von 1,5. Um wie viel würde sich dieser Winkel ändern, wenn man ein hochbrechendes Glas mit einem Brechungsindex von 1,9 verwenden würde?
- [2] Wie groß wäre der Einfallswinkel, wenn der Brechungswinkel  $45^\circ$  beträgt?

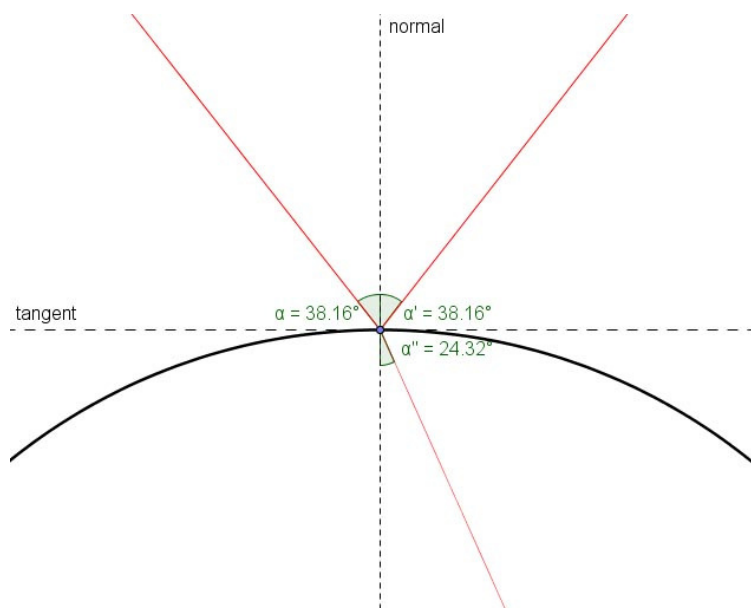
### 3 Was nun? – Licht trifft auf eine Kugeloberfläche

Im Falle der ebenen Oberfläche haben wir den Einfallswinkel im Bezug auf die *Normale* gemessen, d.h. jene Gerade, die normal (also im rechten Winkel) auf die Ebene steht. Im Falle einer Kugeloberfläche (sphärischen Oberfläche), müssen wir den Begriff Normale verallgemeinern: Er bedeutet, dass die Gerade nicht normal auf die ganze Ebene steht (das hätte keinen Sinn bei einer nicht-ebenen Oberfläche), sondern auf die Tangente (genauer gesagt: auf die Tangentialebene) in jenem Punkt, wo die Gerade die Oberfläche trifft (schneidet):



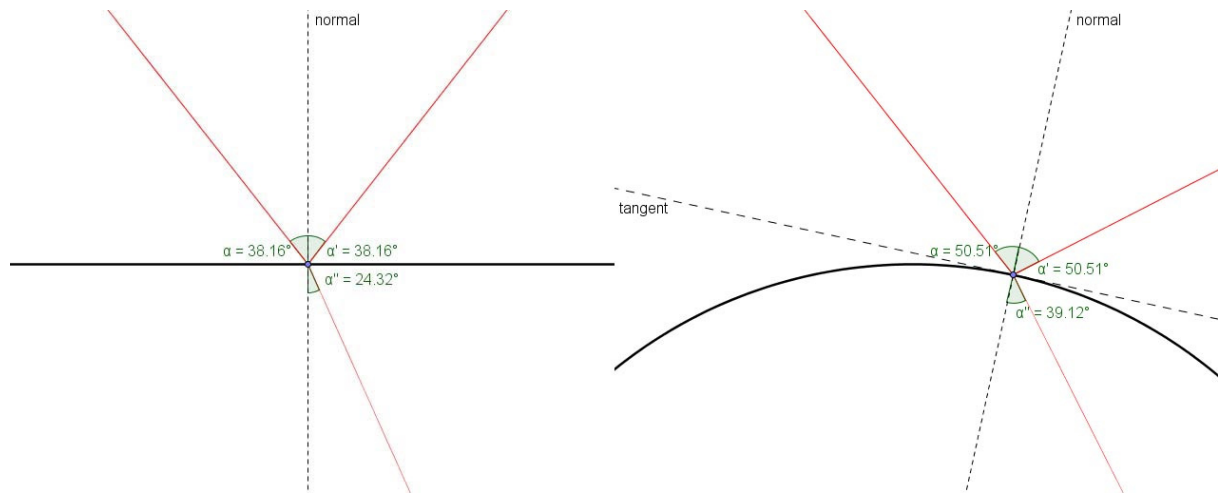
**Abb.3** Normale auf eine Kugeloberfläche

Mit dieser Verallgemeinerung können wir Reflexion und Brechung wie im ebenen Fall berechnen:



**Abb.4** Reflexion und Brechung von Licht an einer Kugeloberfläche

Das sieht genauso aus wie im ebenen Fall. Der Unterschied wird klar, wenn man den Lichtstrahl verschiebt. Im ebenen Fall ändert sich nichts, im sphärischen Fall aber schon:

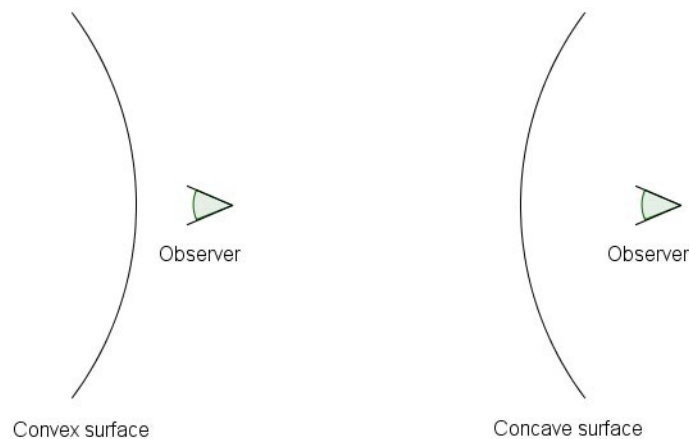


**Abb.5** Reflexion und Brechung desselben Lichtstrahls an ebenen und sphärischen Oberflächen

Das bedeutet, dass bei einer sphärischen Oberfläche die Verschiebung des Lichtstrahls (oder der Oberfläche) den Reflexions- und Brechungswinkel beeinflusst.

### 3.1 Konkav, konvex, konfus?

Eine sphärische Oberfläche (von einer Seite betrachtet) kann prinzipiell zwei Formen haben – sie kann konkav sein, d.h. das Zentrum krümmt sich weg vom Beobachter im Vergleich zum Rand, oder sie kann konvex sein, d.h. das Zentrum krümmt sich in Richtung des Beobachters. Verwirrt? Es ist wirklich einfacher, das Ganze in einer Skizze zu sehen:



**Abb.6** Konvexe und konkave Oberflächen

Sowohl im konvexen als auch im konkaven Fall wird die Tangente und Normale auf die gleiche Art konstruiert.

## 4 Das Ganze zweimal, und man hat eine Linse ...

In einer optischen Linse tritt dieser Prozess zweimal auf – einmal wenn das Licht in die Linse eintritt, einmal wenn es sie wieder verlässt.

Wir brauchen also die gleiche Konstruktion wie vorher, nur die Rollen der Brechungsindizes werden vertauscht, d.h. das erste Medium ist Glas, das zweite Luft. Kombiniert man die beiden Fälle, erhält man das [Modell einer sphärischen Linse](#):

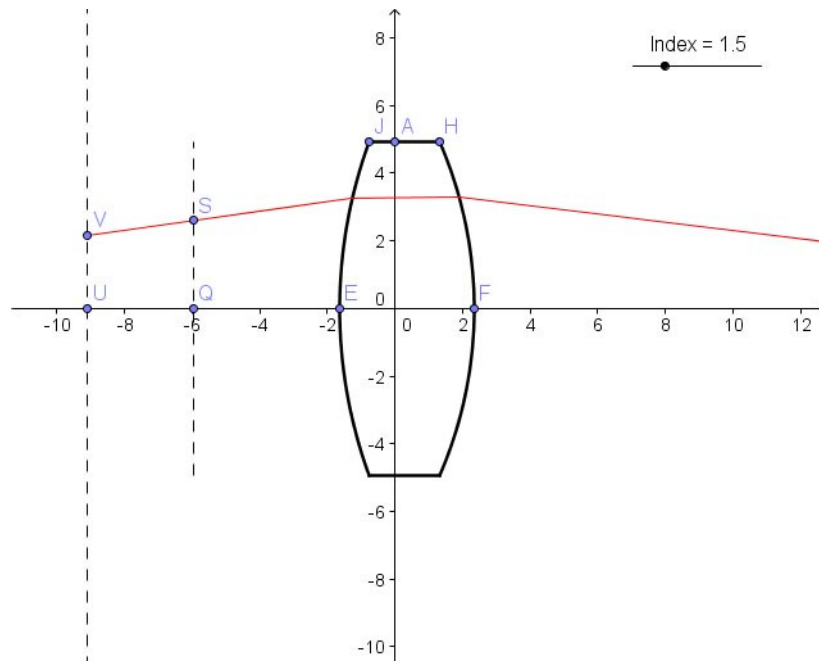


Abb.7 GeoGebra-Modell einer sphärischen Linse

Mit diesem Modell ist es ziemlich einfach, Fragen über die Eigenschaften der Linse zu beantworten, ohne eine echte Glaslinse in der Hand zu haben.

*Aufgaben:*

- [3] Wenn das Licht parallel zur horizontalen Achse einfällt, schneidet der ausfallende Strahl die horizontale Achse im sogenannten *Brennpunkt* der Linse. Wo ist dieser Brennpunkt, wenn die Linse einen Durchmesser von 10 cm hat, in der Mitte 4 cm und am Rand 1,5 cm dick ist.
- [4] Ändert sich der Schnittpunkt mit der Achse, wenn Du den einfallenden Strahl parallel in Richtung des Randes der Linse verschiebst?
- [5] Wenn die Linse asymmetrisch ist (d.h. wenn die Krümmungen der beiden Oberflächen nicht gleich sind), ändert sich dann der Brennpunkt, wenn man die Dicke der Linse gleich lässt und nur die Krümmung verändert? Probiere es aus und erkläre das Ergebnis.

## 5 Diese Linse ist nicht ideal – aber meist gut genug!

Wie wir gerade gesehen haben, bewirkt das Verschieben eines parallel zur Achse einfallenden Lichtstrahls in Richtung Rand der Linse eine Änderung des Schnittpunkts des ausfallenden Lichtstrahls mit der Achse – je weiter weg man vom Zentrum der Linse ist, desto stärker weicht der Schnittpunkt vom (theoretischen) Brennpunkt der Linse ab. Der Grund dafür ist, dass wir eine *sphärische Linse* haben, d.h. eine Linse deren Oberflächen Kugelsegmente (genauer: Kugelkalotten) sind. Je weiter man von der Mitte einer solchen Linse weggeht, desto schlechter werden die optischen Eigenschaften. Abhängig vom Verwendungszweck der Linse können wir auch eine parabolische Linse verwenden, d.h. eine Linse deren Oberflächen Paraboloiden sind, oder eine hyperbolische Linse, deren Oberflächen Hyperboloide sind. Bei einer hyperbolischen Linse würde der oben beschriebene Schnittpunkt immer im Brennpunkt der Linse liegen, egal wie weit der Strahl von der Mitte der Linse entfernt ist.

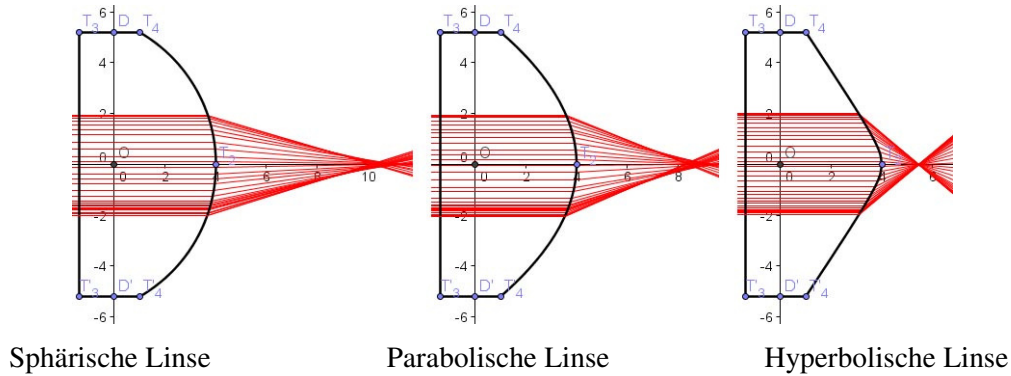
*Aufgabe:*

- [6] Bestimme die Gleichung einer symmetrischen Parabel, welche (im obigen GeoGebra-Modell) durch die Punkte F und H geht. Verschiebe die Punkte F und H und finde heraus, wann die Parabel deutlich vom Kreissegment abweicht.

Wir können deutlich sehen, dass es nur für sehr dicke Linsen einen erkennbaren Unterschied zwischen einer sphärischen und einer parabolischen Oberfläche gibt. Für viele praktische Anwendungen ist der

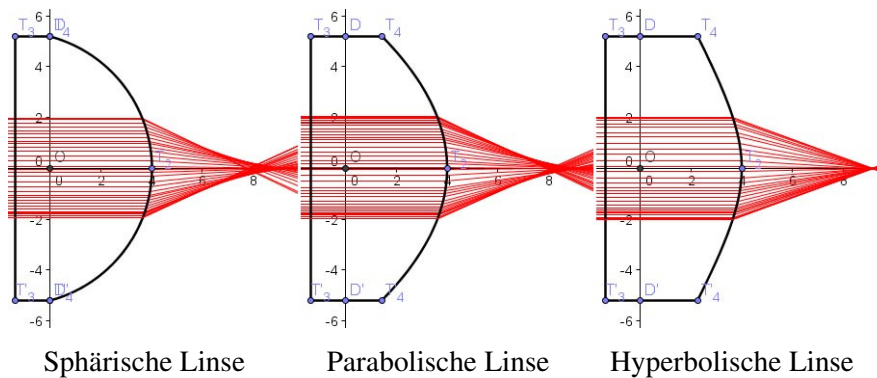
Unterschied vernachlässigbar oder zumindest akzeptabel. Meist werden sphärische Linsen verwendet, da deren Herstellung recht einfach und billig ist, was für parabolische oder hyperbolische Linsen keineswegs der Fall ist.

Hier ein Vergleich zwischen einer [sphärischen Linse](#), einer [parabolischen Linse](#), und einer [hyperbolischen Linse](#) mit gleichem Durchmesser, gleicher Dicke und gleichem Brechungsindex:



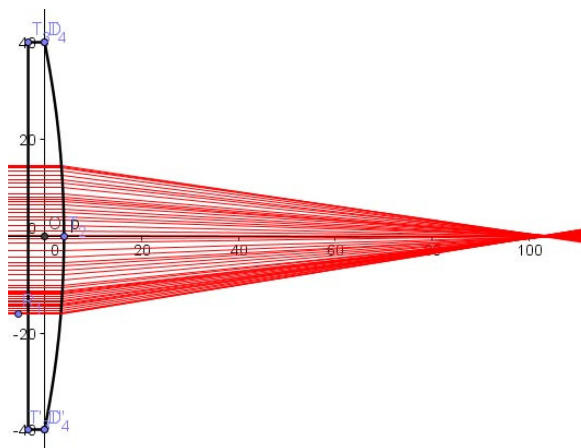
**Abb.8** Vergleich der drei Linsenarten mit gleichen Abmessungen

Wie man sehen kann sind die Brennpunkte der Linsen verschieden, obwohl die Grundabmessungen die gleichen sind. Um einen besseren Vergleich zu bringen, zeigen wir hier drei Linsen mit demselben Brennpunkt und derselben Dicke:



**Abb.9** Vergleich der drei Linsenarten mit gleichem Brennpunkt

Man kann deutlich erkennen, dass die ausfallenden Strahlen bei der sphärischen Linse recht schnell vom Brennpunkt abweichen, bei der parabolischen Linse weit weniger, und bei der hyperbolischen Linse überhaupt nicht. Für dünne Linsen (d.h. für Linsen, deren Dicke viel kleiner ist als deren Durchmesser), d.h. für die meisten Brillengläser, Kameralinsen etc., funktioniert die sphärische Linse allerdings sehr gut:



**Abb.10** Dünne sphärische Linse

*Aufgabe:*

- [7] Suche in Deiner Umgebung nach Linsen und versuche herauszufinden, ob diese sphärisch, parabolisch oder hyperbolisch sind, oder überhaupt eine andere Form haben.

## Literatur

- [1] <http://www.geogebra.org> (14. Oktober 2011)