

Geta jöfnur verið spennandi?

Neli Dimitrova

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences

Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Inngangur

Nú til dags má sjá tölvugerð brotamynstur hvarvetna, frá krúsidúlluhönnun á tölvulistarplakötum að skýringarmyndum í alvarlegum vísindatímaritum. Áhugi á brotamyndum heldur áfram að aukast hjá vísindamönnum og, sem kemur að vissu leyti á óvart, hjá listamönnum og hönnuðum. Þessi grein gefur sjónræna sýnikennslu á hinum flóknu og fallegu myndum sem geta komið fyrir sem lausnir á jöfnum, jafnvel af einföldum jöfnum.

Brotamyndir eru rúmfræðilegir hlutir sem eru venjulega afleiðing ítrekunar- eða rakningarferils eða algríms, þ.e. þær eru ekki kyrrstæðar myndir heldur eru þær búnar til með kviku ferli. Hugsadu um öll fallegu formin sem koma fram í náttúrunni - hjá plöntum vegna vaxtar þeirra; í fjöllum sem afleiðing fyrri jarðskorpuhreyfinga auk veðrunar. Það er ekki hægt að lýsa brotamyndum með algebruformúlum eins og t.d. einhverri flatarmynd í Evklíðskri rúmfræði.

Það er ekki erfitt að sjá fyrir sér að ef kerfi er lýst með flóknum stærðfræðijöfnum þá er möguleiki á því að lausnin verði flókin og ófyrirsjáanleg. Það sem hefur komið flestum vísindamönnum á óvart er að jafnvel einföld kerfi, sem lýst er með einföldum jöfnum, geta haft „skrýtnar“ lausnir. Frægasta dæmið er jafnan sem notuð er til þess að líkja eftir tímaþróun einnar tegundar og er þekkt sem „*logistic vörpun*“. Meira efni um lausnir logistic vörpunarinnar má finna í [1].

Hér munum við taka fyrir kerfi tveggja strjálra ólínulegra jafna sem eru einnig þekktar sem rakningarjöfnur (mismunajöfnur) eða ítrekuð vörpun. Slík kerfi koma upp í t.d. vistfræðilegu líkani af rándýri og bráð. Tvö slík klassísk Lotka-Volterra líkön eru sýnd í undirkafla 2 og notuð til þess að útskýra hugmyndina bakvið slík kerfi á takmörkuðum og stöðugum lausnum (sem kallast ferlar). Dæmi um almennar annars stigs, þriðja stigs og aðrar ítrekaðar varpanir eru svo sýndar í undirköflum 3,4 og 5. Eins og sjá má af myndunum þar eru lausnirnar allt öðruvísi en þær sem sýndar voru í undirkafla 2; ferlarnir (takmarkaðir en óstöðugir) lýsa hlutum í sléttunni sem má einfaldlega bera saman við listaverk! Ef þú vilt læra meira um eiginleika slíkra lausna á ítrekuðum vörpunum getur þú lesið undirkafla 6. Myndirnar í greininni voru fengnar með forritinu *Maple 13*. Einfaldar Maple skipanir sem kölluðu fram hluta af myndunum eru gefnar í viðaukanum.

2 Strjál líkön fyrir rándýr og bráð

Við skoðum strjált líkan fyrir rándýr og bráð þar sem önnur tegundin veiðir hina. Dæmi úr náttúrunni eru meðal annars hákarlar og fiskar, gaupur og hérar, maríubjöllur og blaðlís, úlfar og kanínur. Mjög einfalt líkan, þekkt sem Lotka-Volterra líkanið [2], er eftirfarandi:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n(1 + p_1 - p_2x_n - p_3y_n) \\ y_{n+1} &= y_n(1 - q_1 + q_2x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

Hér eru p_1, p_2, p_3, q_1 og q_2 fastar stærri eða jafnir núlli; x_n og y_n tákna stofnstærð bráðar og rándýrs við tíma n . Líðirnir hægra megin í jöfnunum hafa eftirfarandi líffræðilegu merkingu:

- $(1 + p_1)x_n - p_2x_n^2$ táknar „logistic vöxt“ hjá stofni bráðarinnar ef engin rándýr eru til staðar;

- $p_3x_ny_n$ og $q_2c_ny_n$ tákna ríxlverkun tegundanna: stofn bráðarinnar bíður tjón af ríxlverkuninni en stofn rándýranna nýtur góðs af henni;
- $(1 - q_1)y_n$ tákna útrýmingu rándýra ef bráðin er ekki til staðar.

Það eru þrjár tiltekna útkomur sem sjást oft í raunveruleikanum. Fyrsta tilfallið er sambúð lífvera, þá lifa tegundirnar í jafnvægi við hvor aðra. Í náttúrunni þá er þetta líklegasta útkoman. Í öðru tilfallinu deyr önnur tegundin út og í því þriðja deyrja báðar tegundirnar út.

Ef við þekkjum gildi við tímann $n = 0$, t.d. (x_0, y_0) , getum við reiknað með (1) óendanlega runu af punktum í (x, y) -planinu

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), \dots \quad (2)$$

Runan lýsir þróun stofnanna er líður á tímann og er kölluð *ferill* (x_0, y_0) ; (x_0, y_0) er kallaður *upphafspunktur* eða *upphafsskilyrði*. Augljóslega eru gildi í rununni háð valinu á (x_0, y_0) auk gildanna á föstum p_1, p_2, p_3, q_1 og q_2 . Aðalspurningin er því: að gefnum einhverjum upphafspunkti (x_0, y_0) hvað getum við sagt um hegðun ferils (2) fyrir nægjanlega stórt n ? Mynd 1a sýnir þrjá ferla með

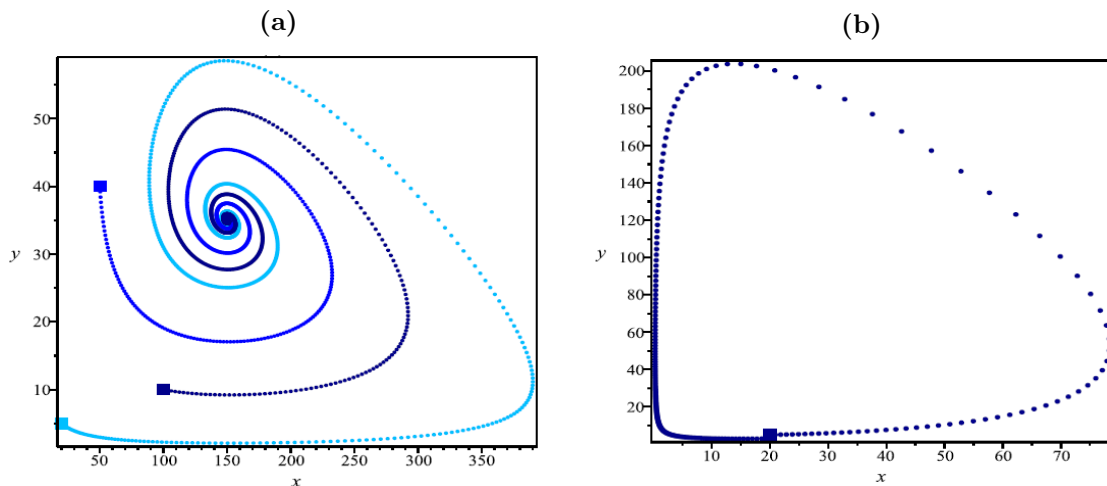
$$p_1 = 0.05, p_2 = 0.0001, p_3 = 0.001, q_1 = 0.03, q_2 = 0.0002 \quad (3)$$

fyrir þrjú mismunandi upphafsskilyrði; $(x_0, y_0) = (20, 5)$, $(x_0, y_0) = (100, 10)$ og $(x_0, y_0) = (50, 40)$, táknað með fylltum ferningum á myndinni. Eins og sést, þegar n er stækkað nálgast ferlarnir ákveðinn punkt í planinu og halda sig í grennd við hann. Slíkur punktur kallast *stöðug sístaða* eða *aðdráttarpunktur*. Þú getur fundið hann með því að setja inn í (1) $x_{n+1} = x_n = x, y_{n+1} = y_n = y$ og leysa svo ólínulega kerfið sem þú færð fyrir x og y . Þú munt fá þrjár mismunandi lausnir $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_0, y_0) = (500, 0)$ og $(x_0, y_0) = (150, 35)$. Þriðju punkturinn $(150, 35)$ er aðdráttarpunkturinn sem sýndur er á mynd 1a. Hinar tvær sístöðurnar er sagðar vera *óstöðugar* vegna þess að ferlar upphafspunkta, jafnvel mjög nálægt þeim, fara í burtu frá þeim er n stækkar.

Settu nú $p_2 = 0$ inn í líkanið (1); þannig getur þú breytt vaxtarhraðanum í stofni bráðarinnar. Kerfið verður:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n(1 + p_1 - p_3y_n) \\ y_{n+1} &= y_n(1 - q_1 + q_2x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Mynd 1b sýnir einn feril með sömu gildi á p_1, p_3, q_1 og q_2 úr (2) og með upphafsskilyrðið $(x_0, y_0) = (20, 5)$, táknað með fylltum kassa. Við sjáum nú allt aðra mynd: stærð stofnanna sveiflast til og myndar *stöðuga hringrás*. Hvernig má túlka slíkt kerfi (4) í tengslum við hegðun tegundanna? Ef það eru hlutfallslega mörg rándýr miðað við fjölda bráðar, þá minnkar stofn rándýranna. Þegar hlutfall rándýra og bráða minnkar þá stækkar stofn bráðarinnar. Ef það er nægjanlegur fjöldi bráða eykst fjöldi rándýra. Hringrásarhegðunin sem myndast er því endurtekin í sífellu.



Mynd 1: Ferlar: (a) af líkani (1); (b) af líkani (4)

Ferlarnir í dæmunum tveimur hér að ofan hafa sameiginlegan eiginleika: Þau eru öll *takmörkuð* vegna þess að til eru ferhyrningar í (x, y) -sléttunni (sjá mynd 1) sem innihalda alla punkta $(x_n, y_n), n = 1, 2, \dots$ fyrir hvaða upphafsskilyrði (x_0, y_0) sem er innan þessara ferhyrninga. Í kerfunum tveimur er annað hvort til aðdráttarpunktur sem dregur alla ferla að sér eða ferillinn myndar stöðuga hringrás. Í báðum tilfellunum segjum við að ferillinn er stöðugur.

Jöfnurnar í (1) og (4) kallast *strjál útrekuð kerfi* eða *útrekuð vörpun* vegna þess að næstu gildi x - og y -stakanna er fengin einungis af fyrra gildi þeirra. Í næsta undirkafla munum við taka fyrir almennari tilfelli ítrekaðra varpana sem hafa ferla sem eru takmarkaðir en *óstöðugir*: slíkur ferill fer aldrei út í óendanleikann en mun hinsvegar aldrei **koma sér fyrir** að punkti eða að hring. Upphafsgildin dragast að sérstakri gerð aðdráttarpunkts sem nefnist *skrytinn* eða *óreiðu* aðdráttarpunktur, sem er hvorki punktur né endanlegt safn punkta, heldur er það frekar flókinn rúmfræðilegur hlutur sem nefnist brotamynd.

3 Ítrekuð annars stigs vörpun

Ítrekuðu varpanirnar (1) og (4) hafa liði á forminu x_n^2 og $x_n y_n$ sem efsta stigs liði, svo um er að ræða annars stigs varpanir. Almenn form annars stigs vörpunar er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n y_n + a_5 y_n + a_6 y_n^2 \\ y_{n+1} &= b_1 + b_2 x_n + b_3 x_n^2 + b_4 x_n y_n + b_5 y_n + b_6 y_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Til dæmis höfðum við í vörpun (1)

$$a_1 = 0, a_2 = 1 + p_1, a_3 = -p_2, a_4 = -p_3, a_5 = a_6 = 0; b_1 = b_2 = b_3 = 0, b_4 = q_2, b_5 = 1 - q_1, b_6 = 0.$$

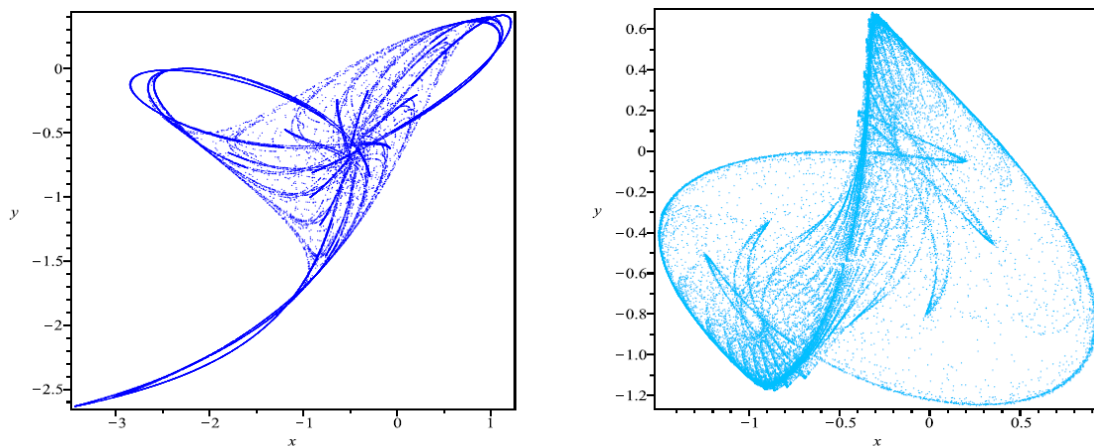
Táknaðu með $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ og með $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ vigra stuðlanna í annars stigs ítrekunar kerfinu (5). Tafla 1 inniheldur sex töluleg dæmi fyrir a og b . Upphafspunkturinn í öllum dæmunum er valinn sem $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Tafla 1: Dæmi um annars stigs varpanir með ringlaða aðdráttarpunkta

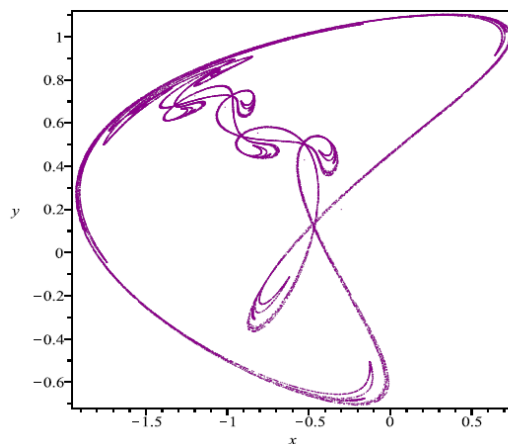
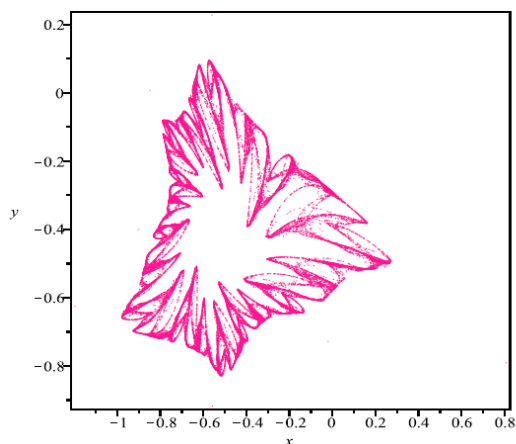
Dæmi	Stuðlar vigra a og b	Mynd
1	$a = (-1.2, -0.6, -0.5, 0.1, -0.7, 0.2)$ $b = (-0.9, 0.9, 0.1, -0.3, -1, 0.3)$	2(vinstri)
2	$a = (-1.1, -1, 0.4, -1.2, -0.7, 0)$ $b = (-0.7, 0.9, 0.3, 1.1, -0.2, 0.4)$	2(hægri)
3	$a = (-0.9, 0.6, 1.2, 0.8, -0.8, -1)$ $b = (-0.4, 0.1, -0.6, 0.4, 0.1, 0.9)$	3(vinstri)
4	$a = (-0.3, 0.7, 0.7, 0.6, 0, -1.1)$ $b = (0.2, -0.6, -0.1, -0.1, 0.4, -0.7)$	3(hægri)
5	$a = (0.2, 0.8, -0.6, -0.7, -0.3, -0.2)$ $b = (-0.9, -0.5, 0.6, -1.2, -0.3, 0.8)$	4(vinstri)
6	$a = (0.7, 0.6, -0.4, -0.1, 0.8, 0.1)$ $b = (-0.9, 0.4, 0.6, -0.4, -0.7, -1.2)$	4(hægri)

Njóttu nú heillandi forms óreiðuaðdráttarpunkta þessara varpana á myndum 2 til 4.

Reikningarnir og myndrænu niðurstöðurnar eru gerðar í forritinu *Maple 13*. *Maple* skipanirnar sem bjuggu til vinstri myndina á mynd 2 eru gefnar í viðaukanum. Taktu eftir gildi fastans *iterations* (ítrekanir) sem er jafnt 35000! Gildið samsvarar tölunni n í punktunum í (2) sem eru notaðir til þess að búa til myndina. Nokkur dæmanna í töflu 1 þarfnast frekari ítreakana - u.þ.b. 50000! Heldur þú að þú gætir endurgert myndina með reikningum í höndunum? Það væri ekki hægt að sjá lausnarmyndirnar í allri sinni dýrð án tölva og tölvutækni og er þetta ein af stærstu framlögum 21. aldarinnar.



Mynd 2: Óreiðuaðdráttarpunktar annars stigs varpana: Dæmi 1 og 2



Mynd 3: Óreiðuaðdráttarpunktar annars stigs varpana: Dæmi 3 og 4

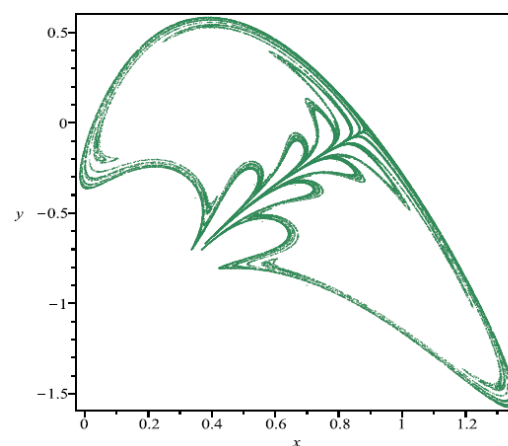
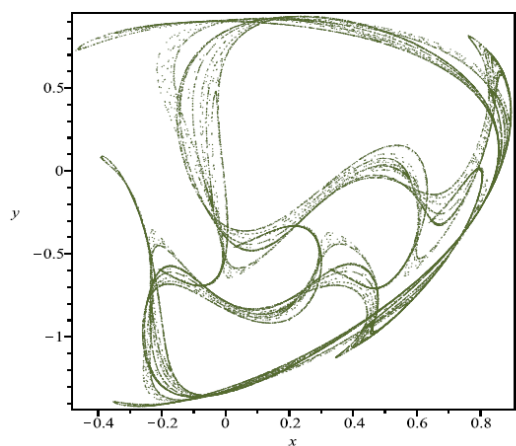
Verkefni 1. Sýndu myndrænt óreiðuaðdráttarpunkta hinnar vel þekktu Hénon vörpunar [2], sem var sett af fram af franska stjörnufræðingnum Michel Hénon árið 1976:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + cx_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= dx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Með upphafsskilyrði $(x_0, y_0) = (0, 0)$ og stuðla: (i) $c = -1.2, d = 0.4$; (ii) $c = -1.4, d = 0.3$.

Verkefni 2. Sýndu myndrænt óreiðuaðdráttarpunkta eftirfarandi annars stigs varpana með upphafsskilyrði $(x_0, y_0) = (0, 0)$ og stuðlavigna

$$\begin{aligned}(i) \quad a &= (0.8, -0.8, -1.1, -0.3, -0.1, -1), & b &= (-0.9, -0.4, 0.6, -0.4, -0.4, 0.4); \\(ii) \quad a &= (1.3, 0.3, 0, 0.6, -0.6, -1), & b &= (0.1, -0.7, 0.5, -0.8, 0.1, -0.6).\end{aligned}$$



Mynd 4: Óreiðuaðdráttarpunktar annars stigs varpana: Dæmi 5 og 6

4 Ítrekaðar þriðja stigs varpanir

Ef við bætum við annars stigs vörpunina (5) liðum af þriðja stigi eins og $x_n^3, x_n^2 y_n, x_n y_n^2, y_n^3$ fáum við þriðja stigs vörpun. Almenn form þriðja stigs vörpunarinnar er

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n^3 + a_5 x_n^2 y_n + a_6 x_n y_n + a_7 x_n y_n^2 + a_8 y_n + a_9 y_n^2 + a_{10} y_n^3 \\y_{n+1} &= b_1 + b_2 x_n + b_3 x_n^2 + b_4 x_n^3 + b_5 x_n^2 y_n + b_6 x_n y_n + b_7 x_n y_n^2 + b_8 y_n + b_9 y_n^2 + b_{10} y_n^3 \\n &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (6)$$

Táknaðu með $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ og með $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10})$ vigra stuðlanna í þriðja stigs ítrekunar kerfinu (6). Tafla 2 inniheldur fjögur töluleg dæmi [4] af þriðja stigs vörpunum með ringlaða aðdráttarpunkta. Myndirnar af ringluðu aðdráttarpunktunum eru sýndar á myndum 5 og 6. Gætið ykkur hafa dottið í hug að svo einfaldar jöfnur gætu myndað svona fallegar lausnir?

Tafla 2: Dæmi um þriðja stigs varpanir með óreiðuaðdráttarpunktum

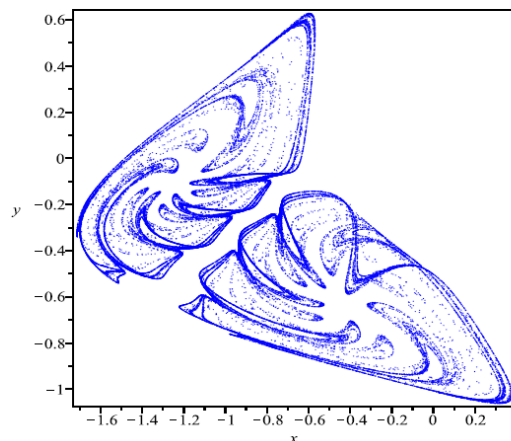
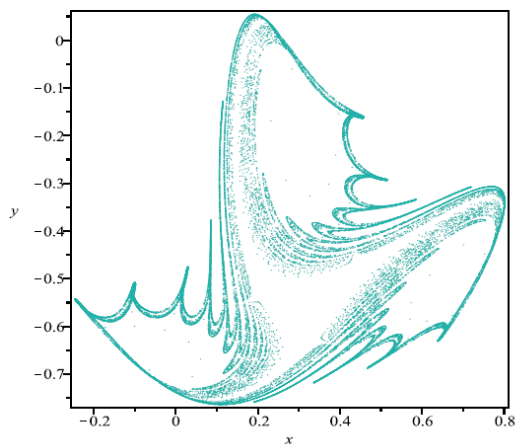
Dæmi	Stuðlar vigra a og b	Mynd
7	$a = (-1.0, -0.6, 0.5, 0.2, -0.2, -0.3, -0.7, -0.8, -0.1, -0.9)$ $b = (-0.6, -0.2, 1.1, 0.6, 0.8, -0.8, -0.8, 1, 1.2, -0.8)$	5(vinstri)
8	$a = (-0.4, 0.6, 0, -0.5, 0.4, -1, -0.5, 0.3, -0.9, -0.7)$ $b = (-0.2, -0.7, -1.1, -0.2, -0.8, -1.2, -0.1, -0.4, -0.7, -0.9)$	5(hægri)
9	$a = (0, -0.6, -0.6, 0.1, -0.9, 0.3, -0.5, 1, 0.2, 0.1)$ $b = (-0.2, -0.7, 0.4, 0.8, -0.4, -0.4, -0.5, -1.1, 0.9, 0.3)$	6(vinstri)
10	$a = (0.2, -0.9, -0.7, -0.2, 1, -0.2, -0.8, -0.4, -1.1, 0.3)$ $b = (-0.6, 0.1, 1.2, 0.3, 0.9, -0.2, 1, -1, 1.2, 0.8)$	6(hægri)

Maple skipanirnar sem framkalla myndina á mynd 5 (vinstri) eru gefnar í viðaukanum. Í dæmum 7 til 10 eru upphafsskilyrðin valin sem $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

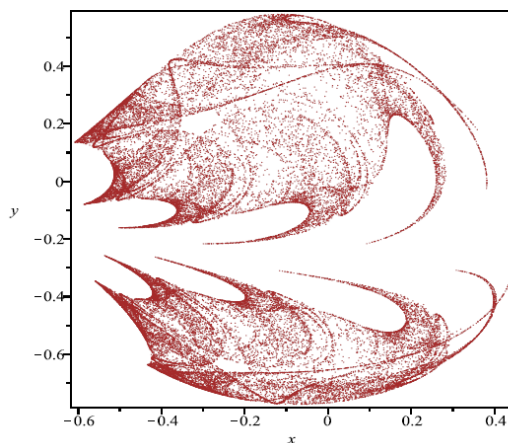
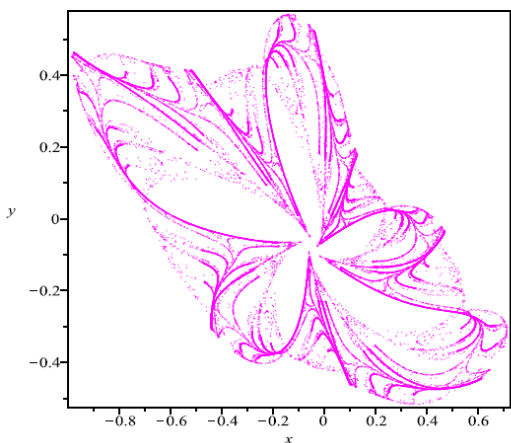
Það er vert að nefna að fyrir óreiðuaðdráttarpunkta skiptir upphafspunkturinn engu máli, þ.e. öll upphafsskilyrði (x_0, y_0) leiða til sömu myndarinnar (sannreynið það!). Með öðrum orðum, hvaða upphafspunktur sem er mun framkalla sama mengi af punktum þrátt fyrir að punktarnir komi fram í annarri röð.

Verkefni 3. Búðu til mynd af óreiðuaðdráttarpunkti fyrir þriðja stigs vörpun með stuðla-vigra

$$\begin{aligned}a &= (-0.3, 1.2, -1, -1.1, 0, 0.1, -0.7, 0.1, 1.2, 0.2) \\b &= (-0.8, 0.3, 1.2, 0.8, -0.6, -0.5, -0.5, -0.8, 0.6, 0.8).\end{aligned}$$



Mynd 5: Óreiðuaðdráttarpunktar þriðja stigs varpana: Dæmi 7 og 8



Mynd 6: Óreiðuaðdráttarpunktar þriðja stigs varpana: Dæmi 9 og 10

Verkefni 4. Skrifðu niður almennt form á fjórða stigs ítrekunarvörpun. Breyttu *Maple* - skipuninum þannig að þær sýni óreiðuadráttarpunkt af fjórða stigs vörpun með stuðlavígra

$$a = (-0.4, -0.9, -0.4, -0.9, 0.6, -1.1, 0.7, 0.3, 0.1, -0.9, -1.1, 0.6, -0.6, 0.2, -0.2)$$

$$b = (0.2, -0.2, -0.6, -1.2, -0.2, 0, -1, -1, -0.9, 0.1, 1.1, -0.7, -0.5, 1, 0.4).$$

5 Aðrar áhugaverðar ítrekunarvarpanir

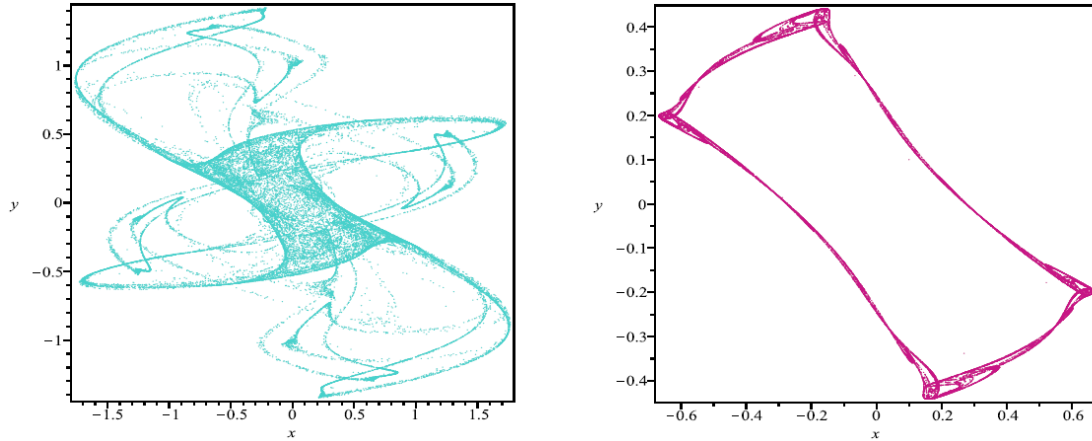
Í síðustu tveimur undirköflum tókum við fyrir ítrekunarvarpanir af margliðum, þ.e. hægri hliðar (5) og (6) voru margliður af öðru og þriðja stigi með tvær breytistærðir. Í stað margliða getum við tekið fyrir ítrekaðar varpanir þar sem fyrir koma önnur ólínuleg föll svo sem hornaföll, algildi, ferningsrót, formerkisfallið o.s.frv. - öll þau föll sem eru venjulega studd af hvaða forritunarumhverfi sem er. Hér að neðan sýnum við tvö slík dæmi.

Draumur Konungsins. Einföld en falleg brotamynd [7]. Jöfnurnar til að búa hana til eru

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sin by_n + c \sin bx_n \\ y_{n+1} &= \sin ax_n + d \sin ay_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

með upphafsskilyrði $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ og $a = -0.966918$, $b = 2.879879$, $c = 0.765145$, $d = 0.7447228$. Brotamyndin er sýnd á mynd 7 (vinstri).

Ef við breytum gildunum á b, c og d , með því að setja $b := b + 0.1$, $c := c + 0.01$, $d := +0.1$, þá fáum við nýja brotamynd sem sýnd er á mynd 7 (hægri).



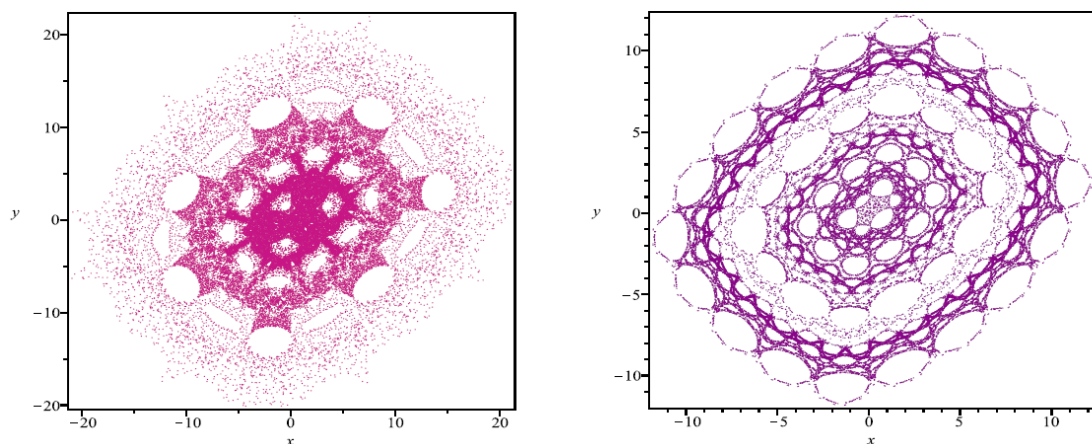
Mynd 7: Draumur konungsins (vinstri) og ummyndun hans (hægri)

Verkefni 5. Búðu til aðra brotamynd með því að nota (7) með stuðla $a = -0.967$, $b = 2.89$, $c = 0.769$, $d = 0.785$ og upphafsskilyrði $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$.

Barry Martin brotamynd. Hún er mynduð með eftirfarandi strjálu ítrekunarkerfi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - \text{sign}(x_n) \sqrt{|bx_n - c|} \\ y_{n+1} &= a - x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 = y_0 = 0.1 \end{aligned}$$

Þrjú sérstök föll eru notuð í fyrstu jöfnunni: ferningsrót, algildisfallið og formerkisfallið sign . Formerkisfallið gefur gildið 1 ef x_n -gildið er jákvætt og gildið -1 ef x_n -gildið er neikvætt. Fastarnir a, b og c geta tekið hvaða gildi sem er. Brotamyndirnar sýndar á mynd 8 eru gerðar með $a = 1, b = 2, c = 3$ (vinstra graf) og með $a = 0.4, b = 1, c = 0.1$ (hæggra graf).



Mynd 8: Barry Martin óreiðuaðdráttarpunktur

Verkefni 6. Búðu til Barry Martin brotamyndir með upphafsskilyrði $x_0 = y_0 = 0.1$ og stuðla

- (i) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2;$
- (ii) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1;$
- (iii) $a = 0.2, \quad b = -0.1, \quad c = 0.2;$

6 Ef þú vilt læra meira...

Klassískar brotamyndir svo sem Koch ferillinn, Sierpinski þríhyrningurinn eða sexhyrningurinn (sjá [3], [5], [6], [8] fyrir ítarlegri lýsingar) eru hlutir sem fela í sér sjálfsvip undir þysjun inn og þá má smíða með því að nota einfalt mynstur (mynd sem er endurtekin á sífellt minni mælikvörðum). Margir hlutir í náttúrunni sýna af sér slíka sjálfsvipi í mismunandi mælikvörðum; til dæmis blómkál, burknar, tré og jafnvel æðakerfin í okkar eigin líkama hafa að einhverju leiti brotamyndauppbyggingu. Brotamyndir komu einnig fram í myndlist, til dæmis í málverkum Hollenska listamannsins *Maurits C. Escher*[9], áður en þær voru almennt metnar af stærðfræðingum og vísindamönnum. Brotamyndum er beitt í mörgum vísindagreinum, t.d. í tölvuteiknun og myndþjöppun (skoðuðu nánar myndir á netinu).

Brotamyndirnar sem sýndar voru á myndunum í hinum undirköflunum sýna ekki endilega sjálfsvip; þær hafa einungis svæði sem eru sjálfsvipa. Eru til slíkir hlutir í raunveruleikanum?

Aðalatriðið í skilgreiningunni á brotamynd er *vídd* þess. Einangraðir punktar hafa víddina núll, línustrik hafa víddina einn, yfirborð hafa víddina tveir, og rúmmyndir hafa víddina þrjár. Þetta er þeirra „venjulega“ eða svokallaða *grenndarvídd*. Brotamynd hefur vídd sem fer út fyrir mengi grenndarvíddar sinnar. Í flestum tilfellum hafa brotamyndir *brotavídd* sem er ekki heiltala. Brotavíddirnar gefa ítarlegri upplýsingar um grófleika eða flækjustig mengisins. Það eru hins vegar til brotamyndir með heiltöluvídd; í slíku tilfelli þarf þó brotavíddin að vera stærri en grenndarvíddin. Til dæmis þá hefur Sierpinski fjórflötungnum (pýramídi með fjóra þríhyrningslaga hliðarfleti) brotavíddina tveir en grenndarvíddina einn [3].

Einkenni óreiðuadráttarpunkta að maður veit ekki nákvæmlega hvar á aðdráttarpunktinum ferill kerfisins muni vera. Tveir punktar á aðdráttarpunktinum sem eru nálægt hvor öðrum á einu tímabili geta verið í hvaða fjarlægð sem er frá hvor öðrum á seinna tímabili. Eina takmörkunin er að ástand kerfisins helst á aðdráttarpunktinum. Ennfremur endurtekur hreyfingin sig aldrei - það er engin hringrás. Hreyfing þessara óreiðuadráttarpunkta er kölluð *óreiðuhegðun kerfisins*.

Ímyndið ykkur mengi upphafspunkta sem fylla lítið ferningslaga svæði á (x, y) -sléttunni. Eftir eina ítrekun munu punktarnir hafa færst á nýjar staðsetningar á sléttunni og eru nú innan í t.d. „flöngu“ svæði eins og samsíðungi. Ferningurinn hefur þjappast í aðra áttina og teygst í hina. Eftir hverja ítrekun verður samsíðungurinn lengri og mjórri. Áttun samsíðungsins breytist einnig með hverri ítrekun. Magnbundnu túlkanirnar á þessum áhrifum eru gefnar með hinum svokölluðu *Lyapunov veldisvísunum*. Nafnið er dregið af rússneska stærðfræðingnum Aleksandr M. Lyapunov sem var uppi á seinni hluta 19. aldar. Ítrekuð vörpun sem lýst er með tveimur jöfnum, eins og annars og þriðja stigs varpana, hefur tvo Lyapunov veldisvísa - einn jákvæðan sem samsvarar stefnu lengingarinnar og annan neikvæðan sem samsvarar stefnu þjöppunarinnar. Það er dæmigert fyrir óreiðu að minnsta kosti einn af Lyapunov veldisvísunum sé jákvæður. Við munum ekki ræða hér um aðferðina til að finna út Lyapunov veldisvísinn þar sem hún er frekar flókin. *Maple* skipanirnar til þess að reikna út Lyapunov veldisvísana í dæmum 1 og 7 eru gefnar í viðaukanum. Tafla 3 inniheldur Lyapunov veldisvísana L_1 og L_2 úr annars og þriðja stigs vörpununum úr dæmum 1 til 10.

Það eru nánin vensl milli brotavíddarinnar og Lyapunov veldisvísanna. Gerum ráð fyrir að L_1, L_2 séu þekktir og að $L_1 > 0, L_2 < 0$ og að $|L_1| < |L_2|$. Þá má reikna brotavíddina FD með

formúlunni

$$FD = 1 - \frac{L_1}{L_2} \quad (8)$$

Gildið FD er nefnt Lyapunov viddin og einnig Kaplan-Yorke viddin eftir nöfnum stærðfræðinganna sem settu fram reglu (8). Sá sem vill lesa sér meira til um þetta viðfangsefni getur kíkt í bækurnar [2], [3] og [4]. Brotaviddir óreiðuaðdráttarpunktanna úr dæmum 1 til 10 eru gefnar í töflu 3, dálki FD .

Tafla 3: Lyapunov veldisvísar og brotaviddir FD varpananna í Töflum 1 og 2

Dæmi	L_1	L_2	FD	Mynd
1	0.18	-0.45	1.4	2(vinstri)
2	0.093	-0.099	1.94	2(hægri)
3	0.029	-0.032	1.91	3(vinstri)
4	0.16	-0.32	1.5	3(hægri)
5	0.18	-0.37	1.48	4(vinstri)
6	0.13	-0.24	1.54	4(hægri)
7	0.11	-0.19	1.58	5(vinstri)
8	0.095	-0.16	1.59	5(hægri)
9	0.049	-0.11	1.45	6(vinstri)
10	0.043	-0.058	1.74	6(hægri)

Ljúkum nú þessari grein með orðum Barnsley [10]: „Brotarúmfræði mun láta þig sjá heiminn með öðrum augum. Þú munt eiga hættu á því að týna barnslegri sýn þinni á ský, skóg, vetrarbrautir, laufblöð, fjaðrir, steina, fjöll, vatnstrauma, teppi, múrsteina og fleira. Aldrei aftur mun túlkun þín á þessum hlutum verða söm.

Viðauki: Maple skipanir

Viðaukinn inniheldur *Maple* skipanir til þess að reikna og setja fram myndrænt óreiðuaðdráttarpunktinn auk Lyapunov veldisvísa og brotavíddar hans fyrir dæmi 1 úr töflu 1 og dæmi 7 úr töflu 2. Sá sem hefur áhuga getur búið til myndirnar fyrir hin dæmin einfaldlega með því að skipta út gildum á vigrunum a og b með samsvarandi tölum úr töflunum.

Maple ferlinu er haldið eins einföldu og hægt er. Vanur forritari getur þýtt forritið yfir á sitt uppáhalds forritunarumhverfi.

- Aðferð til að reikna og búa til mynd af aðdráttarpunktinum í annars stigs vörpuninni í dæmi 1

```
> restart:
> with(plots):
> iterations:=35000:
> a:=array(1..6,[-1.2, -0.6, -0.5, 0.1, -0.7, 0.2]);
> b:=array(1..6,[-0.9, 0.9, 0.1, -0.3, -1, 0.3]);
> x:=array(0..iterations):
> y:=array(0..iterations):
```

```
> x[0]:=0: y[0]:=0: #initial condition
> for i from 0 to iterations-1 do
    x[i+1]:=a[1]+a[2]*x[i]+a[3]*(x[i])^2+a[4]*x[i]*y[i]
        +a[5]*y[i]+a[6]*(y[i])^2:
    y[i+1]:=b[1]+b[2]*x[i]+b[3]*(x[i])^2+b[4]*x[i]*y[i]
        +b[5]*y[i]+b[6]*(y[i])^2
end do:
> points:=[[x[n],y[n]]$n=1..iterations]:
> pointplot(points,style=point,symbol=solidcircle,symbolsize=4,
color=blue,axes=boxed,labels=['x','y']);
```

- Aðferð til að reikna Lyapunov veldisvísa og brotavídd annars stigs vörpunarinnar í dæmi 1

```
> itermax:=500:
> a:=array(1..6,[-1.2, -0.6, -0.5, 0.1, -0.7, 0.2]);
b:=array(1..6,[-0.9, 0.9, 0.1, -0.3, -1, 0.3]);
> x:=0: y:=0:
> vector1:=<1,0>: vector2:=<0,1>:
> for i from 1 to itermax do
    x1:=a[1]+a[2]*x+a[3]*x^2+a[4]*x*y+a[5]*y+a[6]*y^2:
    y1:=b[1]+b[2]*x+b[3]*x^2+b[4]*x*y+b[5]*y+b[6]*y^2:
    x:=x1:
    y:=y1:
    J:=Matrix([[a[2]+2*a[3]*x+a[4]*y,a[4]*x+a[5]+2*a[6]*y],
        [b[2]+2*b[3]*x+b[4]*y,b[4]*x+b[5]+2*b[6]*y]]):
    vector1:=J.vector1:
    vector2:=J.vector2:
    dotprod1:=vector1.vector1:
    dotprod2:=vector1.vector2:
    vector2:=vector2 - (dotprod2/dotprod1)*vector1:
    length_vector1:=sqrt(dotprod1):
    area:=abs(vector1[1]*vector2[2] - vector1[2]*vector2[1]):
    L1:=evalf(log(length_vector1)/i):
    L2:=evalf(log(area)/i-L1)
end do:
> print('L1'=L1, 'L2'=L2); #Lyapunov exponents, L2<0<L1, |L1|<|L2|
> FD:=1 - L1/L2; #the fractal dimension
```

- Aðferð til að reikna og búa til mynd af aðdráttarpunktinum í þriðja stigs vörpuninni í dæmi 7

```
> restart:
> with(plots):
> iterations:=35000:
> a:=array(1..10,[-0.1,-0.6,0.5,0.2,-0.2,-0.3,-0.7,-0.8,-0.1,-0.9]);
    b:=array(1..10,[-0.6,-0.2,1.1,0.6,0.8,-0.8,-0.8,1,1.2,-0.8]);
> x:=array(0..iterations): y:=array(0..iterations):
> x[0]:=0: y[0]:=0: #initial conditions
> for i from 0 to iterations-1 do
    x[i+1]:=a[1]+a[2]*x[i]+a[3]*(x[i])^2+a[4]*(x[i])^3
```

```

+ a[5]*(x[i])^2*y[i]+a[6]*x[i]*y[i]+a[7]*x[i]*(y[i])^2
+ a[8]*y[i]+a[9]*(y[i])^2 + a[10]*(y[i])^3:
y[i+1]:=b[1]+b[2]*x[i]+b[3]*(x[i])^2+b[4]*(x[i])^3
+ b[5]*(x[i])^2*y[i]+b[6]*x[i]*y[i]+b[7]*x[i]*(y[i])^2
+ b[8]*y[i]+b[9]*(y[i])^2 + b[10]*(y[i])^3:
end do:
> points:=[[x[n],y[n]]$n=1..iterations]:
> pointplot(points,style=point,symbol=solidcircle,symbolsize=4,
color="LightSeaGreen",axes=boxed,labels=['x','y']);

```

- Aðferð til að reikna Lyapunov veldisvísa og brotavídd þriðja stigs vörpunarinnar í dæmi 7

```

> Digits:=30:
> x:='x': y:='y':
> itermax:=500:
> a:=array(1..10,[-0.1,-0.6,0.5,0.2,-0.2,-0.3,-0.7,-0.8,-0.1,-0.9]);
  b:=array(1..10,[-0.6,-0.2,1.1,0.6,0.8,-0.8,-0.8,1,1.2,-0.8]);
> x:=0: y:=0:
> vector1:=<1,0>: vector2:=<0,1>:
> for i from 1 to itermax do
  x1:=a[1]+a[2]*x+a[3]*x^2+a[4]*x^3+a[5]*x^2*y
  + a[6]*x*y+a[7]*x*y^2+a[8]*y+a[9]*y^2 + a[10]*y^3:
  y1:=b[1]+b[2]*x+b[3]*x^2+b[4]*x^3+b[5]*x^2*y
  + b[6]*x*y+b[7]*x*y^2+b[8]*y+b[9]*y^2 + b[10]*y^3:
  x:=x1: y:=y1:
  J:=Matrix([[a[2]+2*a[3]*x+3*a[4]*x^2+2*a[5]*x*y+a[6]*y+a[7]*y^2,
  a[5]*x^2+a[6]*x+2*a[7]*x*y+a[8]+2*a[9]*y+3*a[10]*y^2],
  [b[2]+2*b[3]*x+3*b[4]*x^2+2*b[5]*x*y+b[6]*y+b[7]*y^2,
  b[5]*x^2+b[6]*x+2*b[7]*x*y+b[8]+2*b[9]*y+3*b[10]*y^2]]):
  vector1:=J.vector1:
  vector2:=J.vector2:
  dotprod1:=vector1.vector1:
  dotprod2:=vector1.vector2:
  vector2:=vector2 - (dotprod2/dotprod1)*vector1:
  length_vector1:=sqrt(dotprod1):
  area:=abs(vector1[1]*vector2[2] - vector1[2]*vector2[1]):
  L1:=evalf(log(length_vector1)/i):
  L2:=evalf(log(area)/i-L1)
end do:
> print('L1'=L1, 'L2'=L2); #Lyapunov exponents, L2<0<L1, |L1|<|L2|
> FD:=1 - L1/L2; #the fractal dimension

```

Ítarefni

- [1] Dimitrova N. *Order and Chaos in a Model of Population Biology*, In: J. Andersen et al, MATH2EARTH: Bringing Mathematics to Earth. 141876-LLP-1-2008-1-AT-COMENIUS-CMP, Publ. PRVOKRUH, Prague, Czech Republic, 49–54 (in English), 148–154 (in Bulgarian), 2010.

- [2] Lynch S. *Dynamical Systems with Applications Using Maple™*, Birkhäuser, Boston, 2010.
- [3] Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. *Fractals for the Classroom. Part One: Introduction to Fractals and Chaos*, Springer, New York, 1992.
- [4] Sprott J. C. *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos*, 2000.
- [5] Ulovec A., Hohenwarter, H.: *Fractals – broken with no need to repair*, in this volume.
- [6] <http://math.bu.edu/DYSYS/>
- [7] Pickover C. *Chaos in Wonderland*, St. Martin's Press, 1994.
- [8] Sendova, E. *Introducing a Little Chaos to Break the Tradition*, Mathematics and Education in Mathematics, Proc. 31st Spring Conf. UBM, 35–47, 2002 (in Bulgarian).
- [9] <http://www.mcescher.com/>
- [10] Barnsley, M. F. *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.