Lifelong Learning Programme

DynaMAT

Ummál hreintóna þríhyrninga í sporbaugi

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Stuttur inngangur

Við höldum áfram með rannsókn okkar á eiginleikum lotubundinna þríhyrninga á biljarðsborðum út frá eftirfarandi texta sem settur er fram á bls. 170 í [1]:

„Næst leitum við að þríhyrningi af hámarkslengd sem innritaður er í C (C er ferill á fletinum). Augljóslega er til a.m.k. einn slíkur þríhyrningur og er engin hlið hans með lengdina núll. Í öllum hornpunktum hans mun snertillinn að sjálfsögðu mynda jöfn horn við hliðarnar tvær sem fara í gegnum hornpunktinn. Þar af leiðandi fæst 'hreintóna þríhyrningur' sem mun samsvara tveimur aðskildum hreyfingum, einni fyrir hvorn mögulegan skilning á lýsingu. Ennfremur, ef við leitumst eftir því að breyta þessum þríhyrningi samfellt, höldum röð hornpunktanna óbreyttri og minnkum ummálið eins lítið og hægt er, þannig að við getum loks hreyft hornpunktana áfram lotubundið þá uppgötvum við annan hreintóna þríhyrning sem samsvarar einnig tveimur lotubundnum hreyfingum."

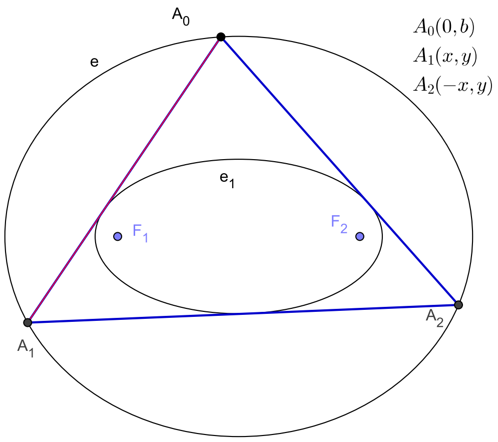
2 Sýnidæmi af áþreifanlegum hreintóna þríhyrningum

Fyrir einfaldasta tilfellið veljum við sporbauginn

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

og tökum punkt $A_0 \in e$ á $y-$ásnum, þ.e. $A_0 = (0, b)$ (sjá mynd 1).

Með því að fylgja leiðbeiningunum sem Birkhoff ([1]) setti fram er hægt að finna þann þríhyrning $\triangle\ A_0A_1A_2$ innritaðan í e sem hefur hámarksummál .



Mynd 1: Hreintóna þríhyrningur með $A_0 = (0, b)$

Í [5] fundum við formúlur fyrir hnitum punktanna $A_1(x, y), A_2(-x, y)$.

Ef við rifjum upp fullyrðingu setningar 1 í [5] sjáum við að ef $\triangle\ A_0A_1A_2$ er lotubundinn, þá er brenniflötur þess sporbaugur með sömu brennipunkta, sem við táknum með

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{2}$$

Skilyrðið að e og e_1 hafi sama brennipunkt F_1 og F_2 má gefa með

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2. \tag{3}$$

Við gerum ráð fyrir að e_1 sé innan í e þannig að við höfum

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0, a > a_1, b > b_1.$$

Rifjum upp niðurstöðurnar úr [5]

Hjálparsetning 1. *(sjá [5]) Að gefnum sporbaugi $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ getur maður lýst nauðsynlega og nægjanlega skilyrðinu þ.a. línan $y = kx + b$ gegnum punktinn $A_0(0, b)$ sé snertill e_1 á eftirfarandi hátt*

$$k^2 = \frac{b^2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Hjálparsetning 2. *(sjá [5]) Að gefnum sporbaugi $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktinum $A_0(0, b)$ táknaðu með t_1, t_2 snertilínurnar frá A_0 að e_1 og með A_1, A_2 skurðpunkta snertilínanna við sporbauginn $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, þannig að $A_1(x, y), x < 0$, $A_2(-x, y)$. Þá höfum við*

$$x = -\frac{2a^2 a_1 b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = \frac{b(a_1^2 b^2 - a^2(b^2 - b_1^2))}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = \frac{b(b^2 - a^2k^2)}{b^2 + a^2k^2}.$$

Út frá venslunum $y = -b_1$ er hægt að finna a_1, b_1 með því að taka tillit til þeirrar staðreyndar að e og e_1 eru með söma brennipunkta.

Hjálparsetning 3. *Að gefnum sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktinum $A_0(0, b)$ lát $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ vera punktana sem ákvarðaðir eru frá hjálparsetningu 2. Þá er A_1A_2 snertill e_1 ef og aðeins ef*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Sönnun. Venslin $y = -b_1$ er jafngild

$$\frac{b(b^2 - a^2k^2)}{b^2 + a^2k^2} = -b_1.$$

Þetta má endurskrifa á forminu

$$b^2(b + b_1) - a^2k^2(b - b_1) = 0$$

þ.a. með því að beita hjálparsetningu 1 fáum við

$$b^2(b + b_1) - \frac{a^2(b + b_1)(b - b_1)^2}{a_1^2} = 0.$$

Svo einföldum við

$$b^2 - \frac{a^2(b-b_1)^2}{a_1^2} = 0$$

eða

$$a_1^2 b^2 = a^2(b-b_1)^2$$

og þetta þýðir að

$$a_1 b = a(b-b_1).$$

Þessi vensl og sú staðreynd að e, e_1 eru sammiðja leiðir til hneppisins

$$\begin{cases} a_1 b = a(b-b_1), \\ a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2. \end{cases} \tag{4}$$

Þetta hneppi hefur ótvíræða lausn $a_1 > 0, b_1 > 0$ ákvarðaða af

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Þetta lýkur sönnun hjálparsetningarinnar.

□

Maður getur kynnt til sögunnar stærðina

$$s = \frac{b}{a} \in (0,1). \tag{5}$$

Þá höfum við eftirfarandi framsetningu formúlna fyrir a_1, b_1

$$a_1 = a\frac{(\sqrt{1 - s^2 + s^4} - s^2)}{1 - s^2},$$

$$b_1 = b\frac{(1 - \sqrt{1 - s^2 + s^4})}{1 - s^2}.$$

Maður getur reynt að breyta punktinum A_0 með því að velja $A_0(a,0)$ (sjá mynd 2)

Dæmi 1. *Að gefnum sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ er hægt að lýsa nauðsynlega og nægjanlega skilyrðinu þ.a. línan $y = kx - ka$ gegnum punktinn $A_0(a,0)$ sé snertill e_1 á eftirfarandi hátt.*

$$k^2 = \frac{b_1^2}{a^2 - a_1^2}$$

Hægt er að breyta hlutverki ásanna x og y og endurskrifa jöfnuna $y = kx - ka$ sem

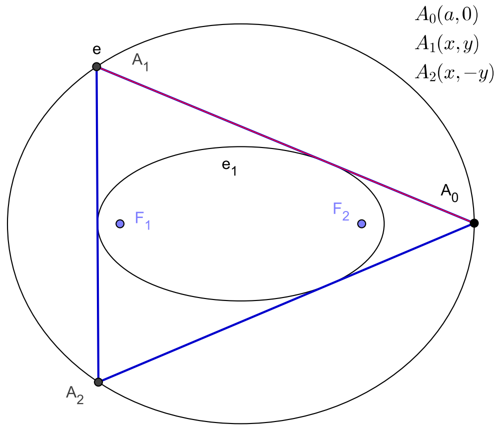
$$x = \frac{1}{k}y + a$$

til að fá fram svarið

$$\frac{1}{k^2} = \frac{a^2 - a_1^2}{b_1^2}$$

úr hjálparsetningu 1.

Með svipaðri röksemdafærslu fæst eftirfarandi:



Mynd 2: Hreintóna þríhyrningur með $A_0(a, 0)$

Dæmi 2. *Að gefnum sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktinum $A_0(a, 0)$ táknaðu með t_1, t_2 snertilínurnar frá A_0 að e_1 og með A_1, A_2 skurðpunkta þessara snertilína við sporbauginn $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, þ.a. $A_1(x, y), x < 0$, $A_2(x, -y)$. Þá höfum við*

$$x = \frac{a(a^2k^2 - b^2)}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = -\frac{2ab^2k}{b^2 + a^2k^2}.$$

Með því að fylgja eftir sönnuninni á hjálparsetningu 3 getur maður leyst eftirfarandi dæmi

Dæmi 3. *Að gefnum sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punkti $A_0(a, 0)$ lát $A_1(x_1, y_1), y_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), y_2 > 0$ vera punktana sem ákvarðaðir eru í dæmi 2. Þá er A_1A_2 snertill e_1 ef og aðeins ef*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

3 Ummál áþreifanlegra hreintóna þríhyrninga

Í einfaldasta tilfelli sporbaugsins

$$e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

og punkts $A_0 \in e$ á $y-$ásnum, þ.e. $A_0(0, b)$ (sjá mynd 1), höfum við skýra formúlu fyrir $A_1(x, y), A_2(-x, y)$

$$x = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = -M, \quad M = \frac{b(b^2 - a^2k^2)}{b^2 + a^2k^2},$$

fengna úr hjálparsetningu 2. Ummál þríhyrningsins $\triangle A_0A_1A_2$ er

$$P_1 = 2\sqrt{x^2 + (b - y)^2} + 2|x| =$$

$$= \frac{4a^2b|k|\sqrt{k^2+1}}{b^2 + a^2k^2} + \frac{4b|k|a^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

Hjálparsetningu 1 má nota til þess að finna lýsinga á P_1 og sanna eftirfarandi.

Hjálparsetning 4. *Að gefnum sporðbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktinum $A_0(0, b)$ lát $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ vera punktana ákvarðaða í hjálparsetningu 2. Þá er ummál P_1 þríhyrningsins $\triangle A_0A_1A_2$ gefin með*

$$P_1 = \frac{4a^2b(a + a_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b^2a_1^2 + a^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Með því að færa punktinn A_0 þ.a. $A_0(a, 0)$ getum við sannað

Hjálparsetning 5. *Að gefnum sporbaug $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktsins $A_0(a, 0)$ lát $A_1(x_1, y_1), y_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), y_2 > 0$ vera punktana ákvarðaða í dæmi 2. Þá er ummál P_2 þríhyrningsins $\triangle A_0A_1A_2$ gefin með*

$$P_2 = \frac{4ab^2(b + b_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b_1^2a^2 + b^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Dæmi 4. *Sýnið að $P_1 = P_2$*

Vísbending. Notið (5).

4 Þakkir

Höfundar greinarinnar vilja þakka Ragnari Stefánssyni fyrir hjálplegar athugasemdir og leiðréttingar á prentvillum í fyrri útgáfum þessa verks.

Heimildir

[1] G D. Birkhoff, *Dynamical systems* , AMS, Coll. Publ. Vol. 9, Revised edition (1966).

[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99-102.

[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339-345.

[4] V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, 2011.

[5] V.Georgiev, I.Georgieva, V.Nedyalkova, *Hreyfifræði biljarðs*, grein í þessari bók.

[6] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Setning Poncelets og lotubundnir þríhyrningar í sporbaugi*, grein í þessari bók.

[7] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)