Sådan bruges skydere til at undersøge funktioner, tangenter og integraler

Freyja Hreinsdóttir

University of Iceland

1 Indledning

I mange lærebøger om differentiering er der øvelser af den slags, hvor den studerende bliver bedt om at finde ligningen for tangenten til grafen for en given funktion ved en given værdi, f.eks. $x = 1$. Disse opgaver løses sædvanligvis ved at differentiere funktionen, finde værdien af differentialkvotienten ved en given x-værdi , f.eks. $f\,'(1)$, for at finde hældningen for tangenten og derefter finde ligningen for en linje gennem det givne punkt f.eks. $(1, f(1))$.

Software som GeoGebra eller en grafregner er virkelig nyttige redskaber i sådanne situationer for at kontrollere, om det udregnede svar giver mening, og også for at forbinde de algebraiske beregninger, der lige er lavet, til det faktiske geometriske objekt, der er fundet frem til. Opgaven kan løses på to måder i GeoGebra: ved at udregne differentialkvotienten og dennes værdi eller ved at bruge tangentværktøjet. Differentialkvotienten kan udregnes ved at skrive *Derivative* $[f]$ *eller* $f\,'(x)$ i indtastningsfeltet og dens værdi ved en given x-værdi ved at skrive f.eks. $f\,'(1)$ i indtastningsfeltet. Man kan også bruge *tangentværktøjet* for at få tangenten direkte på et bestemt punkt. Hvis det gøres på den måde, skal man først definere punktet på grafen for funktionen ved at skrive f.eks. $(1, f(1))$ i indtastningsfeltet eller bruge pegeværktøjet og klikke på grafen for funktionen.

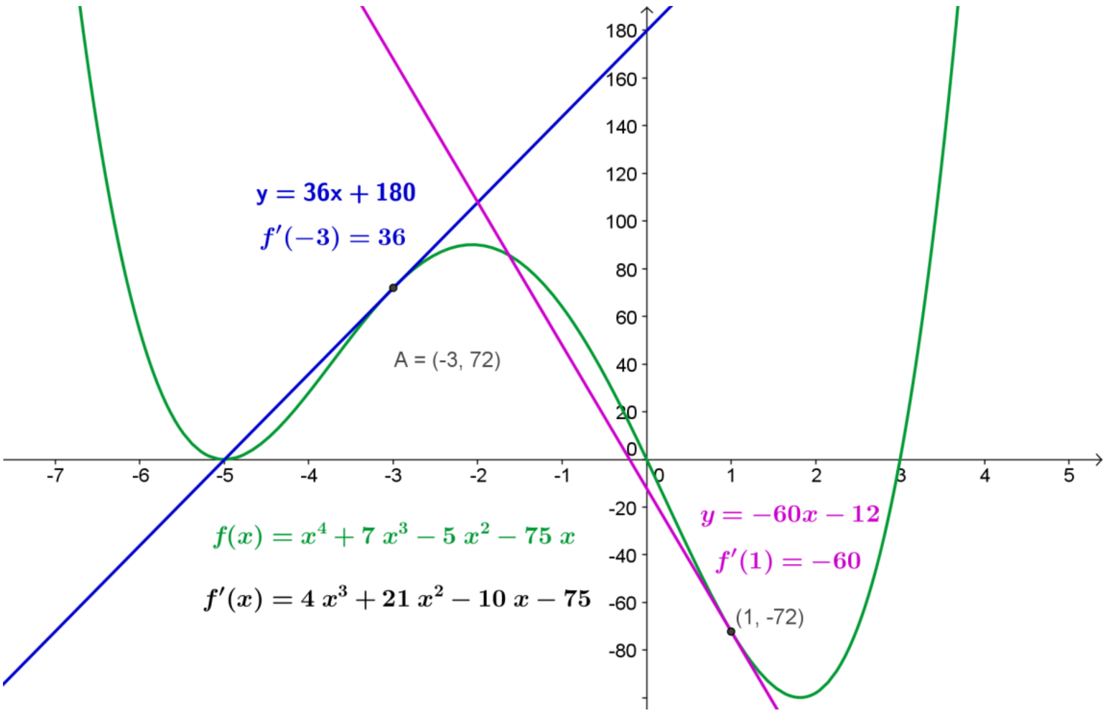


Fig. 1 Graf for en funktion med to af dens tangenter

GeoGebra kan give ekstremværdierne for polynomier og kan udregne numeriske yderpunkter for andre funktioner, hvis der opgives et interval (kommandoen er *Extremum*), og der er også en kommando, der giver punkterne for polynomiers vendepunkt (*InflectionPoint*).

En anden opgavetype kan f.eks. være:

> *Hældningen af tangenten til* $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 3$ *i punktet* $(-1, f(-1))$ *er* 1.
>
> *Find værdien af a.*

Denne type opgave kan kun løses med algebra, dvs. den studerende differentierer funktionen, erstatter værdien af *x* med -1 og løser $f\,'(-1) = 1$ for få værdien af a:

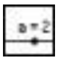
$f'(x) = 3ax^2 - 6x + 1$ hvilket giver $f\,'(-1) = 3a + 6 + 1 = 1$, så $3a = -6 \Leftrightarrow a = -2$.

når opgaven er omdannet til en spørgsmål inden for algebra, viser det sig ofte, at det ikke er nødvendigt at lave en graf over funktionen eller kontrollere svaret.

De fleste matematikbøger indeholder også mere komplicerede opgaver af samme type, der omfatter placering af relative minima og maksima, vendepunkter, integraler mv. Det antages i de fleste tilfælde, at udregningerne laves i hånden, og at opgaven konverteres til algebra, dvs. udregning af ligninger. Fokus er snarere på algebra fremfor den faktiske udformning af funktionen.

Nedenfor er en beskrivelse af, hvor man kan bruge GeoGebra til at løse den slags opgaver med en mere grafisk tilgang. Mange af de opgaver, der er set på, stammer fra materiale fra et gymnasium i Island [3].

2 Brug af skydere

Det er ved at bruge GeoGebra meget nemt at undersøge, hvad der sker, når man ændrer værdien af et (eller flere) parametre, som optræder i definitionen af en funktion som den ovenfor. Et sådant parameter defineres ved at vælge skyderværktøjet  og klikke på visningen *Graphics view*. Derefter åbnes et lille vindue:

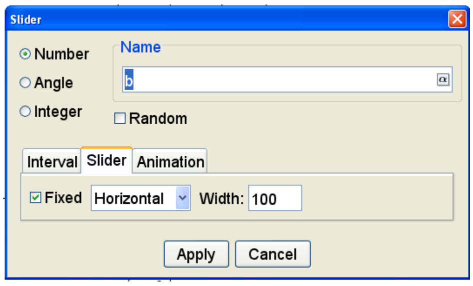


Fig. 2 Dette vindue bruges til at indstille værdien for intervallet af parametret mv.

Eksemplet ovenfor løses ved at oprette en *skyder* a og derefter definere funktionen ovenfor ved at skrive $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 3$ i indtastningsfeltet. For at GeoGebra kan forstå ax^3, skal man enten skrive $a * x^3$ eller $a\ x^3$.

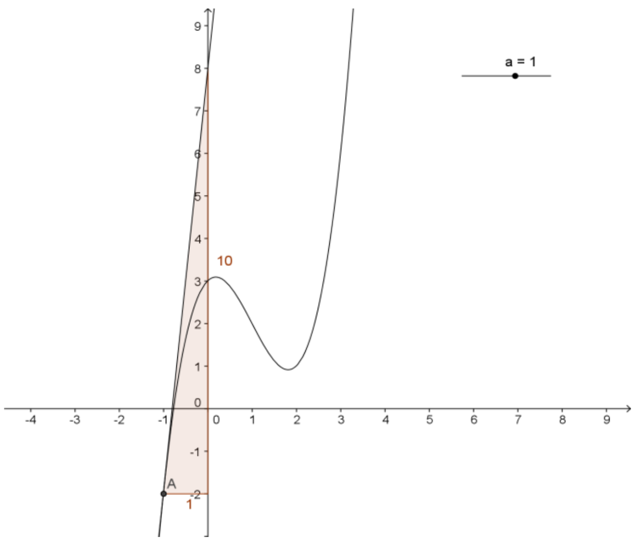


Fig. 3 Funktionen *f(x)* med den oprindelige værdi på [?] $a = 1$

I figuren ovenfor blev først skyder a defineret og derefter funktionen $\boldsymbol{f(x)}$. Derefter defineres punktet $(\mathbf{-1}, \boldsymbol{f}\,(\mathbf{-1}))$ i indtastningsfeltet (det betegnes *A*), og tangentværktøjet bruges for at få tangenten til $\boldsymbol{f(x)}$ i det punkt. Nu bruges hældningsværktøjet for at markere tangentens hældning. Den ønskede værdi af $\boldsymbol{a}$ findes ganske enkelt ved at flytte skyderen, til værdien af hældningen er **1**.

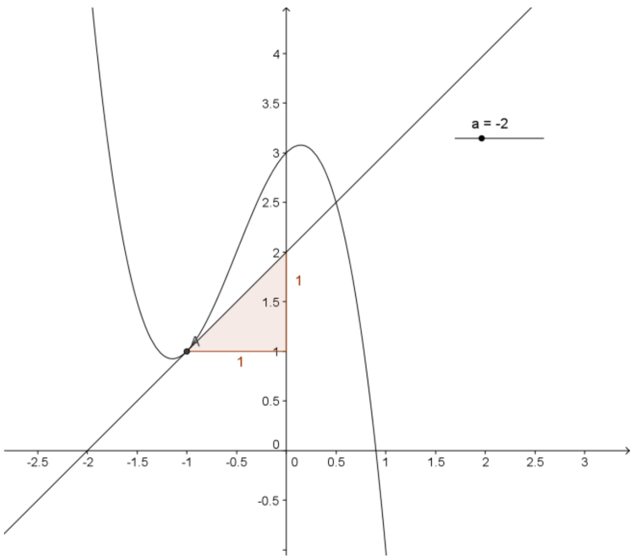


Fig. 4 Værdien $a = -2$ giver den ønskede hældning

Opgave: Grafen for funktionen $f(x) = x^2 + bx + c$ har et minimum ved punktet $(-3, -10)$ og går gennem punktet $(0, -1)$. Find værdien af b og c ved at bruge skyder i GeoGebra (man skal ændre det interval, som b er defineret udfra. Dette gøres ved at højreklikke på skyderen og vælge *Object Egenskaber).*

Opgave: Der er en given funktion $f(x) = x^2 - bx + c$. Tangenten til $f(x)$ i punktet $(-2, 0)$ er vinkelret på linjen $y = x - 3$. Find værdien af b og c med skyderne i GeoGebra. Bemærk: Overvej, i hvilken rækkefølge skydernes værdi skal ændres.

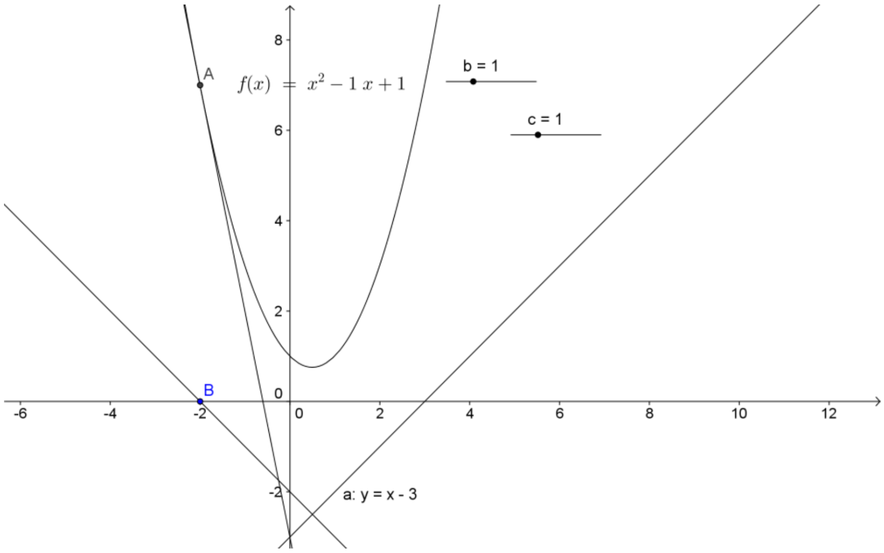


Fig. 5 Grafen for $f\ (x)\ =\ x^2 - x\ +\ 1$ med en tangent gennem punktet $(-2, f(-2))\ =\ (-2, 7)$. . Linjen $y\ =\ x\ -\ 3$ sammen med en vinkelret linje, der går gennem punktet [?] $(-2, 0)$.

3 3.-grads polynomium

Opgaven nedenfor er fra et opgaveark, der blev udleveret til gymnasiestuderende [3]. Det antages, at de studerende løser det ved at bruge algebra efter differentiering.
Formålet er at finde et 3.-grads polynomium $f(x)\ =\ x^3\ +\ bx^2\ +\ cx\ +\ d$, der opfylder følgende betingelser:

Funktionen har et minimum ved $x\ =\ 1$. *og dens graf har et vendepunkt ved* $(-1\ , 12)$.

Nedenfor er en række trin, som man kan gennemgå for at løse denne opgave med skydere i GeoGebra.

1. Definer tre skyder b, c og d. Definer 3.-grads polynomiet $f(x)\ =\ x^3\ +\ bx^2\ +\ cx\ +\ d$ i indtastningsfeltet.
   Man kan gøre opgaven lidt nemmere ved at sikre sig, at skyderne kun omfatter hele tal. Dette gøres ved at højreklikke på skyderen og vælge *Object egenskaber* og under fanebladet *Skyder* sætte tilvæksten til 1.

2. Forsøg dig lidt frem med skyderne og prøv at finde værdier, så funktionen opfylder de givne betingelser. Læg især mærke til, hvilken virkning det har at ændre værdien af d?

3. Skriv $f\ ´(x)$ i indtastningsfeltet, højreklik på den viste graf, og vælg *Properties*. Skift farve på grafen for $f\ ´(x)$, så det er nemmere at skelne den fra grafen for $f(x)$. Skriv $f\ ´´(x)$ i indtastningsfeltet, og vælg en tredje farve til den fremkomne graf.

4. Udskift værdien af c , og læg mærke til den virkning, det har på grafen for [?]. $f\ ´(x)$.

5. Udskift værdien af $f\ ´´(x)$, og læg mærke til den virkning, det har på grafen for b.

6. Det er antaget, at f har et vendepunkt ved $x\ =\ -1$. Hvad siger det os om grafen for $f\ ´´(x)$? Kan der findes en værdi på skyderen b , der opfylder denne betingelse?

7. Det er antaget, at $f(x)$ har et minimum ved $x = 1$. Hvad siger det om grafen for $f\,'(x)$? Kan der findes en værdi på skyderen c, der opfylder denne betingelse? Bemærk, at det måske er nødvendigt at ændre indstillingerne for skyderen c,. Det gøres ved at højreklikke på c og vælge *Properties*.

Grafen for *f* skulle nu have den ønskede facon, men værdien for *d*, der giver den rigtige placering af grafen, skal stadig findes.

8. Definer punktet $(-1, 12)$ i indtastningsfeltet. Udskift værdien af d, til grafen for $f(x)$ går gennem punktet. Hvis det er svært at se grafisk, kan man skrive $f\ (-1)$ i indtastningsfeltet for at få en nøjagtig værdi (i algebravinduet) og derefter flytte d, til værdien er 12.

9. De rigtige værdier for *b*, *c* og *d* er nu fundet, og ligningen for funktionen $f(x)$ skulle nu være i algebravinduet.

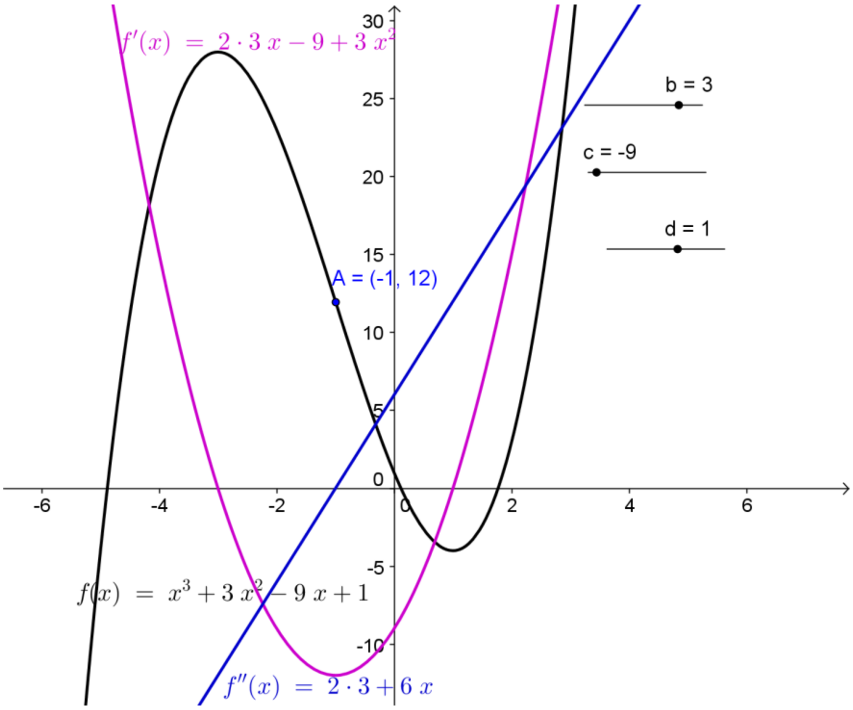


Fig. 6 Løsningen på opgaven ovenfor

Opgave: Hvis nu funktionen skal ændres, så vendepunktet er ved $(-1, 10)$, hvilken skyder skal der så arbejdes med for at opnå det?

Opgave: Hvad nu, hvis vendepunktet ifølge de nye oplysninger er ved $(-2, 10)$?

Opgave: Kan værdierne på skyderne ændres, så *f(x)* ikke har nogen ekstrema? Hvordan?

Opgave: Kan værdierne på skyderne ændres, så *f(x)* ikke har noget vendetangenpunkt? Hvordan?

En traditionel måde at løse den oprindelige opgave på ville være at differentiere $f(x)$ to gange og derefter bruge oplysningen om vendepunktet til at få ligningen $-6 + 2b = 0$, oplysningen om minimum til at få $3 + 2b + c = 0$, og til sidst har man $-1 + b - c + d = 12$, eftersom $(-1, 12)$ er på grafen.

Opgave: Definer en skyder mere a, og redefiner polynomiet som $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.. Opsæt ligningerne (med blyant og papir), som man får, hvis denne funktion skal opfylde ovenstående forudsætninger. Det skulle nu give 3 ligninger med 4 ubekendte, så der er en gruppe funktioner, der opfylder forudsætningerne. Kan parametrene b, c og d redefineres i forhold til a for at få alle 3.-grads funktioner, der opfylder forudsætningerne?

Opgave: Lav en tilsvarende opgave for et 4.-grads polynomium.

Opgave: Lav tilsvarende opgaver med andre funktionstyper, f.eks. eksponentielle og logaritmiske funktioner, trigonometriske funktioner mv.

4 Opgaver med denne løsningsmetode

Ikke alle opgaver af denne type er nemme at løse. Hvis man prøver løse en tilsvarende opgave:

Find værdien af a, så $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + 5$ opfylder $f'(3) = 3$,

på samme måde, får man ikke løsningen så nemt som i de foregående eksempler.

Når man begynder at gøre det, der blev gjort før, kan man se, at det ikke er så nemt at få en hældning med nøjagtigt værdien 3, dvs. hældningen hopper mellem store og små værdier. Det er derfor nemmere at klikke på punktet på skyderen og bruge piletasterne på tastaturet for at ændre værdien på skyderen. Når det gøres, ses det, at hældningen hopper mellem værdier, der er lidt større og mindre end 3. Det er derfor en god ide at indstille skyderen mere præcist. Højreklik på a for at gøre det, og vælg *Object properties*, hvorefter stigningen sættes til 0.0001. Nu skal det selvfølgelig sikres, at GeoGebra bruger nok decimaler. Det gøres under *Options*, og derefter vælges *Rounding*. Med denne stigning ses det, at $a = 0.5926$ giver hældningen 3.0002, og $a = 0.5925$ giver hældningen 2.9975.. Den korrekte værdi af a er derfor et sted mellem de to.

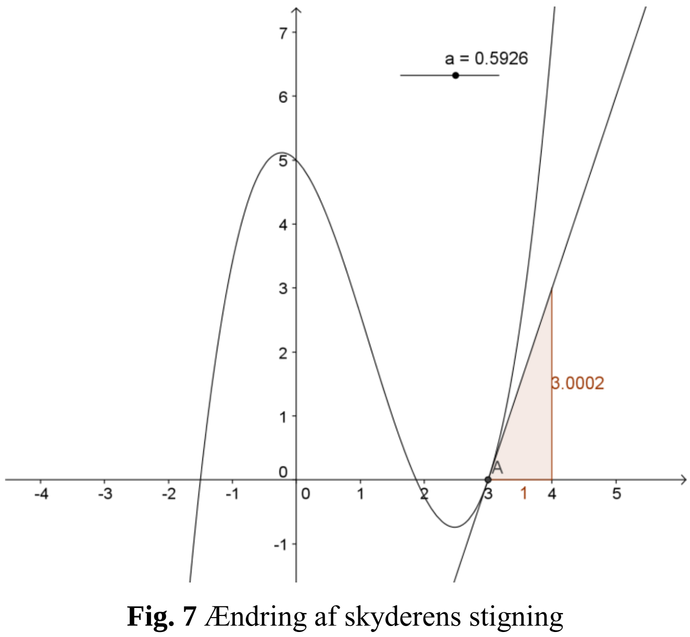


Fig. 7 Ændring af skyderens stigning

Opgave: Prøv at forklare, hvad der sker. Tip: Løs opgaven med algebra.

Opgave: Lav stigningen endnu mindre, og prøv at løse opgaven.

Hvis man er tilstrækkeligt tålmodig til at arbejde med opgaven med endnu flere decimaler og mindre stigninger, skulle man til sidst få det resultat, at $a = 0.592592$ ser ud til at komme meget tæt på de ønskede værdier for hældningen. Tallet ser ud til at være tæt på en periodisk decimalbrøk, som kan konverteres til fraktionen $a = 592/999 = 16/27$, som er lige netop den løsning, man får ved at løse opgaven med algebra.

5 Newtons lov om køling

Ifølge Newtons lov om køling er ændres temperaturen på en genstand sig proportionalt med forskellen i temperaturen på genstanden og det omgivende medium. Det giver differentialligningen $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$, hvor T er temperaturen på genstanden, T_0 er temperaturen på det omgivende medium, og k er en konstant. Denne ligning har løsningen

$$T = ce^{-kt} + T_0,\text{ hvor } c \text{ er en konstant.}$$

Så hvis en kop kaffe med en temperatur på 95°C placeres i et rum ved 20°C ($= T_0$), og kaffen 5 minutter senere har temperaturen 85°C, kan man bruge de informationer til at finde værdierne for c og k og således få en model, der vil hjælpe en med at vurdere, hvornår kaffen kan drikkes (f.eks. ved 75°C).

Denne type opgaver løses i reglen med algebra, dvs. man sætter informationerne ind i en formel for at få ligninger, der skal løses:

Når t = 0, fås $95 = ce^0 + 20$, så c = 75, og formlen er $T = 75e^{-kt} + 20$.

Når t = 5, fås $85 = 75e^{-k\cdot 5} + 20$, hvilket giver [?] $k = \frac{-1}{5}\, ln\left(\frac{65}{75}\right) \approx 0.0286$

Man får derfor $T = 75e^{-0.0286t} + 20$, og det kan bruges til at finde ud af, hvornår kaffen har temperaturen 75°C (i løbet af ca. 11 minutter).

Det er nemt at tegne et billede af det i GeoGebra:

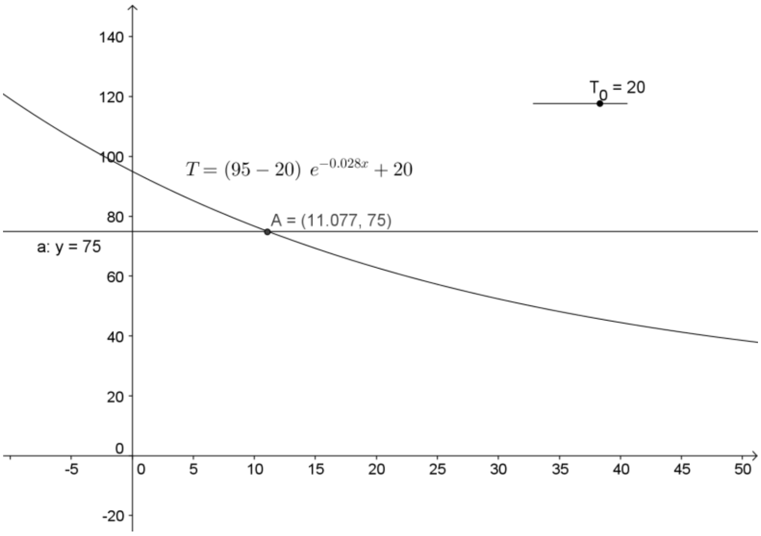


Fig. 8 Afkøling af kaffe

I stedet for at beregne k ovenfor, kunne man have oprettet en skyder for k og derefter ændret dens værdi, til kurven ville gå igennem [?] $(5, 85)$.

Man kan gøre opgaven mere interessant ved at variere informationerne med skyderen. Der er i figuren ovenfor T_0 en skyder (selvom den ikke blev brugt), men det giver ikke rigtigt mening kun at ændre dens værdi, fordi informationen om kaffens temperatur efter 5 minutter så også skulle ændres samt værdien af k (hvis T_0 er mindre end 20°C, vil kaffens temperatur være mindre end 85°C i løbet af 5 minutter).

Der skal bruges tre skydere mere, T_c for temperaturen på genstanden i begyndelsen, T_m for information om temperaturen efter m minutter og endelig en skyder m for minutter. Det er nemt at nedskrive en formel for k i forhold til de givne parametre og skrive den i indtastningsfeltet i GeoGebra:

$$k = \frac{-1}{m} \, ln\left(\frac{T_m - T_0}{T_c - T_0}\right)$$

Opgave: Læg informationerne ovenfor ind i GeoGebra. Antag nu, at kaffekoppen sættes i vindueskarmen, hvor temperaturen er 15°C, og efter kun 3 minutter er temperaturen nede på 85°C. Hvornår kan kaffen drikkes?

Opgave: Brug modellen ovenfor igen for afkøling af en dåsecola, der fra starten har rumtemperatur. Køleskabstemperaturen er $2 - 3$ °C, og den ideelle temperatur for en cola er $3 - 6$ °C (det er selvfølgelig en smagssag). Foretag nogle antagelser for værdierne for m og T_m (man kan evt. eksperimentere med det og sammenligne med virkeligheden), og find ud af, hvor længe colaen skal blive i køleskabet. Prøv nu at udskifte køleskabet med fryseren (-18 °C)), og løs opgaven ud fra det. Læg begge grafer ind i samme grafiske visning for at kunne sammenligne.

5 Skydere og integration

Enkle opgaver inden for integration kan løses direkte i GeoGebra, dvs. man kan definere en funktion og bruge kommandoen *Integral[f(x)]* for at få en primitiv funktion og kommandoen *Integral[f(x), a, b]* for at få den bestemte integral fra a til b. Hvis man har to funktioner $f(x)$ og $g(x)$, giver *Integralmellem[f(x), g(x), a, b]* integralen $f(x) - g(x)$ fra a til b.

I denne forbindelse bruges der typisk skydere til at vise, hvordan hhv. størsteværdien og mindsteværdien nærmer sig værdien af integralen, når antallet af intervaller øges.

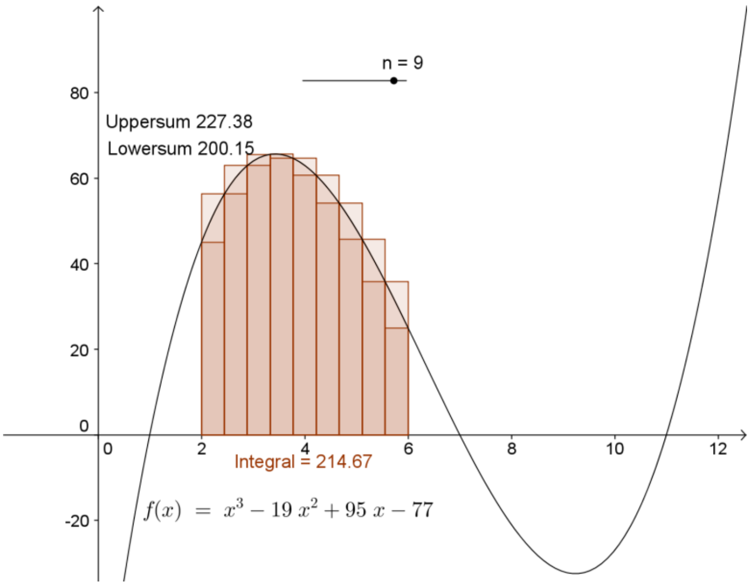


Fig. 9 Største- og mindsteværdier og integralen for en funktion

Man kan også bruge skydere til at definere de dynamiske intervaller for integration.

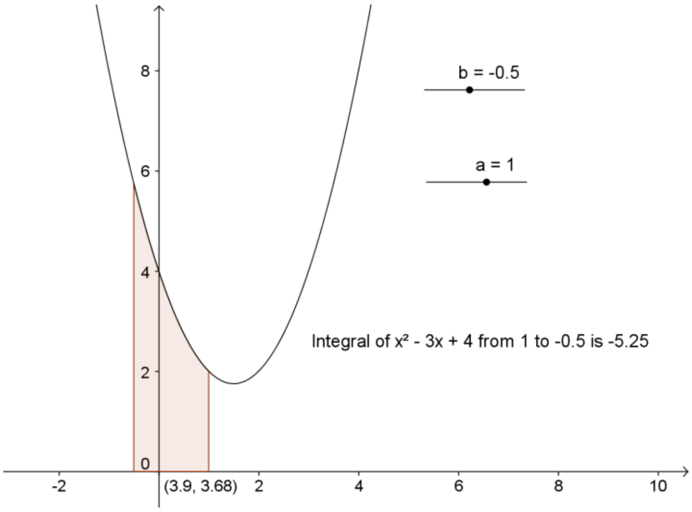


Fig. 10 Integrering

Dette kan være nyttigt, når man skal studere visse problemer inden for integration. Der er f.eks. givet en funktion $\boldsymbol{f(x)}$, og man skal besvare spørgsmålet, over hvilket interval er integralen af $\boldsymbol{f(x)}$ lig med et bestemt tal. En sådan opgave vil som regel blive løst ved at integrere $\boldsymbol{f(x)}$, udskifte grænserne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og derefter løse opgaven.

Med skyderne a og b kan man få GeoGebra til at beregne integralen og derefter ændre værdierne a og b, til man har den ønskede værdi.

Nedenfor er en opgave fra en matematikbog af Greenwell, Ritchey og Lial [2]:

En sø begynder at blive forurenet på et tidspunkt $t = 0$ med en hastighed på (i gallons pr. time), der er givet af formlen [?]

$$f(t) = 10(1 - e^{-0.5t})$$

hvor t er tiden i timer. Samtidigt begynder et rensefilter at fjerne forureningen med en hastighed på [?]

$$g(t) = 0.4t$$

så længe, søen er forurenet.

Opgaven er nu at a) finde mængden af forurening efter 12 timer, b) bruge en grafisk regnemaskine til at finde tidspunkt, hvor den hastighed, som forureningen kommer til søen med, er lig med den hastighed, som forureningen fjernes med, c) finde mængden af forurening i søen på det tidspunkt, der blev fundet under punkt b, og d) finde det tidspunkt, hvor al forureningen er fjernet fra søen.

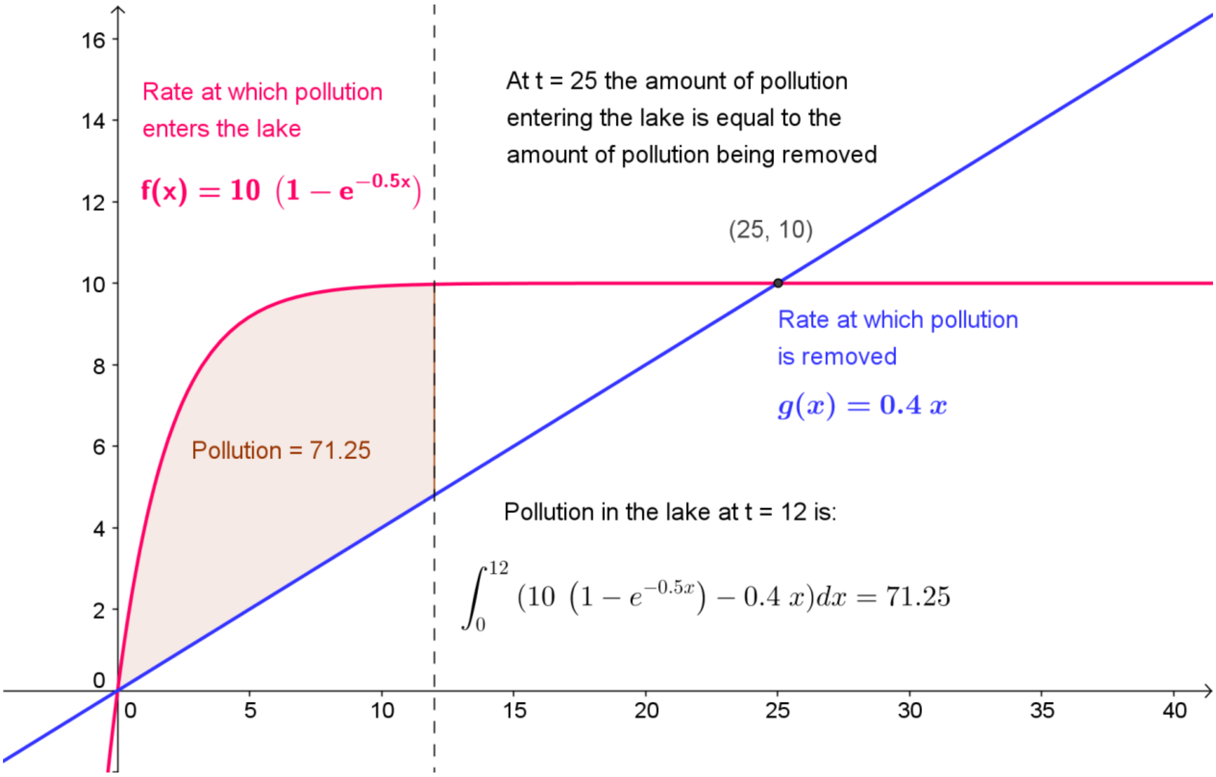


Fig. 11 Del a og b af forureningsopgaven

Del a løses ved at integrere *f(x) – g(x)* fra 0 til 12 og del b ved at finde skæringspunktet for de to grafer. Del c løses ved at integrere fra 0 til 25, hvilket giver 105 gallon forurening. Efter $t = 25$ timer oprenses forureningen hurtigere, end den foregår, så forureningsmængden nedsættes. Der er f.eks. ved $t = 30$ timer en forurening på 100 gallon. For at finde ud af hvornår al forureningen er oprenset, skal man finde den øverste grænse L af integralen, således at [?]

$$\int_0^L (f(t) - g(t))dt = \int_0^L (10(1 - e^{-0.5t}) - 0.4t)dt = 0$$

Dette kan selvfølgelig løses ved at integrere funktionen i hånden og løse den for L, men det er ganske praktisk at bruge en skyder her. Dvs. der defineres en skyder L, integralen fra 0 til L beregnes, og skyderen flyttes, til man kommer til et svar, der er tilstrækkeligt tæt på 0.

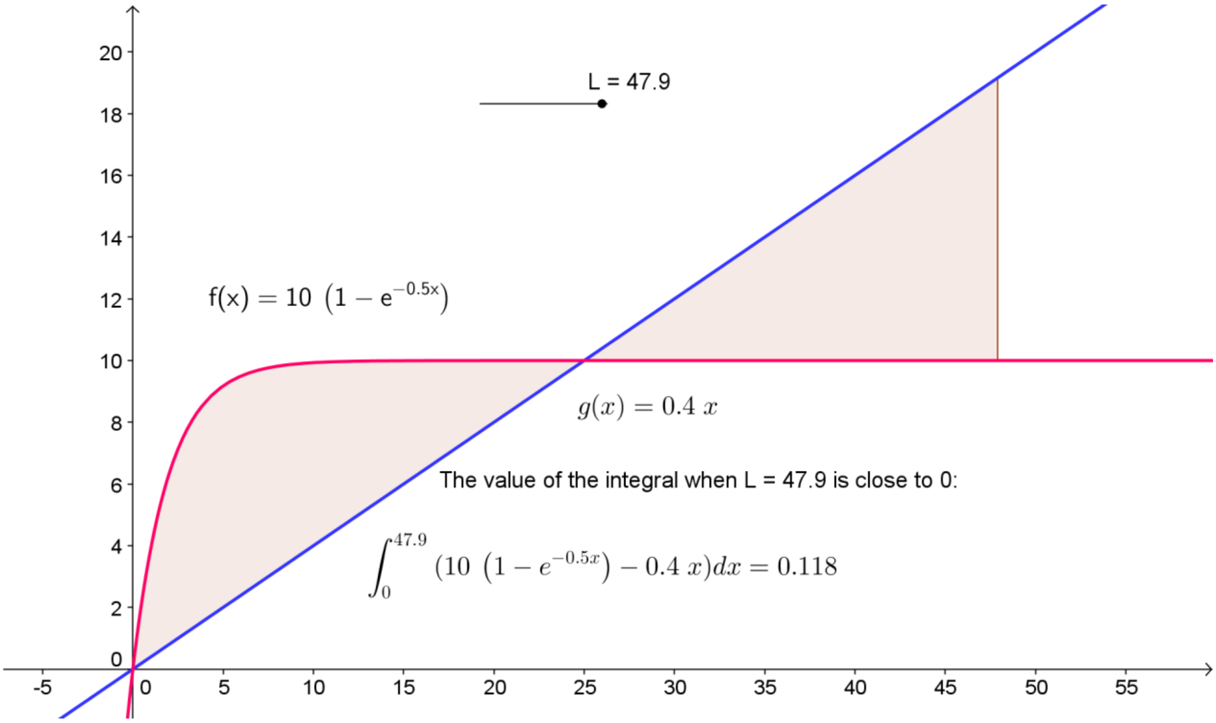


Fig. 12 Efter 48 timer har oprensningen indhentet forureningen og oprenset den ophobede forurening

Opgave: Løs opgaven ovenfor ud fra den antagelse, at forureningshastigheden er dobbelt så hurtig.

Opgave: Hvis det antages, at oprensningshastigheden er lineær, hvad skal den så være, for at situationen kan komme under kontrol på mindre end 24 timer? (Tip: definer en skyder for koefficienten g(x).)

Referencer

[1] GeoGebra, kan downloades fra http://www.geogebra.org.

[2] Greenwell, R. N. , Ritchey, N.P. og Lial, M.L. (2003), *Calculus for the Life Sciences*, USA: Pearson Education.

[3] Stærðfræði 403, Menntaskólinn við Hamrahlíð (2010).