Perimetro di triangoli armonici in ellisse

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova

1 Breve Introduzione

Continuiamo il nostro studio di alcune proprieta‘ dei triangoli periodici sui tavoli da biliardo con il seguente argomento presentato a pagina 170 in [1]:

”Poi si chiede il triangolo di lunghezza massima inscritto in uno C(C é una curva nel piano). Evidentemente almeno un triangolo tale esistera‘, e non puó avere lato di lunghezza 0. In ciascuna delle sue vertici la tangente ovviamente fanno angoli uguali con i due lati passante per il vertice. Quindi un triangolo armonico si trova. Inoltre, se cerchiamo di variare questo triangolo continuamente, non cambiando l’ordine dei suoi vertici e diminuendo il perimetro il meno possibile, in modo da avanzare il infine vertici ciclicamente, si scopre un secondo triangolo armonico.”

2 Esempi espliciti di concreti triangoli armonici

Come un semplice caso abbiamo scelto l’ellisse

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

sia $A_0 \in e$ un punto sul’asse y, i.e. $A_0(0, b)$ (vedi la Figura 1).

Usando la costruzione suggerito da Birkhoff ([1]) uno trova $\triangle\ A_0A_1A_2$ con perimetro massimale iscritto in e.

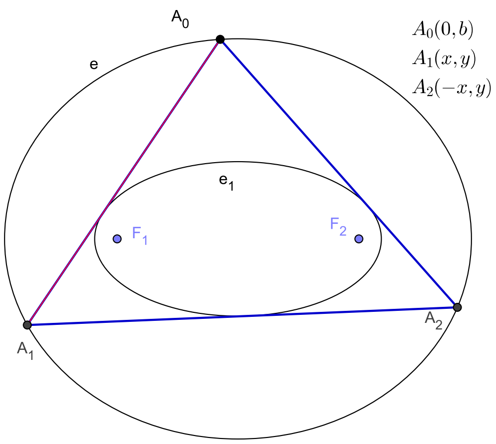

Figure 1: Triangolo armonico associato al punto $A_0(0, b)$.

In [5] abbiamo trovato espressioni esplicite per le coordinate dei punti $A_1(x, y), A_2(-x, y)$.

Ricordando l’affermazione del Teorema 1 in [5], si vede che se $\triangle\ A_0A_1A_2$ e‘ periodico, allora il suo caustica é un ellisse confocale, diciamo

$$e_1: \ \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{2}$$

L’equazione (6) mostra ora che la condizione e e e_1 sono confocale, vale a dire avere le stesse fochi F_1 e F_2 si esprime come segue

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2. \tag{3}$$

Supponendo che e_1 é dentro e abbiamo

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0, a > a_1, b > b_1.$$

Ricordandiamo alcuni dei risultati in [5].

Lemma 1. *(see [5]) Data l'ellipse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ si puó esprimere la condizione necessaria e sufficiente tale che la linea $y = kx + b$ attraverso il punto $A_0(0, b)$ é tangente a e_1 come segue*

$$k = \pm\frac{b_2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Lemma 2. *(see [5]) Data l'ellipse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(0, b)$ sia t_1, t_2 la linea tangente da A_0 a e_1 e se A_1, A_2 siano i putni d'intersezione delle linee tangente con l'ellisse $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, tale che $A_1(x, y), x < 0$, $A_2(-x, y)$. Allora abbiamo*

$$x = \frac{2a^2 a_1 b\sqrt{b^2 - b_1^2}}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$

$$y = -M, \quad M = \frac{a^2 b(b^2 - b_1^2)}{a_1^2 b^2 + a^2(b^2 - b_1^2)} = \frac{b(b^2 - a^2k^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

La relazione $M = b_1$ significa che possiamo trovare a_1, b_1 tenendo conte che e e e_1 siano confocali.

Lemma 3. *Data l'ellisse $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ e il punto $A_0(0, b)$ sia $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ sono i pinti determinati nel Lemma 2. Allora A_1A_2 é tangenta a e_1 se e solo se*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Proof. La relazione $M = b_1$ e equivalente a

$$\frac{b(b^2 - a^2k^2}{b^2 + a^2k^2} = b^1.$$

Quesot implica

$$b^2(b - b_1) - a^2k^2(b + b_1)$$

allora usando il Lemma 1 si ottirnr

$$b^2(b - b_1) - \frac{a^2(b - b_1)(b + b_1)^2}{a_1^2} = 0.$$

Usando $b \neq b_1$ otteniamo

$$b^2 - \frac{a^2(b + b_1)^2}{a_1^2} = 0$$

o

$$a_1^2 b^2 = a^2(b + b_1)^2$$

e questo implica

$$a_1 b = a(b + b_1).$$

Questa relazione e il fatto che e, e_1 sono confocali implica

$$\begin{cases} a_1 b = a(b + b_1), \\ a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2. \end{cases} \tag{4}$$

Il sistema ha unica soluzione $a_1 > 0, b_1 > 0$ determinata come segue

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

Questo complete la dimostrazione □

Si puo definire la quantitá

$$s = \frac{b}{a} \in (0, 1). \tag{5}$$

Abbiamo la seguente formula di rappresentazione di a_1, b_1

$$a_1 = a\frac{(\sqrt{1 - s^2 + s^4} - s^2)}{1 - s^2},$$

$$b_1 = b\frac{(1 - \sqrt{1 - s^2 + s^4})}{1 - s^2}.$$

Uno puo scegliere A_0 prendendo $A_0(a, 0)$ (vedi la Figura 2).

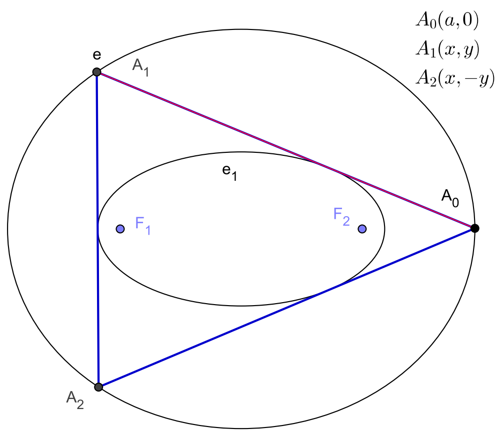

Figure 2: Triangolo armonico con $A_0(a, 0)$.

Exercise 1. *Data l'ellipse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *si puó esprimere la condizione necessaria e sufficiente tale che la linea* $y = kx - ka$ *attraverso il punto* $A_0(a, 0)$ *é tangente a* e_1 *come segue*

$$k = \pm\frac{b_2 - b_1^2}{a_1^2}.$$

Exercise 2. *Data l'ellisse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *e il punto* $A_0(a, 0)$ *sia* t_1, t_2 *le linee tangenti da* A_0 *a* e_1 *e* A_1, A_2 *siano i punti di intersezione di queste linee tangenti con l'ellisse* $e : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, *tale che* $A_1(x, y), x < 0$, $A_2(x, -y)$. *Allora abbiamo*

$$x = -\frac{2a(k^2 - b^2)}{b^2 + a^2k^2},$$
$$y = \frac{2ab_2k}{b^2 + a^2k^2}.$$

Usando la dimosttrazione del Lemma 3 si puo risolvere ils eguente esercizio.

Exercise 3. *Data l'ellisse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *e il punto* $A_0(0, b)$ *sia* $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ *sono i punti determinati del Lemma 2. Allora* A_1A_2 *é tangente al* e_1 *se e solo se*

$$a_1 = \frac{a(\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} - b^2)}{a^2 - b^2},$$
$$b_1 = \frac{b(a^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{a^2 - b^2}.$$

3 Perimetro di triangoli armonici cnreti

Nel cao semplicissimo di una ellisse

$$e : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

e un punto $A_0 \in e$ sul asse y noi abbiamo formule esplicite per $A_1(x, y), A_2(-x, y)$

$$x = -\frac{2bka^2}{b^2 + a^2k^2},$$
$$y = -M, \quad M = \frac{b(b^2 - a^2k^2}{b^2 + a^2k^2},$$

trovati nel Lemma 2.Il perimetro del triangolo $\triangle\ A_0A_1A_2$ é

$$P_1 = 2\sqrt{x^2 + (y - b)^2} + 2|x| =$$
$$= \frac{4a^2b|k|\sqrt{k^2 + 1}}{b^2 + a^2k^2} + \frac{4b|k|a^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

Lemma 1 si puo usare per trovare P_1 e dimostrare il seguente.

Lemma 4. *Data l'ellipse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *e il punto* $A_0(0, b)$ *sia* $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ *sono i punti determinati nel Lemma 2. Allora il perimetro* P_1 *del triangolo* $\triangle\ A_0A_1A_2$ *é*

$$P_1 = \frac{4a^2b(a + a_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b^2a_1^2 + a^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Movendo il punto A_0 tale che $A_0(a, 0)$ si puo arrivare al seguente.

Lemma 5. *Data l'ellipse* $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ *e il punto* $A_0(a, 0)$ *sia* $A_1(x_1, y_1), x_1 < 0$, $A_2(x_2, y_2), x_2 > 0$ *sono i punti determinati nel Exercizio 2. Alora il perimetro* P_2 *del tirnagolo* $\triangle\ A_0A_1A_2$ *é*

$$P_2 = \frac{4ab^2(b + b_1)\sqrt{a^2 - a_1^2}}{b_1^2a^2 + b^2(a^2 - a_1^2)}.$$

Exercise 4. *Verificare che* $S_1 = S_2$.

Soggerimento. Usare (5).

References

[1] G D. Birkhoff, *Dynamical systems* , AMS, Coll. Publ. Vol. 9, Revised edition (1966).

[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99102.

[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339345.

[4] V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, 2011.

[5] V.Georgiev, I.Georgieva, V.Nedyalkova, *Dynamical billiards*, article in this book.

[6] V.Georgiev, V.Nedyalkova, *Poncelet's porism and periodic triangles in ellipse*, article in this book.

[7] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)