Rennistikur notaðar til að skoða föll, snertla og heildi

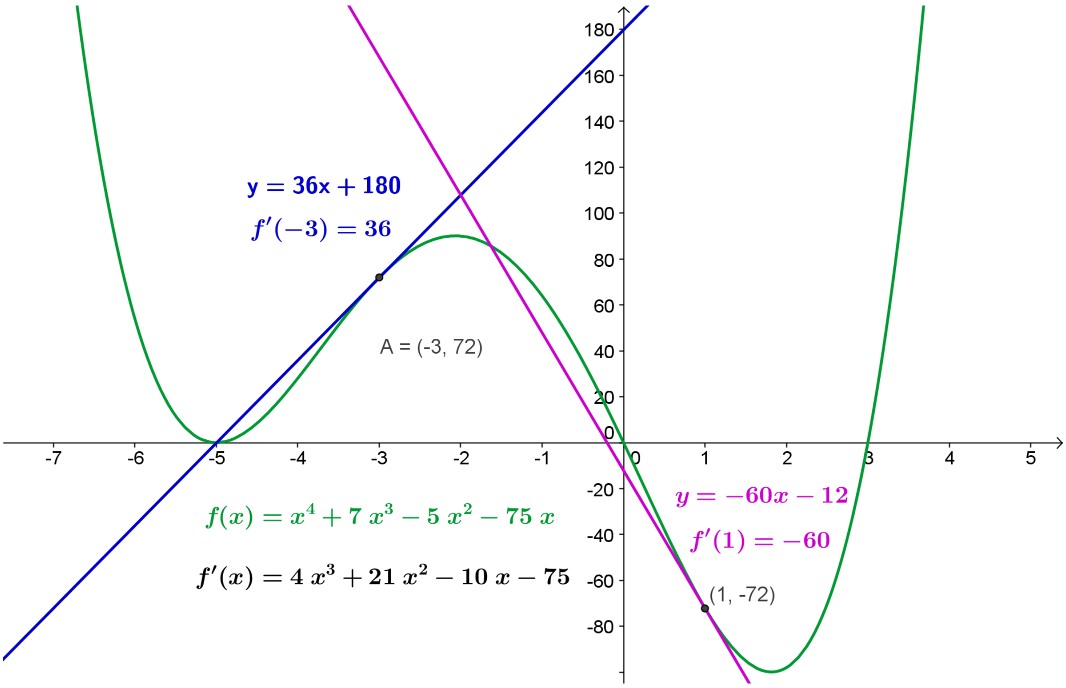
Freyja Hreinsdóttir

Háskóli Íslands

1 Inngangur

Í mörgum kennslubókum um diffrun eru æfingar þar sem nemandi er beðinn um að finna jöfnu snertils við graf falls fyrir gefið fall og gefið gildi á breytu t.d. í $x = 1$. Vanalega eru slík verkefni leyst með því að diffra fallið, finna gildi afleiðunnar fyrir gefna x gildið t.d. $f\,'(1)$, til að fá hallatölu snertilsins og að lokum er jafna línu fundin gegnum punktinn sem um ræðir, t.d. $(1, f(1))$.

Hugbúnaður eins og GeoGebra eða grafísk reiknivél hentar mjög vel við slíkar aðstæður til að kanna hvort hið reiknaða svar sé vitrænt og einnig til að tengja algebrulegu reikningana við snertilinn sem var fundinn. Það má leysa svona verkefni í GeoGebru á tvo vegu, með því að reikna afleiðuna og gildi hennar eða með því að nota verkfæri fyrir snertil. Afleiðan er reiknuð með því að skrifa *Afleiða[f]* eða $f\,'(x)$ í inntaksreitinn og gildi hennar fyrir gefið x fæst með því að skrifa t.d. $f\,'(1)$ í reitinn. Það er líka mögulegt að nota *snertlaverkfærið*  til að fá beint snertil í ákveðnum punkti. Ef þetta er gert þá er nauðsynlegt að skilgreina fyrst punktinn á grafi fallsins t.d. með því að skrifa $(1, f(1))$ í inntaksreitinn eða með því að nota *punktaverkfærið*  og smella beint á graf fallsins.



Mynd 1 Graf falls með tveimur snertilínum þess

GeoGebra getur gefið útgildi fyrir margliður og reiknað tölulega útgildi fyrir önnur föll ef bil er gefið (skipunin er *Útgildi*). Einnig er til skipun sem gefur beygjuskilapunkta fyrir margliður (*Beygju–skilapunktur*).

Annars konar vandamál er af gerðinni:

> *Hallatala snertils við fallið* $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 3$ *í punktinum* $(-1, f(-1))$ *er* 1.
>
> *Finnið gildið á a.*

Slík verkefni eru vanalega leyst algebrulega þ.e.a.s. nemandinn diffrar fallið, setur inn gildið -1 fyrir x og leysir $f\,'(-1) = 1$ til að fá gildi á a:

$f'(x) = 3ax^2 - 6x + 1$ sem gefur $f\,'(-1) = 3a + 6 + 1 = 1$ so $3a = -6 \Leftrightarrow a = -2$.

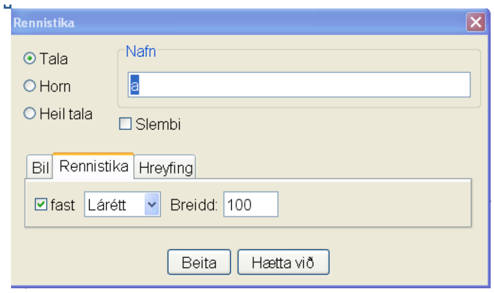
Um leið og búið er að umforma verkefnið yfir í algebruverkefni er oftast ekki talið nauðsynlegt að teikna fallið eða sannreyna svar.

Í mörgum stærðfræðigreiningarbókum eru líka flóknari verkefni af sömu gerð þar sem finna þarf staðbundin útgildi, beygjuskilapunkta, heildi osfrv. Oftast er gert ráð fyrir að reikningar séu framkvæmdir í höndunum og verkefninu breytt í algebruverkefni þ.e. yfir í það að leysa jöfnuhneppi. Áherslan verður þannig frekar á algebru en lögun fallsins sem unnið er með.

Hér fyrir neðan skoðum við leiðir til að nota GeoGebru fyrir lausn slíkra verkefna á myndrænan hátt. Mörg dæmanna hér koma úr [3].

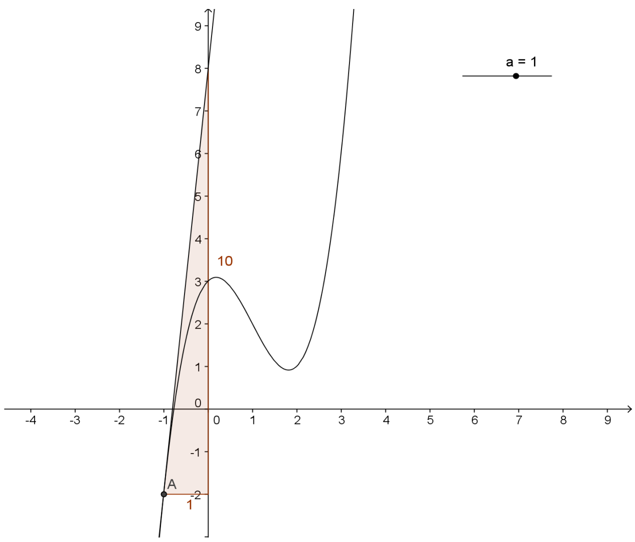
2 Notkun rennistika

Það er mjög einfalt að nota GeoGebru til að kanna áhrif þess að breyta gildi stika (eins eða fleiri) í skilgreiningu falls eins og hér fyrir ofan. Þegar slíkur stiki er skilgreindur veljum við rennistikuverkfærið  og smellum á *myndaglugga*. Þegar það er gert opnast lítill gluggi:



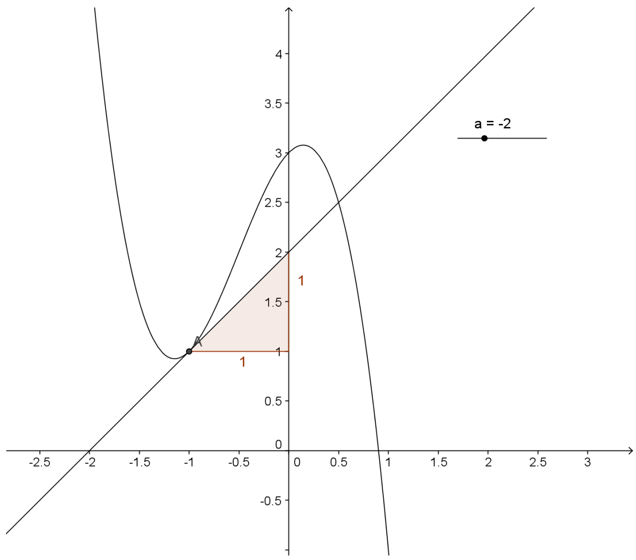
Mynd 2 Þessi gluggi er notaður til að stilla rennistikuna. Hér er sett inn lengd bils, nafn ofl.

Til að leysa verkefnið hér fyrir ofan búum við til *rennistiku a* og skilgreinum því næst fallið með því að skrifa $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 3$ í inntaksreit. Við verðum að skrifa $a * x^3$ eða $a\ x^3$ svo GeoGebra skilji ax^3.



Mynd 3 Graf fallsins *f(x)* með upphafsgildið $a = 1$

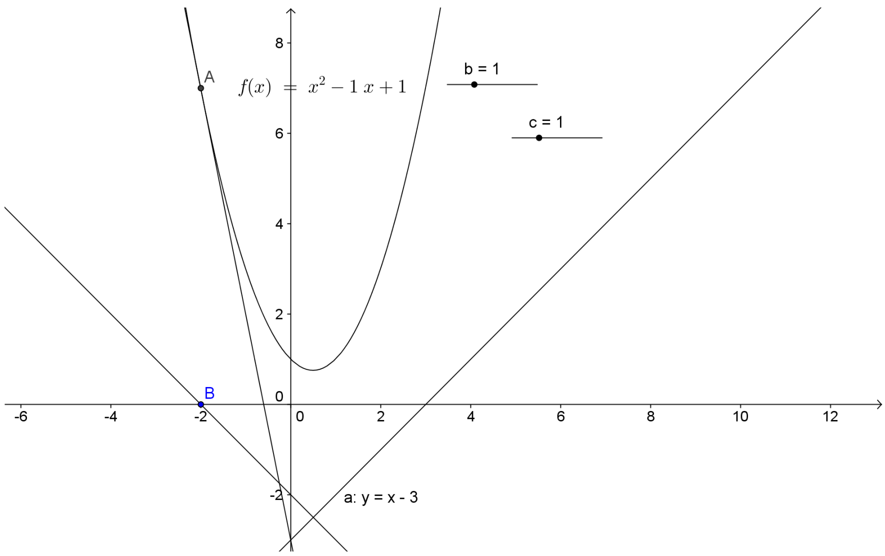
Á myndinni hér á undan var fyrst skilgreind rennistikan og því næst fallið $f(x)$. Við settum svo inn punktinn $(-1, f\,(-1))$ í inntaksreitinn (hann fékk nafnið *A*) og notuðum snertlaverkfærið  til að merkja inn snertil við $f(x)$ í punktinum. Hallaverkfærið er notað til að merkja inn halla snertilínunnar. Til að finna umbeðið gildi á a breytum við einfaldlega gildi rennistikunnar með músinni þar til gildi hallatölunnar er 1.



Mynd 4 Gildið $a = -2$ gefur umbeðinn halla

Verkefni: Fallið $f(x) = x^2 + bx + c$ hefur lággildi í punktinum $(-3, -10)$ og gengur gegnum punktinn $(0, -1)$. Finnið gildi á b og c þannig að fallið uppfylli þetta með því að nota rennistikur í GeoGebru (þið verðið að breyta bilinu sem b er skilgreint á, þetta er gert með því að hægrismella á rennistikuna og velja *Eiginleikar*).

Verkefni: Gefið er fallið $f(x) = x^2 - bx + c$. Snertill við $f(x)$ í punktinum $(-2, 0)$ er hornréttur á línuna $y = x - 3$. Finnið gildi á b og c, þannig að þetta sé uppfyllt, með því að nota rennistikur í GeoGebru. Athugið að ekki er sama í hvaða röð gildi rennistikanna er breytt.



Mynd 5 Graf $f(x) = x^2 - x + 1$ með snertilínu gegnum punktinn $(-2, f(-2)) = (-2, 7)$. Línan $y = x - 3$ ásamt hornréttri línu sem gengur gegnum punktinn $(-2, 0)$.

3 Þriðja stigs margliða

Verkefnið hér fyrir neðan er úr kennsluefni úr íslenskum framhaldsskóla [3]. Gert er ráð fyrir að nemendur leysi það algebrulega eftir að hafa diffrað. Finna á þriðja stigs margliðu $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

Fallið hefur lággildi í $x = 1$ *og graf þess hefur beygjuskilapunkt í* $(-1, 12)$.

Hér fyrir neðan förum við gegnum nokkur skref þar sem þetta er leyst með því að nota rennistikur í GeoGebru.

1. Skilgreinið þrjár rennistikur b, c og d. Skilgreinið þriðja stigs margliðuna $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ í inntaksreit.
   Við getum gert viðfangsefnið auðveldara með því að sjá til til þess að rennistikur taki aðeins heiltölugildi. Þetta er gert með því að hægrismella á rennistikuna, velja *Eiginleikar hlutar..* og undir flipanum *Rennistika* setja *Stighækkun* jafnt og 1..

2. Kannið áhrif þess að breyta gildum á rennistikunum og reynið að finna gildi þannig að fallið uppfylli skilyrðin sem gefin eru. Kannið sér í lagi hver áhrif þess eru að breyta gildi d.

3. Skrifið $f\,'(x)$ í inntaksreit, hægri smellið á grafið sem birtist, veljið *Eiginleikar* og breytið lit þess svo auðveldara sé að aðgreina það frá grafi $f(x)$. Skrifið $f\,''(x)$ í inntaksreit og veljið þriðja litinn á grafið sem birtist.

4. Breytið gildi *c* og fylgist með áhrifum þess á graf $f\,'(x)$.

5. Breytið gildum *b* og fylgist með áhrifum þess á graf $f\,''(x)$.

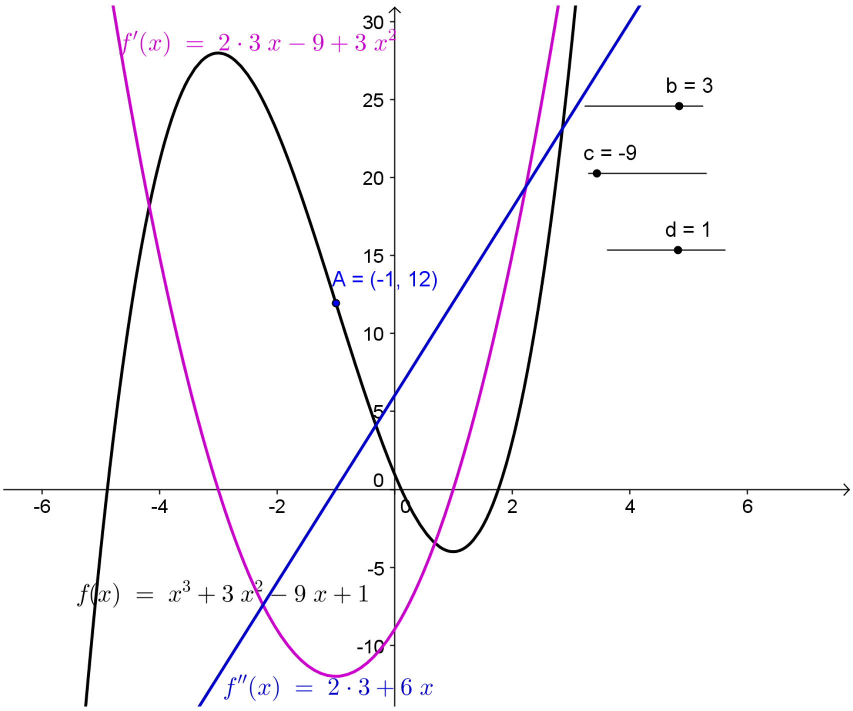
6. Fallið á að hafa beygjuskilapunkt í $x = -1$. Hvað segir þetta okkur um graf $f\,''(x)$? Getið þið fundið gildi á rennistikunni *b* þannig að þetta sé uppfyllt?

7. Fallið á að hafa lággildi í $x = 1$. Hvað segir þetta okkur um graf fallsins $f\,'(x)$? Getið þið fundið gildi á rennistikunni c þannig að þetta sé uppfyllt? Athugið að það getur verið nauðsynlegt að breyta stillingum *c*, það er gert með því að hægrismella á *c* og velja *Eiginleikar*.

Núna ætti grafið að hafa umbeðna lögun en eftir er að finna gildi á *d* þannig að staðsetningin sé rétt.

8. Skilgreinið punktinn $(-1, 12)$ í inntaksreitinn. Breytið gildi á d þar til graf fallsins $f(x)$ gengur gegnum punktinn. Ef það er erfitt að sjá þetta nákvæmlega getur hjálpað að skrifa $f\,(-1)$ í inntaksreitinn til að fá nákvæmt gildi (í algebruglugganum) og síðan breyta gildi d þar til $f\,(-1) = 12$.

9. Núna ættum við að hafa fundið rétt gildi á *b*, *c* og *d* og skilgreining fallsins $f(x)$ ætti að vera í algebruglugganum.



Mynd 6 Lausn á viðfangsefninu hér á undan

Verkefni: Ef við erum beðin um að breyta fallinu þannig að beygjuskilapunktur sé í $(-1, 10)$ með hvaða rennistiku eigum við að vinna til að ná því fram?

Verkefni: Hvað ef nýju upplýsingarnar eru að beygjuskilapunkturinn sé í $(-2, 10)$?

Verkefni: Getið þið breytt gildum rennistikanna þannig að *f(x)* hafi engin útgildi? Hvernig?

Verkefni: Getið þið breytt gildum rennistikanna þannig að *f(x)* hafi ekki beygjuskilapunkt? Hvernig?

Hefðbundin leið til að leysa upprunalega verkefnið hefði verið að diffra $f(x)$ tvisvar og nota upplýsingar um beygjuskilapunkt til að fá jöfnuna $-6 + 2b = 0$ og upplýsingar um lággildið til að fá jöfnuna $3 + 2b + c = 0$ og að lokum fæst $-1 + b - c + d = 12$ því punkturinn $(-1, 12)$ er á ferli fallsins.

Verkefni: skilgreinið eina rennistiku í viðbót og kallið hana a. Endurskilgreinið svo fallið sem $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Setjið upp jöfnuhneppið (með blaði og blýanti) sem fæst ef þetta fall uppfyllir skilyrðin fyrir ofan. Þið ættuð að fá 3 jöfnur í 4 óþekktum stærðum svo til er heil fjölskylda af föllum sem uppfyllir skilyrðin. Getið þið endurskilgreint rennistikurnar b, c og d með því að nota a til að fá allar þriðja stigs margliður sem uppfylla skilyrðin?

Verkefni: Búið til svipuð verkefni fyrir fjórða stigs margliðu.

Verkefni: Búið til svipuð verkefni fyrir aðrar gerðir af föllum t.d. vísis-og lograföll, hornaföll osfrv.

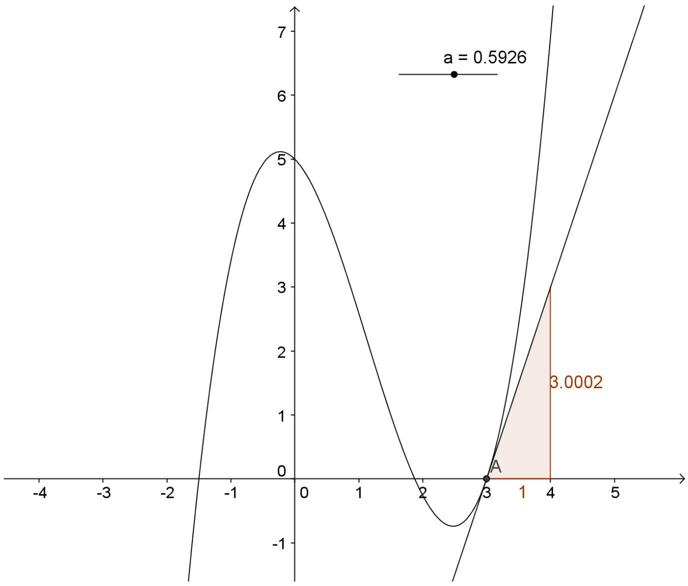
4 Vandamál við þessa lausnaraðferð

Það er ekki jafnauðvelt að leysa öll verkefni af þessari gerð. Ef við reynum að leysa mjög áþekkt verkefni:

Finnið gildi á a þannig að $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + 5$ *uppfylli* $f\,'(3) = 3$,

á svipaðan hátt og gert var hér fyrir ofan þá fæst lausnin alls ekki eins auðveldlega og áður.

Ef við gerum eins og áður þá tökum við eftir því að það gengur alls ekki vel að ná fram hallatölunni 3 því hallatalan stekkur milli gilda, sem eru miklu minni og miklu stærri en 3, þegar við breytum gildi rennistiku með músinni. Það er örlítið auðveldara að nota örvatakka á lyklaborði til að breyta gildi rennistiku (það er gert með því að smella á punktinn á rennistikunni og ýta svo á örvatakka) en samt sem áður stekkur hallinn milli gilda sem eru aðeins stærri og aðeins minni en 3. Nú borgar sig að stilla rennistikuna nákvæmar með því að hægrismella á hana, velja *Eiginleikar* og setja *Stighækkun* á 0.0001. Núna þarf að sjálfsögðu að passa að GeoGebra noti nægilega marga aukastafi, það er gert með því að fara í *Valkostir* og velja *Afrúna.* Með þessari stighækkun fæst að $a = 0.5926$ gefur hallann 3.0002 og $a = 0.5925$ gefur hallann 2.9975. Rétt gildi á *a* er því einhvers staðar þarna á milli.



Mynd 7 Búið að breyta stighækkun á rennistikunni

Verkefni: reynið að útskýra hvað er að gerast. Leiðbeining: leysið verkefnið algebrulega.

Verkefni: gerið stighækkun ennþá minni og reynið að fá nákvæma lausn.

Ef við erum nógu þolinmóð hér til þess að halda áfram með fleiri aukastafi og minni stigshækkun fáum við að $a = 0.592592$ er mjög nálægt því að gefa okkur umbeðið gildi á hallatölunni. Þessi tala virðist nálgast lotubundna tugabrotið $0.\overline{592}$ og ef því er breytt í almennt brot fæst $0.\overline{592} = 592/999 = 16/27$ sem er nákvæmlega það sem við fáum ef við leysum þetta á algebrulegan hátt.

5 Lögmál Newtons um kólnun

Lögmál Newtons um kólnun segir að kólnunarhraði hlutar sé í réttu hlutfalli við mismuninn á hitastigi hlutarins og umhverfisins. Þetta gefur diffurjöfnuna $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ þar sem T er hitastig hlutarins, T_0 er hitastig umhverfisins og *k* er fasti. Þessi diffurjafna hefur lausnina

$T = ce^{-kt} + T_0$, þar sem *c* er fasti.

Ef bolli af kaffi sem hefur hitastigið 95℃ er settur í herbergi þar sem hitastigið er 20℃ ($= T_0$) og í ljós kemur að 5 mínútum seinna er hitastig kaffisins 85℃ þá getum við notað þessar upplýsingar til að finna gildi á föstunum c og k og þannig fengið líkan sem hjálpar okkur að ákvarða hvenær kaffið nær drykkjarhæfu hitastigi (segjum að það sé við 75°C).

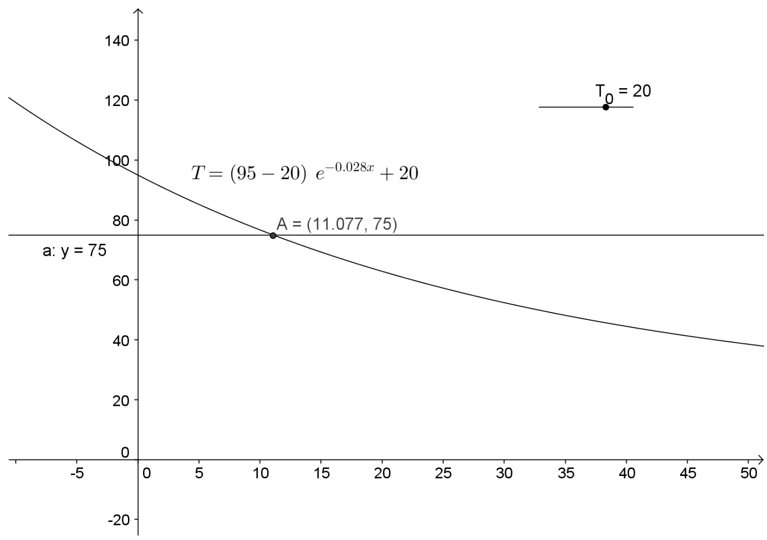
Verkefni af þessari gerð eru vanalega leyst algebrulega, þ.e.a.s. við setjum gefnu upplýsingarnar inn í formúluna til að fá jöfnur sem síðan eru leystar:

þegar t = 0 fáum við $95 = ce^0 + 20$ svo c = 75 og formúlan verður $T = 75e^{-kt} + 20$.

þegar t = 5 fáum við $85 = 75e^{-k\cdot 5} + 20$ sem gefur $k = \frac{-1}{5} \, ln\left(\frac{65}{75}\right) \approx 0.0286$

Við höfum því $T = 75e^{-0.0286t} + 20$ og þetta getum við notað til að finna út hvenær kaffið hefur hitastigið 75°C (eftir um það bil 11 mínútur).

Það er auðvelt að gera mynd af þessu í GeoGebru:



Mynd 8 Kólnun kaffis

Í stað þess að reikna út k eins og gert var hér fyrir ofan getum við búið til rennistiku fyrir k og því næst breytt gildi þess þar til ferillinn fer gegnum $(5, 85)$.

Við getum gert þetta verkefni áhugaverðara með breytilegum forsendum. Þetta er gert með því að nota rennistikur. Á myndinni fyrir ofan er T_0 rennistika (sem við notuðum ekki) en það er ekki nóg að breyta bara gildi þess því upplýsingar um hitastig kaffisins eftir 5 mínútur ættu líka að breytast sem og gildi fastans k (ef T_0 er minna en 20°C þá verður hitastig kaffisins minna en 85°C eftir 5 mínútur).

Við þurfum þrjár rennistikur í viðbót, T_c fyrir hitastig hlutarins í byrjun, T_m fyrir upplýsingar um hitastigið eftir m mínútur og loks rennistiku m fyrir mínúturnar. Það er einfalt að skrifa upp formúlu fyrir k þegar hinar stærðirnar eru gefnar og setja hana í inntaksreit GeoGebru:

$$k = \frac{-1}{m} \, ln\left(\frac{T_m - T_0}{T_c - T_0}\right)$$

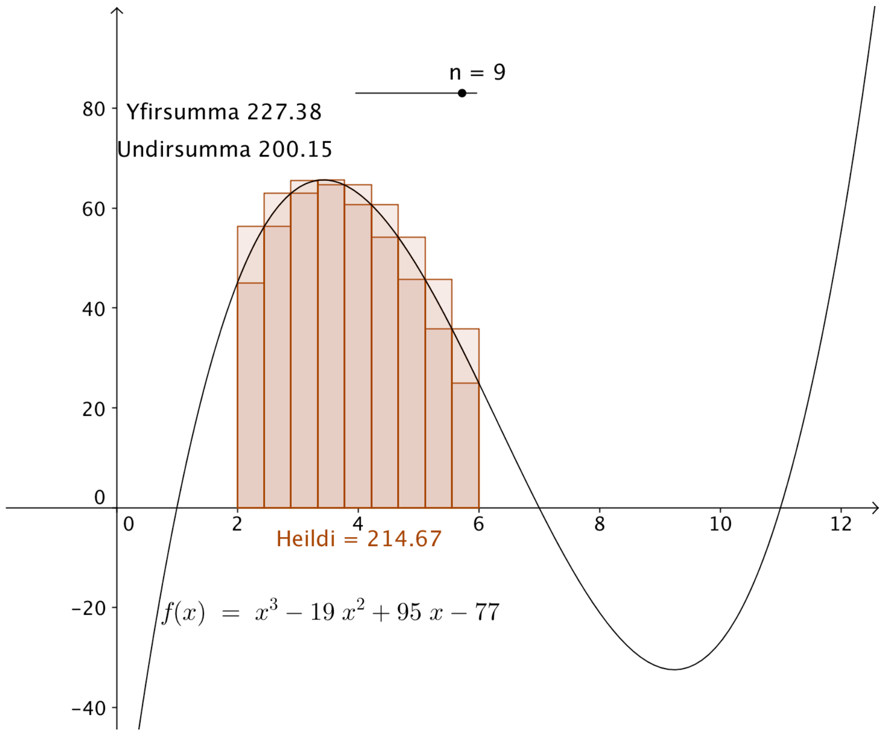
Verkefni: Setjið upplýsingarnar hér fyrir ofan inn í GeoGebru. Gerið ráð fyrir að þið setjið kaffibollann í gluggakistuna þar sem hitastigið er 15°C og að eftir aðeins 3 mínútur sé hitastigið komið niður í 85°C. Hvenær verður hægt að drekka kaffið?

Verkefni: Endurnýtið líkanið fyrir ofan fyrir kólnun dósar af Coca-Cola sem upphaflega er við herbergishita. Hitastigið í ísskápnum er $2 - 3$ °C og kjörhitastig Coca-Cola til neyslu er $3 - 6$ °C (þetta er að sjálfsögðu smekksatriði). Setjið fram skynsamlegar tilgátur fyrir gildi m og T_m (kannski borgar sig að gera tilraunir með þetta og bera saman við raunveruleikann) og finnið út hversu lengi þið verðið að hafa kókið í ísskápnum. Endurgerið nú verkefnið og notið frystiskáp $(-18$ °C$)$ í stað ísskáps. Setjið gröf af hitastiginu sem falli af tíma inn í GeoGebru fyrir bæði ísskáp og frystiskáp og berið saman.

5 Rennistikur og heildun

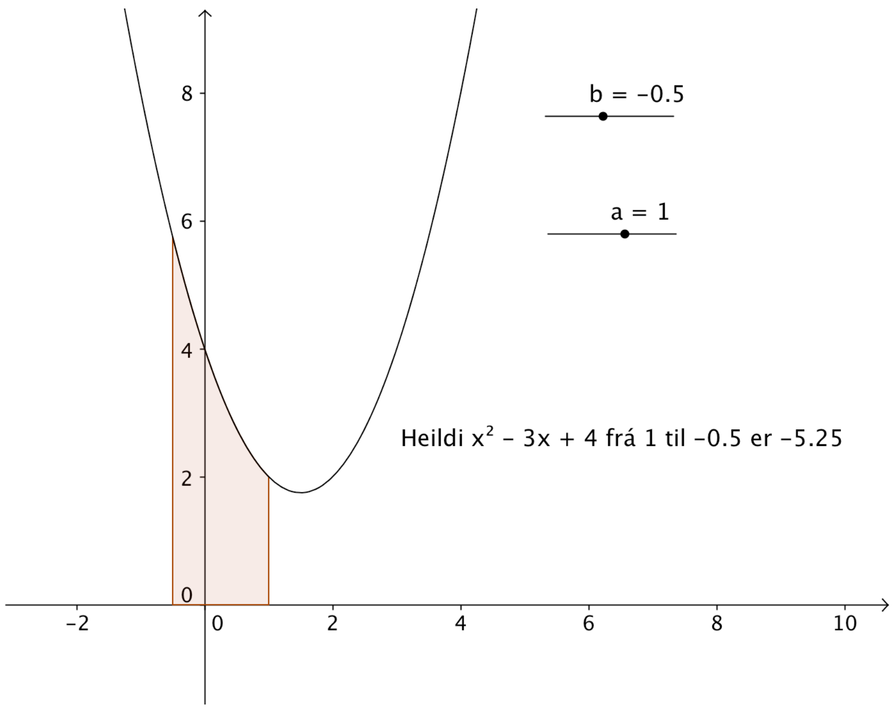
Einföld heildunarverkefni má leysa beint í GeoGebru þ.e.a.s. við getum skilgreint fall og notað skip–unina *Heildi[f]* til að fá stofnfall og skipunina *Heildi[f(x), a, b]* til að fá ákveðna heildið frá a til b. Ef við höfum gefin tvö föll $f(x)$ og $g(x)$ þá gefur *HeildiMilli[f(x),g(x),a,b]* heildið af $f(x) - g(x)$ frá a til b.

Dæmigerð notkun rennistika í þessu samhengi er til að sýna hvernig gildi undir- og yfirsummu nálgast gildi heildisins þegar fjöldi skiptibila eykst.



Mynd 9 Yfir- og undirsummur og heildi falls

Við getum líka notað rennistikur til að breyta bili sem heildað er yfir.



Mynd 10 Heildun

Þetta gagnast vel ef leysa á heildunarverkefni af ákveðinni gerð, segjum að við höfum gefið fallið $f(x)$ og við viljum finna yfir hvaða bil heildi þess sé jafnt gefinni tölu. Dæmigerð leið til að leysa slíkt viðfangsefni væri að heilda $f(x)$, setja inn mörkin a og b og leysa með algebrulegum aðferðum.

Ef notaðar eru rennistikur a og b getum við látið GeoGebru reikna heildið og því næst breytt gildum á a og b þar til umbeðin niðurstaða fæst.

Hér fyrir neðan er verkefni úr stærðfræðigreiningarbók eftir Greenwell, Ritchey og Lial [2]:

Mengun byrjar að streyma út í stöðuvatn við tímann $t = 0$ á hraða (í gallonum á klukkustund) sem gefinn er með formúlunni

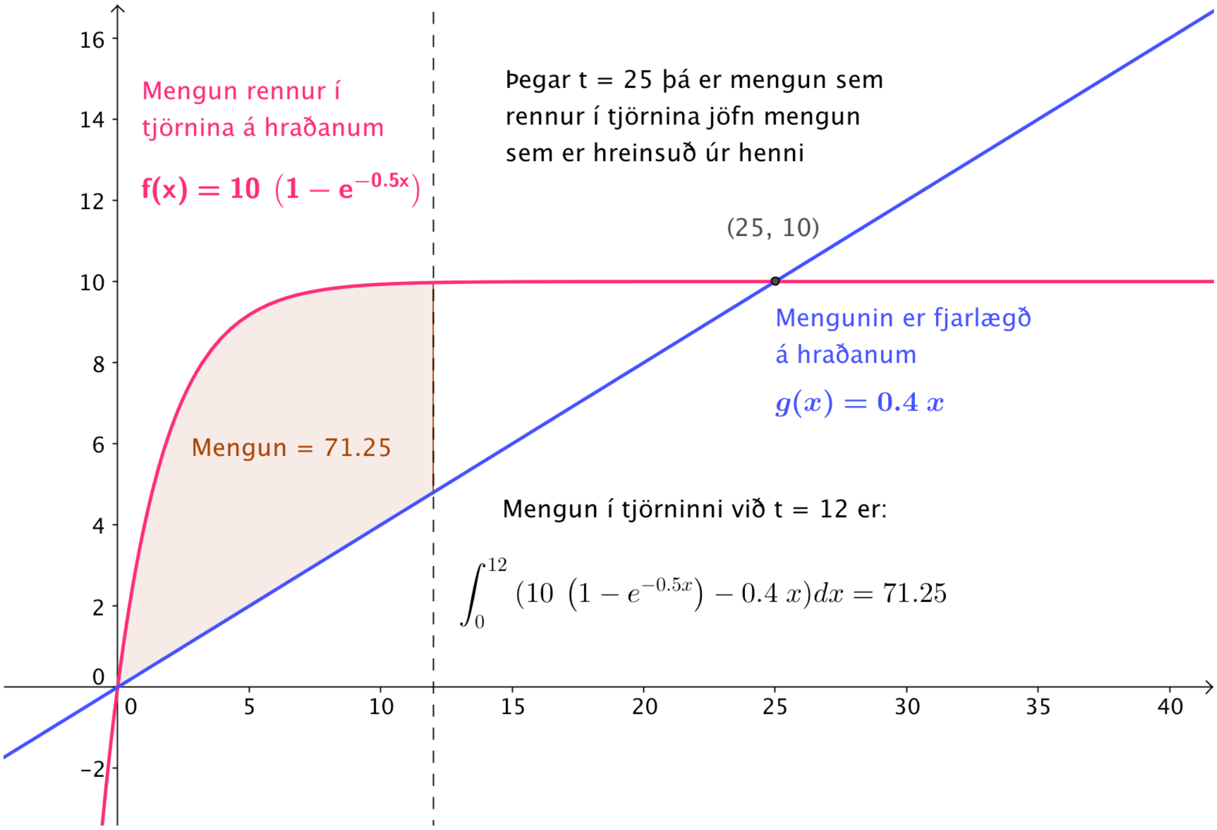
$$f(t) = 10(1 - e^{-0.5t})$$

þar sem t er tími mældur í klukkustundum. Á sama tíma fer hreinsunarbúnaður í gang og það hreinsar á hraðanum

$$g(t) = 0.4t$$

Hreinsunarbúnaðurinn er í gangi eins lengi og mengun finnst í vatninu.

Viðfangsefni þessa verkefnis í kennslubókinni er að a) ákvarða magn af mengun eftir 12 klukkustundir b) nota grafíska reiknivél til að finna hvenær magn mengunar sem fer út í vatnið er jafnt magni sem hreinsað er úr vatninu c) finna magn mengunar á þeim tímapunkti sem b liður gefur d) finna hvenær öll mengunin hefur verið hreinsuð úr vatninu.

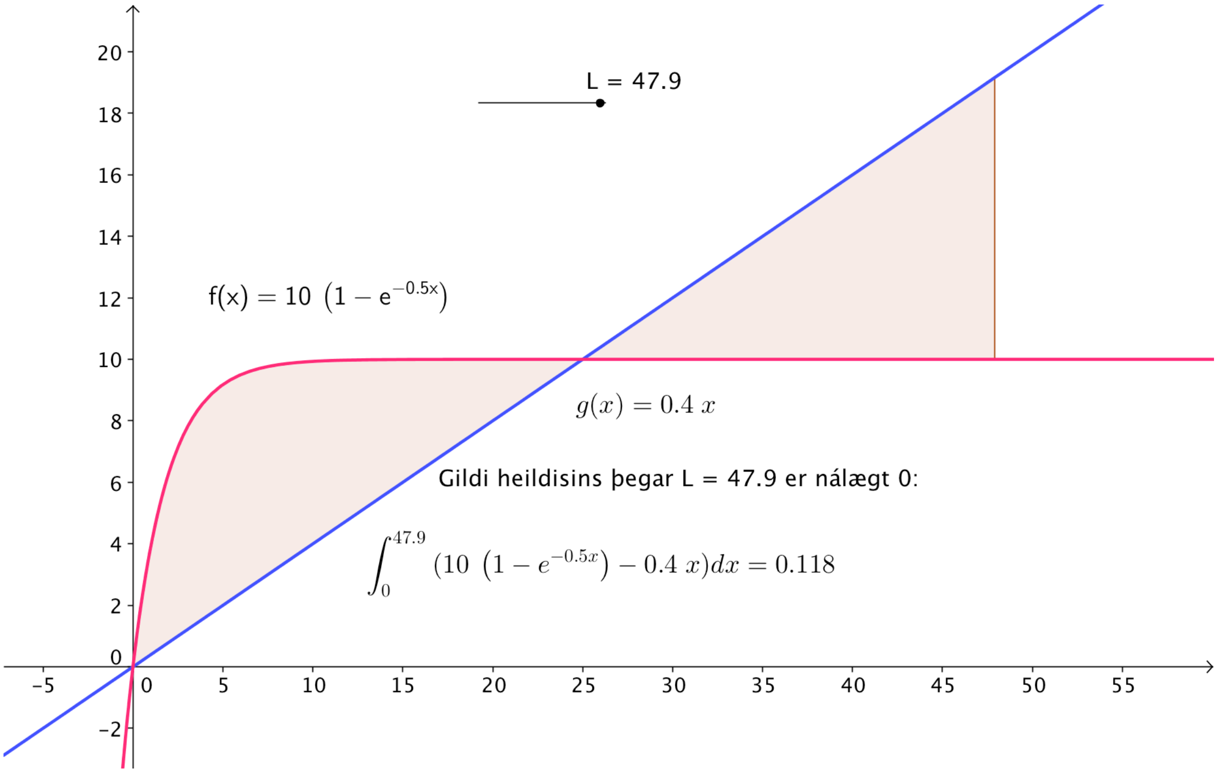


Mynd 11 Liður a og b í mengunarverkefni

Liður a) er leystur með því að heilda $f(x) - g(x)$ frá 0 til 12 og liður b) með því að finna skurðpunkt grafanna tveggja. Liður c) er leystur með því að heilda frá 0 til 25 sem gefur 105 gallon af mengun. Eftir $t = 25$ klukkustundir er mengunin hreinsuð á meiri hraða en hún streymir í vatnið svo magn mengunar fer minnkandi eftir það. Til dæmis þá eru við $t = 30$ klst 100 gallon af mengun í vatninu. Til að finna hvenær öll mengunin hefur verið hreinsuð þurfum við að finna gildi L þannig að

$$\int_0^L (f(t) - g(t))dt = \int_0^L (10(1 - e^{-0.5t}) - 0.4t)dt = 0$$

Þetta er að sjálfsögðu hægt að leysa með því að heilda fallið í höndunum og leysa fyrir L en það er mjög þægilegt að nota rennistiku hér. Það er að segja við skilgreinum rennistiku L, reiknum heildið frá 0 til L og breytum gildi rennistikunnar þar til við fáum svar sem er um það bil 0.



Mynd 12 Eftir 48 klst hefur hreinunarbúnaðurinn náð að hreinsa alla uppsafnaða mengun.

Verkefni: leysið verkefnið ef mengunarhraðinn er tvöfaldaður.

Verkefni: ef við gerum ráð fyrir að hreinunarhraðinn sé línulegt fall, hvað þarf það að vera svo hreinsun náist á minna en 24 klst? (leiðbeining: skilgreinið rennistiku fyrir stuðul g(x)).

Heimildir

[1] GeoGebra, niðurhal á http://www.geogebra.org.

[2] Greenwell, R. N. , Ritchey, N.P. and Lial, M.L. (2003), *Calculus for the Life Sciences,* USA: Pearson Education.

[3] Stærðfræði 403, MennVerkefniólinn við Hamrahlíð (2010).